УДК 517.95

І. Б. Березницька

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ДВОХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ

I. B. Bereznyts'ka. *Inverse problem of determination of two coefficients in a parabolic equation with nonlocal conditions*, Matematychni Studii, **19** (2003) 217–224.

Existence and uniqueness theorems for the inverse problem of the determination of major coefficient and source in a general parabolic equation are established. Additional conditions are the following: two local conditions are two nonlocal and integral types conditions.

И. Б. Березницкая. *Обратная задача определения двух коэффициентов в параболическом уравнении с нелокальными условиями* // Математичні Студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.217–224.

Получены теоремы существования и единственности решения обратной задачи определения старшего коэффициента и множителя свободного члена в параболическом уравнении. В качестве дополнительных условий рассмотрены два локальных условия и два условия нелокального и интегрального типов.

Кожній прямій задачі можна співставити ряд обернених в залежності від того, який параметр є невідомим. Багатопараметричні обернені задачі для параболічних рівнянь, в яких, крім розв'язку прямої задачі, невідомими є залежні від часу старший коефіцієнт та множник вільного члена, досліджені у випадку рівняння теплопровідності в працях [1, 2]. В [1] всі додаткові умови локальні, а в [2] дві з додаткових умов взято у вигляді значень теплових потенціалів.

У цій роботі задачу визначення залежних від часу старшого коефіцієнта та множника вільного члена розглянуто для параболічного рівняння загального вигляду з двома локальними умовами та двома нелокальними умовами, в одну з яких доданком входить інтеграл від невідомої функції. Для цієї задачі знайдено умови існування та єдиності розв'язку на деякому, взагалі кажучи, малому інтервалі часу, що залежить від вихідних даних задачі. Існування доведено застосуванням теореми Шаудера про нерухому точку до системи рівнянь, що еквівалентна до оберненої задачі. Єдиність встановлено на основі властивостей однорідних рівнянь Вольтерра другого роду.

Нехай $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < h, \ 0 < t < T\}$. Розглянемо рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(t)g_0(x,t) + g_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35R30.

з невідомими $(a,\ f,\ u)$, початкову умову

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,h], \tag{2}$$

крайові умови та умови перевизначення вигляду

$$u_x(0,t)=\mu_1(t),\ u_x(h,t)=\mu_2(t),\ t\in[0,T], \tag{3}$$

$$\nu_1(t)u(0,t)+\nu_2(t)u(h,t)=\mu_3(t),\ t\in[0,T], \tag{4}$$

$$\nu_3(t)u(0,t)+\nu_4(t)\int\limits_0^h u(x,t)dx=\mu_4(t),\ t\in[0,T]. \tag{5}$$

Нехай l — неціле додатне число. Розглянемо $H^l[0,T]$ — банахів простір функцій $u(t)$, $t\in[0,T]$, які неперервні разом зі своїми похідними до порядку $[l]$ включно і похідна порядку $[l]$ яких задовольняє умову Гельдера з показником $l-[l]$, та мають скінченну норму (див. [3, с.16]). $H^{l,l/2}(\overline{Q})$ — банахів простір функцій $u(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}_T$, які неперервні разом зі своїми похідними вигляду $D_t^rD_x^s$, $2r+s<l$, і похідні $D_t^rD_x^s$, $2r+s=[l]$, задовольняють умову Гельдера з показником $l-[l]$ за змінною x та з показником $(l-[l])/2$ за змінною t, та мають скінченну норму (див. [3, с.16]).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

(A_1) $\varphi\in H^{2+\alpha}[0,h]$; $\mu_i\in H^{\frac{1+\alpha}{2}}[0,T]$, $i\in\{1,2\}$; $\mu_i,\ \nu_j\in H^{1+\alpha/2}[0,T]$, $i\in\{3,4\}$, $j\in\{1,\dots,4\}$; $b,\ c,\ g_i,\ b_x,\ c_x,\ g_{ix}\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$, $i\in\{0,1\}$, $0<\alpha<1$;

(A_2) $\nu_2(t)>0,\ \nu_4(t)<0,\ \nu_1'(t)\le 0,\ \nu_4'(t)\ge 0,\ \mu_2(t)-\mu_1(t)>0,$

$$\nu_1(t)g_0(0,t)+\nu_2(t)g_0(h,t)>0,\ \nu_1(t)\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx-\nu_2(t)\nu_3(t)g_0(h,t)>0,$$

$$\nu_3(t)g_0(0,t)+\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx>0,\ \mu_3'(t)-\nu_2(t)(b(h,t)\mu_2(t)+g_1(h,t))>0,$$

$$\mu_4'(t)-\nu_4(t)\int\limits_0^h g_1(x,t)dx\le 0,\ \nu_2'(t)+\nu_2(t)c(h,t)\le 0,\ \nu_3'(t)-\nu_4(t)b(0,t)\ge 0,$$

$b(0,t)\mu_1(t)+g_1(0,t)\le 0,\ c(0,t)\le 0,\ b(h,t)\le 0,\ t\in[0,T];$
$\varphi(x)>0,\ \varphi''(x)>0,\ x\in[0,h];\ c(x,t)-b_x(x,t)\le 0,\ (x,t)\in\overline{Q}_T;$

(A_3) $\varphi'(0)=\mu_1(0),\ \varphi'(h)=\mu_2(0),\ \nu_1(0)\varphi(0)+\nu_2(0)\varphi(h)=\mu_3(0),$

$$\nu_3(0)\varphi(0)+\nu_4(0)\int\limits_0^h\varphi(x)dx=\mu_4(0).$$

Тоді задача (1)–(5) має розв'язок $(a,f,u)\in(H^{\alpha/2}[0,T_0])^2\times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{T_0})$, $0<\alpha<1$, $a(t)>0$, $t\in[0,T_0]$, *де число* $T_0,\ 0<T_0\le T$, *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Припускаючи, що (a,f,u) — розв'язок задачі (1)–(5), продиференціюємо рівності (4), (5) за змінною t. Враховуючи рівняння (1) та умови (3), отримаємо

$$\begin{gathered}a(t)(\nu_1(t)u_{xx}(0,t)+\nu_2(t)u_{xx}(h,t))+f(t)(\nu_1(t)g_0(0,t)+\nu_2(t)g_0(h,t))=\\=\mu_3'(t)-\nu_1(t)(b(0,t)\mu_1(t)+g_1(0,t))-\nu_2(t)(b(h,t)\mu_2(t)+g_1(h,t))-\\-(\nu_1'(t)+\nu_1(t)c(0,t))u(0,t)-(\nu_2'(t)+\nu_2(t)c(h,t))u(h,t),\end{gathered} \tag{6}$$

$$a(t)(\nu_3(t)u_{xx}(0,t)+\nu_4(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)))+f(t)\left(\nu_3(t)g_0(0,t)+\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx\right)=$$

$$=\mu_4'(t)-\nu_3(t)(b(0,t)\mu_1(t)+g_1(0,t))-\nu_4(t)\int\limits_0^h g_1(x,t)dx-(\nu_3'(t)+\nu_3(t)c(0,t)-$$

$$-\nu_4(t)b(0,t))u(0,t)-\nu_4(t)b(h,t)u(h,t)-\int\limits_0^h(\nu_4'(t)+\nu_4(t)(c(x,t)-b_x(x,t)))u(x,t)dx. \quad (7)$$

Позначимо $w(x,t)=u_{xx}(x,t)$. З рівностей (6), (7), як системи рівнянь відносно функцій $a(t)$ та $f(t)$, визначаємо

$$a(t)=\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}, \quad (8)$$

$$f(t)=\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}, \quad (9)$$

де $$\Delta(t)=-\nu_4(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t))(\nu_1(t)g_0(0,t)+\nu_2(t)g_0(h,t))+\left(\nu_1(t)\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx-\right.$$

$$\left.-\nu_2(t)\nu_3(t)g_0(h,t)\right)w(0,t)+\nu_2(t)\left(\nu_3(t)g_0(0,t)+\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx\right)w(h,t),$$

$$\Delta_1(t)=(\mu_3'(t)-\nu_2(t)(b(h,t)\mu_2(t)+g_1(h,t)))\left(\nu_3(t)g_0(0,t)+\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx\right)-$$

$$-\left(\mu_4'(t)-\nu_4(t)\int\limits_0^h g_1(x,t)dx\right)(\nu_1(t)g_0(0,t)+\nu_2(t)g_0(h,t))-(b(0,t)\mu_1(t)+g_1(0,t))\times$$

$$\times\left(\nu_1(t)\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx-\nu_2(t)\nu_3(t)g_0(h,t)\right)+\Big[(\nu_3'(t)-\nu_4(t)b(0,t))(\nu_1(t)g_0(0,t)+$$

$$+\nu_2(t)g_0(h,t))-\nu_1'(t)\left(\nu_3(t)g_0(0,t)+\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx\right)-c(0,t)\Big(\nu_1(t)\nu_4(t)\times$$

$$\times\int\limits_0^h g_0(x,t)dx-\nu_2(t)\nu_3(t)g_0(h,t)\Big)\Big]u(0,t)+\Big[\nu_4(t)b(h,t)(\nu_1(t)g_0(0,t)+\nu_2(t)g_0(h,t))-$$

$$-(\nu_2'(t)+\nu_2(t)c(h,t))\left(\nu_3(t)g_0(0,t)+\nu_4(t)\int\limits_0^h g_0(x,t)dx\right)\Big]u(h,t)+$$

$$+(\nu_1(t)g_0(0,t)+\nu_2(t)g_0(h,t))\int\limits_0^h(\nu_4'(t)+\nu_4(t)(c(x,t)-b_x(x,t)))u(x,t)dx,$$

$$\Delta_2(t) = F_1(t) + F_2(t)w(0,t) + F_3(t)w(h,t) + \Big(F_4(t)u(0,t) + F_5(t)u(h,t) +$$

$$+ \int\limits_0^h F_6(x,t)u(x,t)dx\Big)w(0,t) + \Big(F_7(t)u(0,t) + F_8(t)u(h,t) + \int\limits_0^h F_9(x,t)u(x,t)dx\Big)w(h,t),$$

а функції $F_i(t)$, $i \in \{1,\dots,5,7,8\}$, $F_i(x,t)$, $i \in \{6,9\}$, виражаються через вихідні дані задачі. Оскільки $u(x,0) = \varphi(x) > 0$, $w(x,0) = \varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h]$, то існує число T_0, $0 < T_0 \le T$, таке що $u(x,t) \ge 0$, $w(x,t) \ge 0$, $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$. Тоді, враховуючи умови (A_2), отримуємо, що $\Delta(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$. Умова $\Delta(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, гарантує еквівалентність систем (6)–(7) та (8)–(9).

Позначимо $v(x,t) = u_x(x,t)$. За допомогою функцій Гріна $G_i(x,t,\xi,\tau)$, $i \in \{1,2\}$, відповідно першої та другої крайових задач для рівняння теплопровідності та диференціювання за змінною x задачу (1)–(3) зведемо до системи рівнянь ([4]):

$$u(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - G_2(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau + G_2(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\tau)g_0(\xi,\tau) + g_1(\xi,\tau))d\xi d\tau, \qquad (10)$$

$$v(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi + G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$-G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) +$$

$$+(b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\tau)g_{0\xi}(\xi,\tau) + g_{1\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau, \qquad (11)$$

$$w(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi - G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau + G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau) +$$

$$+f(\tau)g_{0\xi}(\xi,\tau) + g_{1\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}. \qquad (12)$$

Доведемо, що задача (1)–(5) еквівалентна до системи рівнянь (8)–(12) в такому сенсі: якщо (a,f,u) — розв'язок задачі (1)-(5), то, позначивши $v(x,t) = u_x(x,t)$, $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$, п'ятірка функцій (a,f,u,v,w) є розв'язком системи рівнянь (8)–(12) і, якщо $(a,f,u,v,w) \in (H^{\alpha/2}[0,T_0])^2 \times (H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{T_0}))^3$, $0 < \alpha < 1$, розв'язок системи рівнянь (8)–(12), то $(a,f,u) \in (H^{\alpha/2}[0,T_0])^2 \times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{T_0})$, $0 < \alpha < 1$, — розв'язок задачі (1)–(5). Зі способу утворення системи рівнянь (8)–(12) випливає, що розв'язок задачі (1)-(5) задовольняє систему рівнянь (8)-(12) у вказаному вище сенсі. Припустимо, що $(a,f,u,v,w) \in (H^{\alpha/2}[0,T_0])^2 \times (H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{T_0}))^3$, $0 < \alpha < 1$, — розв'язок системи рівнянь (8)–(12). Враховуючи спосіб отримання рівнянь (11), (12) шляхом диференціювання (10) відповідно один та два рази за змінною x, з єдиності розв'язку системи інтегральних рівнянь (10)-(12) отримуємо, що $v(x,t)=u_x(x,t)$, $w(x,t)=u_{xx}(x,t)$. Оскільки $(a,f)\in(H^{\alpha/2}[0,T_0])^2$, то враховуючи умови (A_1) теореми і використовуючи властивості функцій Гріна та об'ємних потенціалів [5], з вигляду рівняння (10) отримуємо, що функція $u\in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{T_0})$ є розв'язком задачі (1)–(3) [3, с. 364]. Для встановлення умов (4), (5) припустимо, що ліві частини (4), (5) відповідно дорівнюють $\gamma_1(t)\neq\mu_3(t)$, $\gamma_2(t)\neq\mu_4(t)$, $t\in[0,T_0]$. Продиференціюємо (4), (5) за змінною t, враховуючи рівняння (1) та умови (3). Беручи до уваги (6), (7) та умови (A_3) теореми, встановлюємо, що функції $\phi_1(t)=\gamma_1(t)-\mu_3(t)$, $\phi_2(t)=\gamma_2(t)-\mu_4(t)$ є розв'язками задачі Коші

$$\phi_1'(t)=0,\quad \phi_1(0)=0,\quad \phi_2'(t)=0,\quad \phi_2(0)=0.$$

Звідси випливає, що $\phi_1(t)\equiv0$, $\phi_2(t)\equiv0$, $t\in[0,T_0]$. Отже, виконуються умови (4), (5). Оскільки $u(x,t)\geq0$, $w(x,t)\geq0$, $x\in[0,h]$, $t\in[0,T_0]$, то, враховуючи умови (A_2) теореми, отримуємо, що $\Delta_1(t)>0$, $t\in[0,T_0]$. Взявши до уваги, що $\Delta(t)>0$, $t\in[0,T_0]$, з рівняння (8) матимемо, що $a(t)>0$, $t\in[0,T_0]$. Отже, $(a,\, f,\, u)$ — розв'язок задачі (1)–(5).

До системи (8)–(12) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь. Позначимо $U(t)=\max\{u(x,t):x\in[0,h]\}$, $V(t)=\max\{|v(x,t)|:x\in[0,h]\}$, $W(t)=\max\{w(x,t):x\in[0,h]\}$, $t\in[0,T_0]$. З рівняння (9) отримуємо

$$|f(t)|\leq C_1\frac{1}{C_6+C_7w(0,t)+C_8w(h,t)}+(C_2+C_3U(t))\frac{w(0,t)}{C_6+C_7w(0,t)+C_8w(h,t)}+$$

$$+(C_4+C_5U(t))\frac{w(h,t)}{C_6+C_7w(0,t)+C_8w(h,t)},$$

де $C_i>0$, $i=\in\{1,\dots,8\}$, — сталі, які виражаються через вихідні дані задачі. Оцінюючи кожний дріб окремо, отримаємо

$$|f(t)|\leq(C_9+C_{10}U(t))\left(\frac{1}{C_6}+\frac{1}{C_7}+\frac{1}{C_8}\right)\leq C_{11}+C_{12}U(t),\ t\in[0,T_0]. \tag{13}$$

Враховуючи встановлені в [6] оцінки та нерівність Коші, з рівняння (10) для функції $U(t)$ справедлива нерівність

$$U(t)\leq C_{13}+C_{14}r(t)+C_{15}\int\limits_0^t V(\tau)d\tau+C_{16}\int\limits_0^t U(\tau)d\tau+C_{17}\int\limits_0^t|f(\tau)|d\tau,\ t\in[0,T_0], \tag{14}$$

де $r(t)=\int_0^t a(\tau)d\tau$, а $C_i>0$, $i\in\{13,\dots,17\}$, — сталі, які виражаються через вихідні дані задачі. Врахувавши рівняння (11), функцію $v(x,t)$ подамо у вигляді

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\tau)g_{0\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau,$$

$$\text{де} \quad v_0(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau -$$
$$-\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\times\times\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v_{0\xi}(\xi,\tau)+$$
$$+(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))v_0(\xi,\tau)+g_{1\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau.$$

Функція $v_0(x,t)$ є розв'язком задачі ([4]):

$$v_{0t} = a(t)v_{0xx} + b(x,t)v_{0x} + (b_x(x,t)+c(x,t))v_0 + g_{1x}(x,t),\ (x,t)\in Q_{T_0},$$
$$v_0(x,0)=\varphi'(x),\ x\in[0,h],$$
$$v_0(0,t)=\mu_1(t),\ v_0(h,t)=\mu_2(t),\ t\in[0,T_0].$$

Оскільки за принципом максимуму [3, с.22] для функції $v_0(x,t)$ справедлива оцінка

$$|v_0(x,t)| \le M_0 < \infty,\ (x,t)\in\overline{Q}_{T_0},$$

то, врахувавши, що $\displaystyle\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi \le 1$, для функції $v(x,t)$ отримуємо оцінку

$$V(t) \le C_{18} + C_{19}\int\limits_0^t U(\tau)d\tau + C_{20}\int\limits_0^t |f(\tau)|d\tau, \quad t\in[0,T_0]. \tag{15}$$

Позначимо $S(t)=U(t)+V(t)$. Врахувавши (13), для функції $S(t)$ з (14) і (15) матимемо нерівність

$$S(t) \le C_{21} + C_{14}r(t) + C_{22}\int\limits_0^t S(\tau)d\tau,\ t\in[0,T_0].$$

Застосовуючи до останньої нерівності лему 2 з монографії [5, с.300], отримаємо

$$S(t) \le C_{23} + C_{24}r(t). \tag{16}$$

З іншого боку, з рівняння (8) за допомогою (16) для функції $a(t)$ маємо оцінку

$$a(t) \le C_{25} + C_{26}U(t) \le C_{25} + C_{26}S(t) \le C_{27} + C_{28}r(t),\ t\in[0,T_0]. \tag{17}$$

Оскільки $r(t) = \displaystyle\int_0^t a(\tau)d\tau$, то з нерівності (17) за лемою Гронуолла отримаємо

$$a(t) \le A_1 < \infty,\ t\in[0,T_0]. \tag{18}$$

Використовуючи нерівність (16) та позначення $S(t)=U(t)+V(t)$, отримуємо оцінки

$$u(x,t) \le M_1 < \infty,\ (x,t)\in\overline{Q}_{T_0}, \tag{19}$$

$$|v(x,t)| \leq M_2 < \infty, \ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}. \tag{20}$$

Тоді з (13) маємо

$$|f(t)| \leq F < \infty, \ t \in [0,T_0]. \tag{21}$$

Оцінимо функцію $w(x,t)$ зверху. Враховуючи (19), (20) та використовуючи встановлені у [6] оцінки, з рівняння (12) для $W(t)$ отримуємо нерівність

$$W(t) \leq C_{29} + C_{30}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}} + C_{31}\int\limits_0^t W(\tau)d\tau + C_{32}\int\limits_0^t \frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}.$$

При додатково накладеній умові на число T_0 (див.[4]) будуть справедливі оцінки

$$w(x,t) \leq M_3 < \infty, \ (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \tag{22}$$

$$a(t) \geq A_2 > 0, \ t \in [0,T_0]. \tag{23}$$

Число T_0, $0 < T_0 < T$, повинно бути таким, щоб виконувалися умови $u(x,t) \geq 0$, $w(x,t) \geq 0$ при $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$. З рівняння (10) випливає, що для $(x,t) \in \overline{Q}_{T_0}$

$$u(x,t) \geq \min\{\varphi''(x) \colon x \in [0,h]\} - \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)d\tau +$$
$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\Big(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) +$$
$$+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\tau)g_0(\xi,\tau) + g_1(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau. \tag{24}$$

Тому, скориставшись оцінками (див. [4]) модулів інтегралів з нерівності (24) та вже встановленими апріорними оцінками (18)–(23), ця нерівність набуде вигляду

$$u(x,t) \geq C_{33} - C_{34}\sqrt{t} - C_{35}t. \tag{25}$$

Подібно, умову $w(x,t) \geq 0$ можна звести до вигляду

$$w(x,t) \geq C_{36} - C_{37}\sqrt{t} - C_{38}t, \tag{26}$$

де $C_i > 0$, $i \in \{33,\ldots,38\}$, — сталі, що виражаються через вихідні дані задачі та сталі A_1, A_2, F, M_1, M_2, M_3. Виходячи з того, що проміжок $[0,T_0]$ шукається з умови, щоб $u(x,t) \geq 0$, $w(x,t) \geq 0$ при $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$, то, з (25), (26) отримуємо, що T_0 повинно бути розв'язком нерівностей

$$C_{33} - C_{34}\sqrt{T_0} - C_{35}T_0 \geq 0, \quad C_{36} - C_{37}\sqrt{T_0} - C_{38}T_0 \geq 0.$$

Позначимо: $\gamma = (a,f,u,v,w)$, $N = \{(a,f,u,v,w) \in (C[0,T_0])^2 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 : \ A_2 \leq a(t) \leq A_1, \ |f(t)| \leq F, \ 0 \leq u(x,t) \leq M_1, \ |v(x,t)| \leq M_2, \ 0 \leq w(x,t) \leq M_3\}$. Систему (8)-(12) запишемо у вигляді операторного рівняння

$$\gamma = P\gamma,$$

де оператор P переводить N в N. Подібно, як і в [6] встановлюємо, що оператор P є цілком неперервний, а тому задовольняє умови теореми Шаудера. Отже, система рівнянь (8)-(12) має неперервний розв'язок. Враховуючи умови (A_1) теореми, з системи рівнянь (10)–(12) випливає, що $(u, v, w) \in (H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_{T_0}))^3$. Використовуючи цей факт, з рівнянь (8), (9) отримуємо, що $(a, f) \in (H^{\alpha/2}[0, T_0])^2$. Внаслідок єдиності розв'язку системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (10)-(12) маємо, що $v(x,t) = u_x(x,t)$, $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Тому $u \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_{T_0})$ [3, с.364]. □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (A_2) *та* (A_5) b, c, g_0, b_x, c_x, $g_{0x} \in H^{1+\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$; $\nu_i \in H^{1+\alpha/2}[0,T]$, $i \in \{1,\dots,4\}$, $0 < \alpha < 1$.

Якщо задача (1)-(5) має розв'язок, то він єдиний при $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$, *де число* T_0, $0 < T_0 \le T$, *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення теореми проводиться за наступною схемою: припускаючи існуванння двох різних розв'язків (a_i, f_i, u_i), $i \in \{1,2\}$, задачі (1)–(5), можна довести, що їх різниця є розв'язком оберненої задачі знаходження невідомих множників у джерелі. Дослідженння подібних задач проведено у [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами, Препринт. – Київ, 1995. – 84 с.
2. Пабирівська Н.В. *Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т.43, №1. – С.51–58.
3. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
4. Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В. *Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении* // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т.43, №2. – С.406–413.
5. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
6. Иванчов Н.И. *Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении* // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т.39, №3. – С.539–550.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Львівський інститут менеджменту

Надійшло 3.01.2003
Після переробки 23.04.2003
Після переробки 3.06.2003