УДК 517.57

О. Б. Скасків*

ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕРІВНОСТІ МІЖ ДІЙСНИМИ ОПУКЛИМИ ФУНКЦІЯМИ

O. B. Skaskiv. *Differentiation of an inequality between real convex functions*, Matematychni Studii, **19** (2003) 141–148.

If $f(x) \le g(x)\,(x \in [-1;0)\,)$, then

$$\varlimsup_{x\to -0} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{meas}(E \cap [x;0)) \ge \frac{K-1}{K}$$

for every $K > 1$ and $\varepsilon > 0$, where $E = \{x \in [-1;0) : f'(x) \le (1+\varepsilon)g'(x)\}$, f and g are positive convex on $[-1;0)$ functions such that $f'_+(x),\ g'_+(x) \nearrow +\infty\ (x \to -0)$.

О. Б. Скаскив. *Дифференцирование неравенства между действительными выпуклыми функциями* // Математичні Студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.141–148.

Пусть $f(x)$ и $g(x) \uparrow +\infty (x \to -0)$ — положительные выпуклые при $x < 0$ функции такие, что правосторонние производные $f'_+(x),\ g'_+(x) \nearrow +\infty\ (x \to -0)$. Если $f(x) \le g(x)$ $(x \in [-1;0))$, то для каждых $K > 1$ и $\varepsilon > 0$

$$\varlimsup_{x\to -0} \frac{1}{|x|}\,\mathrm{meas}(E \cap [x;0)) \ge \frac{K-1}{K},$$

где $E = \{x \in [-1;0) : f'(x) \le (1+\varepsilon)Kg'(x)\}$.

Для опуклих на $[0;+\infty)$ функцій f та g таких, що $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \ge 0$, із [1, Theorem 4] випливає, що на множині E, залежній лише від $K > 1$ і g, виконується нерівність

$$f'_+(x) \le Keg'_+(x)\,, \tag{A}$$

при цьому

$$\delta(E) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\,\mathrm{meas}(E \cap [0;r]) > 0\,,$$

де f'_+ та g'_+ — правосторонні похідні відповідних функцій.

У праці [2, Theorem 1] доведено, що для множини

$$E_1 = \{x \ge 0 \,:\, f'_+(x) \le K{g_+}'(x)\} \tag{Б}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D99.

*Дослідження автора частково підтримані грантом INTAS, 99-00089.

виконується $\delta(E_1) \geq \frac{K-1}{K}$, де $K > 1$. Тобто, з точки зору нерівності між правосторонніми похідними, нерівність (Б) точніша за нерівність (А), проте результат з [1] можна застосовувати відразу до всього класу функцій f таких, що $f(x) \leq g(x)$, чого не можна робити з результатом з [2]. Проте і цей результат у багатьох випадках знаходить важливі застосування (див. [2–4]).

У цій статті встановимо твердження, подібне до цитованого результату з [2] у випадку опуклих на проміжку $[-1; 0)$ функцій. Відзначимо, що наступне твердження пристосоване, власне, до потреб аналітичних у півплощині та крузі функцій і вже було застосоване у такому контексті в [5]. При цьому публікуємо його з доведенням вперше.

Теорема 1. *Нехай $f(x)$ і $g(x) \uparrow +\infty (x \to -0)$ — невід'ємні опуклі при $x < 0$ функції такі, що правосторонні похідні $f'_+(x)$, $g'_+(x) \nearrow +\infty$ $(x \to -0)$. Якщо*

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in [\sigma_0; 0),$$

то для кожних $K > 1$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться множина $E \subset (-\infty; 0)$ така, що

$$DE = \varlimsup_{x \to -0} \frac{1}{|x|} \operatorname{meas}(E \cap [x; 0)) \geq \frac{K-1}{K}$$

і для всіх $x \in E$ виконується нерівність

$$f'(x) \leq (1+\varepsilon) K g'(x). \tag{1}$$

Доведення теореми 1 є подібним до доведення теореми 1 [2], встановленої для опуклих функцій на $[0, +\infty)$, і є його модифікацією. Зауважимо, що для функції $g_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon) g(x)$ виконується

$$g_\varepsilon(x) - f(x) \geq \varepsilon g(x) \to +\infty \quad (x \to -0).$$

Тому, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функція $g(x)$ – задовольняє умову $g(x) - f(x) \to +\infty$ $(x \to -0)$, і замість функції $g_\varepsilon(x)$ в нерівності (1) можемо розглядати функцію $g(x)$. Легко побачити, що для довільного $\eta > 0$ існує зростаюча до 0 послідовність (r_k) така, що

$$f'(y) \leq (1+\eta) f'(x), \quad g'(y) \leq (1+\eta) g'(x) \quad (r_k \leq x \leq y \leq r_{k+1}), \tag{2}$$

де знак похідної, як і всюди у цій статті, означає правосторонню похідну.

Для кожного $k \geq 1$ і для всіх $x \in [r_k, r_{k+1})$ визначимо функції

$$f_0(x) = f(r_k) + \frac{x - r_k}{r_{k+1} - r_k} (f(r_{k+1}) - f(r_k)),$$

$$g_0(x) = g(r_k) + \frac{x - r_k}{r_{k+1} - r_k} (g(r_{k+1}) - g(r_k)).$$

Зауважимо, що

$$f_0(x) \leq g_0(x) \quad (r_1 \leq x < 0). \tag{3}$$

Нехай $K_0 = K(1+\eta)^{-2}$, де $K > 1$ — довільне число. Розглянемо множини

$$E = \{x \geq r_1 : \ f'(x) \leq K g'(x)\}, \quad E_0 = \{x \geq r_1 : \ f'_0(x) \leq K_0 g'_0(x)\}.$$

Якщо $x \in E_0 \cap [r_k, r_{k+1})$, то з монотонності f' та g' і нерівностей (2) маємо

$$f'(x) \le (1+\eta) f'(r_k+0) \le (1+\eta)\frac{f(r_{k+1})-f(r_k)}{r_{k+1}-r_k} =$$
$$= (1+\eta) f_0'(x) \le (1+\eta) K_0 g_0'(x) = (1+\eta) K_0 \frac{g(r_{k+1})-g(r_k)}{r_{k+1}-r_k} \le$$
$$\le (1+\eta) K_0 g'(r_{k+1}-0) \le (1+\eta)^2 K_0 g'(x) = K g'(x),$$

тому,

$$(E_0 \cap [r_k,\ r_{k+1})) \subset (E \cap [r_k,\ r_{k+1}))$$

для кожного $k \ge 1$. Звідси, $E_0 \subset E$. Оскільки $f_0'(x)$ і $g_0'(x)$ кусково сталі, то знайдуться послідовності (x_k), (y_k) такі, що

$$r_1 \le x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < \dots < x_k < y_k < \dots < 0$$

і замикання $\overline{E_0} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [x_k, y_k]$. Визначимо послідовності

$$a_k = \frac{f_0(x_{k+1}) - f_0(y_k)}{x_{k+1} - y_k}, \quad b_k = \frac{g_0(x_{k+1}) - g_0(y_k)}{x_{k+1} - y_k}$$

і покажемо, що для всіх $k \ge 0$

$$a_k > K_0 b_k. \tag{4}$$

Справді, нехай j та p такі, що $x_{k+1} = r_j > y_k = r_p$. Оскільки для $x \in (y_k, x_{k+1})$ виконується $f_0'(x) > K_0 g_0'(x)$, то

$$b_k(x_{k+1} - y_k) = \sum_{m=p+1}^{j} (g_0(r_m) - g_0(r_{m-1})) =$$
$$= \sum_{m=p+1}^{j} g_0'(r_m - 0)(r_m - r_{m-1}) < \sum_{m=p+1}^{j} \frac{1}{K_0} f_0'(r_m - 0)(r_m - r_{m-1}) =$$
$$= \frac{1}{K_0} \sum_{m=p+1}^{j} (f_0(r_m) - f_0(r_{m-1})) = \frac{1}{K_0} a_k (x_{k+1} - y_k)$$

і, отже, нерівність (4) встановлено.

Визначимо тепер функції

$$a(x) = \begin{cases} a_k, & y_k \le x < y_{k+1}, \\ 0, & x < y_0, \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} b_k, & x_k \le x < x_{k+1}, \\ 0, & x < x_0, \end{cases}$$

$$A(x) = \int_{-\infty}^{x} a(t)\,dt, \quad B(x) = \int_{-\infty}^{x} b(t)\,dt \quad (x < 0)$$

і доведемо, що для фіксованого $l \in \mathbb{N}$, для всіх досить великих $m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{m,l} \overset{\text{def}}{=} B(x_{m+1}) - B(x_l) - A(x_{m+1}) + A(x_l) \ge 0. \tag{5}$$

Справді,

$$B(x_{m+1}) - B(x_l) = \int_{x_l}^{x_{m+1}} b(t)dt = \sum_{k=l}^{m} \left(\int_{x_k}^{y_k} + \int_{y_k}^{x_{k+1}} \right) b(t)dt =$$

$$= \sum_{k=l}^{m} \Big((y_k - x_k)b_k + g_0(x_{k+1}) - g_0(y_k) \Big) \geq$$

$$\geq \sum_{k=l}^{m} \Big((y_k - x_k)g_0'(y_k + 0) + g_0(x_{k+1}) - g_0(y_k) \Big) \geq$$

$$\geq \sum_{k=l}^{m} \Big(g_0(y_k) - g_0(x_k) + g_0(x_{k+1}) - g_0(y_k) \Big) = g_0(x_{m+1}) - g_0(x_l)$$

і подібно

$$A(x_{m+1}) - A(x_l) = \sum_{k=l}^{m-1} \left(\int_{y_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_{k+1}}^{y_{k+1}} \right) a(t)dt +$$

$$+ \int_{x_l}^{y_l} a(t)dt + \int_{y_m}^{x_{m+1}} a(t)dt =$$

$$= \sum_{k=l}^{m} a_k(x_{k+1} - y_k) + \sum_{k=l}^{m} a_{k-1}(y_k - x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=l}^{m} (f_0(x_{k+1}) - f_0(y_k)) + \sum_{k=l}^{m} f_0'(x_k - 0)(y_k - x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=l}^{m} (f_0(x_{k+1}) - f_0(y_k) + f_0(y_k) - f_0(x_k)) = f_0(x_{m+1}) - f_0(x_l).$$

Тому

$$\Delta_{m,l} \geq g_0(x_{m+1}) - f_0(x_{m+1}) - (g_0(x_l) - f_0(x_l))$$

і, оскільки

$$g_0(x_{m+1}) - f_0(x_{m+1}) \geq \min\{g(r_k) - f(r_k),\ g(r_{k+1}) - f(r_{k+1})\} \to +\infty \quad (x \to +\infty),$$

для k такого, що $x \in [r_k,\ r_{k+1})$, то звідси маємо (5).

Оцінимо $\Delta_{m,l}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $l \in \mathbb{N}$ зверху, застосовуючи (4). Позначимо $s_k = y_k - x_k,\ t_k = x_{k+1} - y_k$. Послідовно маємо

$$\Delta_{m,l} = \sum_{k=l}^{m} (t_k + s_k)b_k - \sum_{k=l}^{m} (a_{k-1}s_k + a_k t_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=l}^{m} ((1 - K_0)b_k t_k + (b_k - K_0 b_{k-1})s_k)\,.$$

Оскільки $\Delta_{m,l} \geq 0$ для всіх $l \in \mathbb{N}$ і для всіх досить великих $m \in \mathbb{N}$, то звідси

$$(K_0 - 1) \sum_{k=l}^{m} b_k t_k \leq \sum_{k=l}^{m} (b_k - K_0 b_{k-1})\, s_k. \tag{6}$$

Позначимо через $m(l)$ найменше з тих $m_1 \geq l$, що (6) виконується для всіх $m \geq m_1$. Зауважимо, що

$$C \stackrel{\mathrm{def}}{=} (K_0-1)\sum_{k=l}^{p} t_k = (K_0-1)\sum_{k=l}^{p} b_k t_k \left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_p}+\frac{1}{b_p}\right) =$$
$$= (K_0-1)\frac{1}{b_p}\sum_{k=l}^{p} b_k t_k + (K_0-1)\sum_{k=l}^{p-1} b_k t_k \sum_{j=k}^{p-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right) =$$
$$= (K_0-1)\frac{1}{b_p}\sum_{k=l}^{p} b_k t_k + (K_0-1)\sum_{j=l}^{p-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right)\sum_{k=l}^{j} b_k t_k. \tag{7}$$

Тому в правій частині останньої рівності можемо застосувати (6) до першої суми для всіх $p \geq m(l)$ та у другій сумі для всіх $j \geq m(l)$. Отже, маємо

$$C \leq \frac{1}{b_p}\sum_{k=l}^{p}(b_k - K_0 b_{k-1})s_k + (K_0-1)\sum_{j=m(l)}^{p-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right)\sum_{k=l}^{j} b_k t_k +$$
$$+(K_0-1)\sum_{j=l}^{m(l)-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right)\sum_{k=l}^{j} b_k t_k \leq \frac{1}{b_p}\sum_{k=l}^{p}(b_k - K_0 b_{k-1})s_k +$$
$$+\sum_{j=l}^{p-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right)\sum_{k=l}^{j}(b_k - K_0 b_{k-1})s_k + (K_0-1)\sum_{j=l}^{m(l)-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right)\sum_{k=l}^{j} b_k t_k -$$
$$-\sum_{j=l}^{m(l)-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right)\sum_{k=l}^{j}(b_k - K_0 b_{k-1})s_k.$$

Перші дві суми у правій частині останньої нерівності, подібно до того, як виводилось (7), тільки у зворотньому порядку, дають

$$\sum_{k=l}^{p}\frac{b_k - b_{k-1}K_0}{b_k}s_k.$$

Останні дві суми дають

$$(K_0-1)\sum_{k=l}^{m(l)-1} b_k t_k \sum_{j=k}^{m(l)-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right) - \sum_{k=l}^{m(l)-1}(b_k - K_0 b_{k-1})s_k \sum_{j=k}^{m(l)-1}\left(\frac{1}{b_j}-\frac{1}{b_{j+1}}\right) =$$
$$= (K_0-1)\sum_{k=l}^{m(l)-1} b_k t_k \sum_{j=k}^{m(l)-1}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{m(l)}}\right) - \sum_{k=l}^{m(l)-1}(b_k - K_0 b_{k-1})s_k \sum_{j=k}^{m(l)-1}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{m(l)}}\right) =$$
$$= (K_0-1)\sum_{k=l}^{m(l)-1} t_k - \sum_{k=l}^{m(l)-1}\frac{(b_k - K_0 b_{k-1})}{b_k}s_k +$$
$$+\frac{1}{b_{m(l)}}\left\{\sum_{k=l}^{m(l)-1}(b_k - K_0 b_{k-1})s_k - (K_0-1)\sum_{k=l}^{m(l)-1} b_k t_k\right\}.$$

За означенням $m(l)$ останній доданок від'ємний. Підсумовуючи, одержуємо

$$C \leq (K_0 - 1) \sum_{k=l}^{m(l)-1} t_k + \sum_{k=m(l)}^{p} \frac{b_k - K_0 b_{k-1}}{b_k},$$

звідки,

$$(K_0 - 1) \sum_{k=m(l)}^{p} t_k \leq \sum_{k=m(l)}^{p} \left(1 - \frac{K_0 b_{k-1}}{b_k}\right) s_k \leq \sum_{k=m(l)}^{p} s_k \quad (p \geq m(l)).$$

Використовуючи останню нерівність, виводимо

$$\left|x_{m(l)}\right| = \sum_{k=m(l)}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=m(l)}^{\infty} (t_k + s_k) \leq \frac{K_0}{K_0 - 1} \sum_{k=m(l)}^{\infty} s_k =$$
$$= \frac{K_0}{K_0 - 1} \operatorname{meas}(E_0 \cap [x_{m(l)};\ 0)),$$

тобто

$$DE \geq DE_0 \geq \varlimsup_{l \to +\infty} \frac{1}{\left|x_{m(l)}\right|} \operatorname{meas}(E_0 \cap [x_{m(l)};\ 0)) \geq \frac{K_0}{K_0 - 1}.$$

Пригадуючи, що $K_0 = K(1 + \eta)^{-2}$ і спрямовуючи $\eta \to +0$, одержуємо $DE \geq \frac{K}{K-1}$. Теорему доведено.

У зв'язку з доведеною теоремою 1 висловлю наступне припущення.

Гіпотеза. *Твердження теореми 1 залишиться правильним, якщо у ньому DE замінити на*

$$dE = \varliminf_{x \to -0} \frac{1}{|x|} \operatorname{meas}(E \cap [x; 0)).$$

Як уже відзначалось вище, твердження теореми 1 анонсоване в [5] і, власне, застосоване там до встановлення завершеності, отриманих в [5] тверджень. Інше застосування теореми 1 подамо нижче. Зауважимо, що в [2] подається подібне застосування цитованого вище результату до цілих функцій.

Лема. *Нехай $\varepsilon > 0$, а функція h така, що функція $h_0(x) = \ln h(x)$ додатна, n разів диференційовна на $[-1; 0)$, а всі її похідні до порядку $n-1$ включно невід'ємні і неспадні на $[-1; 0)$. Якщо $h(r) \to +\infty$ $(r \to 1 - 0)$, то нерівність*

$$(1 + \varepsilon)^{k-1} h^{(k)}(r) \geq \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^k h(r)$$

виконується для всіх $1 \leq k \leq n$ при $r \to 1 - 0$.

Доведення леми проводиться повністю подібно до доведення відповідної леми з [2], тому ми його тут не наводимо.

Теорема 2. *Нехай f — аналітична в крузі $\{z: \ |z| < 1\}$ функція, $K_f(r) = \dfrac{d \ln M(r, f)}{d \ln r}$ — правостороння похідна за $\ln r$, $M(r, f) = \max\{|f(z)|: \ |z| = r\}$. Якщо n разів диференційовна функція h така, що функція $h_0(x) = \ln h(x)$ додатна, а всі її похідні до порядку*

$n-1$ *включно невід'ємні і неспадні на* $[-1;0)$, *а також*

$$\varliminf_{r\to 1-0} \frac{\ln K_f(r)}{-\ln(1-r)} > 1 \tag{8}$$

і $M(r,f) \le h(r)$ $(r_0 \le r < 1)$, *то для кожних* $P > 1$, $\varepsilon > 0$ *існує множина* $E_2 \subset [0;1)$ *додатної верхньої лівосторонньої щільності в точці* $r = 1$

$$DE_2 = \varlimsup_{r\to 1-0} \frac{1}{1-r} \operatorname{meas}(E_2 \cap [r;1)) > \frac{P-1}{P}$$

така, що для всіх $\theta \in [0;2\pi]$, $1 \le k \le n$ *і* $r \in [0,1) \setminus E_2$

$$\left|f^{(k)}(re^{i\theta})\right| \le (1+\varepsilon)P^k h^{(k)}(r).$$

Доведення теореми 2. За умови (8) теореми 2 з теореми 2.2.25 [6, с.274] випливає, що

$$M(r,f^{(k)}) = (1+o(1))K_f^k(r)M(r,f) \tag{9}$$

при $r \to 1-0$ зовні деякої множини E_3 скінченної логарифмічної міри, тобто

$$\int\limits_{E_3\cap[0;1)} \frac{dr}{1-r} < +\infty.$$

Зауважимо, що $DE_3 = 0$. З нерівності (8), зокрема, випливає, що $M(r,f) \to +\infty$, тому, застосовуючи твердження леми і теореми 1, з (9) негайно отримуємо висновок теореми 2. Справді, за теоремою 1 на множині E верхньої лівосторонньої щільності в точці не меншої за $\frac{P}{P-1}$ маємо, що правостороння похідна

$$(\ln M(r,f))' \le P(1+\varepsilon_1)(\ln h(r))' \quad (\varepsilon_1 > 0).$$

Звідси, та з (9) випливає, що при $r \to 1-0$ вздовж множини $E_2 = E \setminus E_3$

$$M(r,f^{(k)}) \le (1+\varepsilon_1)^{k+1} P^k \left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^k h(r).$$

Застосування леми і вибір $\varepsilon_1 > 0$ такий, щоб виконувалась нерівність $(1+\varepsilon_1)^{n+1} < (1+\varepsilon)$, завершує доведення. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Hayman W.K., Stewart F.M. *Real inequalities with applications to function theory* // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1954. – V.50. – P.250–260.
2. Bergweiler W. *An inequality for real functions with applications to function theory*// Bull. London Math. Soc. – 1989. – V.21. – P.171–175.
3. Херате Сафае. *Асимптотические свойства целых рядов Дирихле.* – Дис. ... канд. физ.-мат. н. – Львов, 1992. – 86 с.
4. Скаскив О.Б., Херате С. *О центральном показателе целого ряда Дирихле.* – Львов, 1991. – 25 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 14.02.92, №170-Ук92 (РЖ Мат., 7Б75ДЕП).

5. Скасків О.Б. *Про центральний показник абсолютно збіжних рядів Діріхле*// Доп. НАН України. – 2000. – №10. – С.27–30.

6. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.– Вильнюс: Минтис, 1972. - 468 с.

Львівський національний університет ім. І. Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 1.12.2002