УДК 517.5

Z. M. Sheremeta

ОБМЕЖЕНІСТЬ ІНДЕКСУ ЦІЛОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Z. M. Sheremeta. *Index boundedness of an entire solution of a differential equation*, Matematychni Studii, **19** (2003) 208–212.

For $l(x) \equiv \mathrm{const} > 1$ the boundedness of l-index of an entire solution of the differential equation $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$ is investigated.

З. М. Шеремета. *Ограниченность индекса целого решения одного дифференциального уравнения* // Математичні Студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.208–212.

Для $l(x) \equiv \mathrm{const} > 1$ исследована ограниченность l-индекса целого решения дифференциального уравнения $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$.

Нехай $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. С. Шах [1] вказав умови на дійсні коефіцієнти β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2, за яких диференціальне рівняння

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0 \tag{1}$$

має цілий розв'язок $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ такий, що коефіцієнти a_n визначаються одночленною рекурентною формулою, функція f і всі її похідні є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і $\ln M_f(r) = (1 + o(1))|\beta_0|r$, $r \to \infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Значно складніший випадок, коли a_n визначаються двочленною рекурентною формулою, вивчено в [2–3]. Зокрема, в [3] доведено наступний результат.

Теорема A. *Якщо* $\beta_1 = -\gamma_2 = -2$, $-2/3 \le \beta_0 = -\gamma_1 < 0$ *і* $5\beta_0/6 \le \gamma_0 \le 0$, *то існує цілий розв'язок*

$$f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

диференціального рівняння (1) такий, що $f, f', f'', \ldots$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *і*

$$\ln M_f(r) = \frac{(1 + o(1))}{2}(|\beta_0| + \sqrt{|\beta_0|^2 + 4|\gamma_0|})r, \quad r \to +\infty. \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34M05.

Для додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функції l ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [4, с. 5] якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in\mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\le\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)}:\,0\le k\le N\right\}. \tag{4}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом і позначається через $N(f,l)$. У випадку, коли $l(x)\equiv 1$, звідси отримуємо означення індексу $N(f)$ цілої функції f, введене Б. Лепсоном [5].

Якщо $G\subset\mathbb{C}$ та існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (4) правильна для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f,l;G)$. Добре відомо [4, с. 93], що якщо $g_0,\,g_1,\dots,\,g_n$ і h — поліноми такі, що $\deg g_j\le\deg g_0$, $1\le j\le n$, а ціла функція f є розв'язком рівняння $g_0(z)w^{(n)}+g_1(z)w^{(n-1)}+\dots+g_n(z)w=h(z)$, то f є функцією обмеженого індексу. Звідси випливає, що кожний цілий розв'язок диференціального рівняння (1) є функцією обмеженого індексу.

Тут ми отримаємо оцінки l-індексу цілої функції (2). Наступна теорема доповнює теорему А.

Теорема 1. *За умов теореми А ціла функція (2) є обмеженого l-індексу з $l(x)\equiv 3$, причому $N(f,3;\mathbb{C}\backslash\mathbb{D})\le 1$ і $N(f,3;\overline{\mathbb{D}})\le\max\{N,\,P\}$, де $N=[\{\ln\,f(2)-\ln\,f(1/2)\}/\ln\,3]+1$ і $P=[\{\ln\,f(3)-\ln\,f(1/2)+4+(N+1)\ln\,3+\ln\,N!\}/\ln\,6]+1$.*

Доведення. Якщо ціла функція f є розв'язком рівняння (1), то для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$

$$\frac{|f''(z)|}{2!}\le\frac{1}{2}\left(\left|\beta_0+\frac{\beta_1}{z}\right||f'(z)|+\left|\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}\right||f(z)|\right)$$

і за умов теореми А для $|z|\ge 1$

$$\frac{|f''(z)|}{2!3^2}\le\frac{|\beta_0|+2}{6}\frac{|f'(z)|}{3}+\frac{|\gamma_0|+|\beta_0|+2}{18}|f(z)|\le\max\left\{\frac{|f'(z)|}{3},\,|f(z)|\right\}. \tag{5}$$

Підставляючи f в (1) і диференціюючи один раз, отримуємо

$$z^2f'''(z)+\{\beta_0z^2+(\beta_1+2)z\}f''(z)+\{\gamma_0z^2+(\gamma_1+2\beta_0)z+\gamma_2+\beta_1\}f'(z)+\{2\gamma_0z+\gamma_1\}f(z)\equiv 0,$$

звідки для всіх $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$

$$\frac{|f'''(z)|}{3!}\le\frac{1}{3}\left|\beta_0+\frac{\beta_1+2}{z}\right|\frac{|f''(z)|}{2!}+\frac{1}{6}\left|\gamma_0+\frac{\gamma_1+2\beta_0}{z}+\frac{\gamma_2+\beta_1}{z^2}\right||f'(z)|+$$
$$+\frac{1}{6}\left|\frac{2\gamma_0}{z}+\frac{\gamma_1}{z^2}\right||f(z)|$$

і, як вище, для $|z|\ge 1$ маємо

$$\frac{|f'''(z)|}{3!3^3}<\max\left\{\frac{|f''(z)|}{2!3^2},\,\frac{|f'(z)|}{1!3},\,|f(z)|\right\}. \tag{6}$$

Нарешті, якщо продиференціюємо $m\ge 2$ раз, то

$$z^2 f^{(m+2)}(z) + \{\beta_0 z^2 + (\beta_1 + 2m)z\} f^{(m+1)}(z) +$$
$$+\{\gamma_0 z^2 + (2m+\gamma_1)z + m(m-1) + m\beta_1 + \gamma_2\} f^{(m)}(z) +$$
$$+\{2m\gamma_0 z + m(m-1)\beta_0 + m\gamma_1\} f^{(m-1)}(z) + m(m-1)\gamma_0 f^{(m-2)}(z) \equiv 0,$$

звідки для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!} \le \left|\frac{\beta_0}{m+2} + \frac{2m+\beta_1}{(m+2)z}\right| \frac{|f^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!} +$$
$$+\left|\frac{\gamma_0}{(m+2)(m+1)} + \frac{2m\beta_0+\gamma_1}{(m+2)(m+1)z} + \frac{m(m-1)+m\beta_1+\gamma_2}{(m+2)(m+1)z^2}\right| \frac{|f^{(m)}(z)|}{m!} +$$
$$+\left|\frac{2\gamma_0}{(m+2)(m+1)z} + \frac{(m-1)\beta_0+\gamma_1}{(m+2)(m+1)z^2}\right| \frac{|f^{(m-1)}(z)|}{(m-1)!} +$$
$$+\left|\frac{\gamma_0}{(m+2)(m+1)z^2}\right| \frac{|f^{(m-2)}(z)|}{(m-2)!}.$$

Тому за умов теореми A для $|z| \ge 1$ отримуємо

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!3^{m+2}} \le \frac{63m^2+21m-8}{81m^2+243m+162} \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : m-2 \le j \le m+1\right\} <$$
$$< \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : m-2 \le j \le m+1\right\}. \tag{7}$$

Для $n \ge 4$ і $|z| \ge 1$ з (7) маємо $\dfrac{|f^{(n)}(z)|}{n!3^n} \le \max\left\{\dfrac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : 0 \le j \le n-1\right\}$, звідки, використовуючи (6) і (5), легко отримаємо нерівності

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!3^n} \le \max\left\{\frac{|f''(z)|}{2!3^2}, \frac{|f'(z)|}{3}, |f(z)|\right\} \le \max\left\{\frac{|f'(z)|}{3}, |f(z)|\right\},$$

для всіх $|z| \ge 1$ і $n \ge 0$, тобто $N(f, 3; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \le 1$.

С. Шах [6] показав, що якщо f — ціла функція, $f(0) = 0$, $R \ge 2$ і $|z| \le R/2$, то для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$

$$M_f(1/2) \le M_f(R)\left(\frac{R(|z|+1/2)}{R^2+|z|/2}\right)^{N+1} + 2e^{2R}\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \le k \le N\}.$$

Оскільки [3] коефіцієнти функції (2) додатні, то $M_f(R) = f(R)$ і, якщо приймемо $R = 2$, то звідси для $|z| \le 1$ отримаємо

$$f(1/2) \le f(2)\left(\frac{2|z|+1}{8+|z|}\right)^{N+1} + 2e^4 \max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \le k \le N\} \le$$
$$\le f(2)3^{-(N+1)} + 2e^4 \max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \le k \le N\}$$

Оскільки $f(2) \le 3^N f(1/2)$ для вказаного у формулюванні теореми 1 числа N, то з останньої нерівності отримуємо нерівність $\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \le k \le N\} \ge f(1/2)/(3e^4)$ і, отже,

$$\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!3^k} : 0 \le k \le N\right\} \ge \frac{1}{N!3^N}\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \le k \le N\} \ge \frac{f(1/2)}{3N!3^N e^4}. \tag{8}$$

З іншого боку, за нерівністю Коші для кожного $|z| \le 1$ маємо $|f^{(p)}(z)|/(p!3^p) \le \le M_f(3)/(2^p 3^p) \le f(3)/6^p$. Тому, якщо $f(3)/6^p \le f(1/2)/(N!3^{N+1}e^4)$, то з (8) для всіх $|z| \le 1$ і всіх $p \ge P$ дістаємо $\dfrac{|f^{(p)}(z)|}{p!3^p} \le \max\left\{\dfrac{|f^{(k)}(z)|}{k!3^k} : 0 \le k \le N\right\}$, тобто $N(f,3;\overline{\mathbb{D}}) \le \max\{N,\ P\}$. □

У [2] доведено наступне твердження.

Теорема Б. *Нехай коефіцієнти диференціального рівняння (1) задовольняють одну з умов:*

1) $\beta_0 = -1,\ \beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ -1 \le \gamma_0 < 0;$

2) $\beta_0 = -1,\ \beta_1 > 0,\ -\dfrac{6+\beta_1}{6+3\beta_1} \le \gamma_0 < 0,\ -\beta_1 \le \gamma_1 \le -\beta_1/2,\ \gamma_2 = -\beta_1;$

3) $-1 < \beta_0 < 0,\ -2(1+\beta_0) < \beta_1 \le 0,\ \beta_0 \le \gamma_0 < 0,\ -(1+\beta_1/2+\beta_0) < \gamma_1 \le 0,\ \gamma_2 = -\beta_1;$

4) $-1 < \beta_0 < 0,\ \beta_1 > 0,\ -\dfrac{6+\beta_1}{6+3\beta_1} \le \gamma_0 < 0,\ -(1+\beta_1/2+\beta_0) < \gamma_1 \le 0,\ \gamma_2 = -\beta_1.$

Тоді існує цілий розв'язок

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{9}$$

диференціального рівняння (1), який разом з усіма своїми похідними є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ *функціями і виконується (3).*

Подібно до доведення теореми 1 можна показати, що якщо виконується одна з умов 1) – 4) теореми Б, то для функції (9) правильні нерівності $N(f,3;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \le 1$ за умов 1) та 3) і $N(f,3+\beta_1;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \le 1$ за умов 2) і 4). Тому, якщо кофіцієнти диференціального рівняння (1) задовольняють одну з умов 1), 3) теореми Б, то функція (9) є обмеженого l-індексу з $l(x) \equiv 3$ і $N(f,3) \le \max\{N,\ P\}$, де N і P такі, як у теоремі 1. Далі, як у доведенні теореми 1, можна показати, що $N(f,3+\beta_1;\overline{\mathbb{D}}) \le \max\{N,\ P\}$, де N таке, як у теоремі 1, а $P = [\{\ln f(3) - \ln f(1/2) + 4 + \ln 3 + N \ln(3+\beta_1) + \ln N!\}/\ln(2(3+\beta_1)] + 1$. Звідси можна зробити відповідний висновок про l-індекс функції (9).

ЛІТЕРАТУРА

1. Shah S.M. *Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II* // J. Math. anal. and appl.– 1989. – V. 142. – P. 422-430.
2. Шеремета З.М. *О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения* // Дифференц. уравн. – 2000. - Т. 36, №8. – С. 1045-1050.
3. Sheremeta Z.M. *On entire solutions of a differential equation* // Matematychni studii. – 2000. – T. 14, №1. – C. 54-58.
4. Sheremeta M.M. Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers. – 1999. – 141 pp.
5. Lepson B. *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index* // Proc. Sympos. Pure Math., V.2. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island. – 1968. – P.298–307.

6. Shah S.M. *Entire solutions of linear differential equations and bounds for growth and index numbers* // Proc. of the Royal Soc of Edinburg. – 1983. – V.A94. – P.49–60.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача

Надійшло 25.03.2003
Після переробки 15.05.2003