УДК 512.4

В. В. Назарчук, В. И. Сущанский

# ГРУППЫ ПЕРИОДИЧЕСКИ ЗАДАВАЕМЫХ ПОДСТАНОВОК СЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

V. V. Nazarchuk, V. I. Sushchansky. *Groups of periodically defined permutations on a countable set*, Matematychni Studii, **19** (2003) 115–126.

A class of groups consisting of almost periodic permutations is considered. These groups are parametrized by supernatural numbers. The conjugacy classes and normal structure of each group of this class are characterized.

В. В. Назарчук, В. И. Сущанский. *Группы периодически задаваемых подстановок счетной степени* // Математичні Студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.115–126.

Введен в рассмотрение класс групп подстановок счетного множества, которые определяются условиями почти периодичности подстановок и параметризируются супернатуральными числами. Охарактеризовано классы сопряженности и нормальное строение каждой из групп этого класса.

**Введение.** Задача характеризации локально конечных групп, являющихся объединениями возрастающих цепей конечных симметрических подгрупп относится в теории локально конечных групп к числу модельных. С одной стороны эти группы принадлежат к классу, так называемых, больших групп в смысле А. М. Вершика [1] и представляют значительный интерес в связи с применениями в комбинаторной теории представлений, теории динамических систем и т. п. С другой стороны каждая такая группа имеет свойства универсальности по вложению для конечных групп, является простой или почти простой и имеет обозримое силовское строение, что представляет интерес для самой теории групп. После работы А. Е. Залесского [2] стало понятно, что индуктивные пределы симметрических групп интересны и с точки зрения теории групповых колец. В этой работе был рассмотрен специальный класс таких индуктивных пределов, определяемый, так называемыми, диагональными вложениями. Развивая эту идею в работах [3, 4] был введен в рассмотрение класс индуктивных пределов симметрических групп со строго диагональными вложениями (так называемые, однородно симметрические группы). Оказалось, что однородно симметрические группы допускают естественную параметризацию супернатуральными числами, т.е. могут быть в определенном смысле классифицированы. Несколько иная конструкция, которую можно описать с помощью действия подстановки на классах эквивалентности, разбивающей счетное множество, предложена в [5].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20E25, 20E45, 20B35.

В данной работе мы расширяем класс однородно симметрических групп, вводя в рассмотрение почти однородно симметрические группы. Это осуществляется следующим образом. На множестве натуральных чисел однородно симметрические группы можно определять исходя из понятия периодичности подстановки. А именно, подстановку $\pi$ натурального ряда мы называем периодически заданной, если функция $\pi(n)-n$ периодическая на множестве $\mathbb{N}$. Рассматривая подстановки $\pi$, для которых $\pi(n)-n$, $n \in \mathbb{N}$, являются почти периодическими функциями, мы приходим к понятию почти однородно симметрической группы. В этой группе выделяется семейство подгрупп, которые также параметризируются супернатуральными числами и образуют полную подрешетку. В работе исследуется расположение однородно симметрических и почти однородно симметрических подгрупп в симметрической группе счетной степени, описываются классы сопряженности и нормальное строение почти однородно симметрических групп.

## §1. Однородно симметрические группы.

**1.1**. Формальное произведение $\xi = 2^{r_1}3^{r_2}5^{r_3}\ \ldots$ степеней простых чисел с $0 \leqslant r_k \leqslant \infty$, $k \in \mathbb{N}$, называется супернатуральным числом или числом Стейница [6]. Супернатуральное число $\xi$ бесконечно, если $r_k \neq 0$ для бесконечного числа индексов $k$, или если существует индекс $k$ такой что $r_k = \infty$. Пусть $\Sigma$ — множество всех супернатуральных чисел, $\Sigma_o$ его подмножество всех бесконечных супернатуральных чисел. Тогда

$$\Sigma = \Sigma_o \cup \mathbb{N},$$

причем $\Sigma$ и $\Sigma_o$ имеют континуальную мощность. Супернатуральное число $\xi_1 = 2^{r_1}3^{r_2}5^{r_3}\ \ldots$ является делителем супернатурального числа $\xi_2 = 2^{s_1}3^{s_2}5^{s_3}\ \ldots$, если $r_k \leqslant s_k$, для всех $k \in \mathbb{N}$. Отношение "$a$ делит $b$", (обозначаемое $a \mid b$) будет частичным порядком на множестве $\Sigma$. Частично упорядоченное множество $(\Sigma, \mid)$ является решеткой, точная верхняя и точная нижняя грани элементов $a = 2^{r_1}3^{r_2}5^{r_3}\ \ldots$ и $b = 2^{s_1}3^{s_2}5^{s_3}\ \ldots$ в которой определяются равенствами:

$$a \vee b = 2^{\max\{r_1,\, s_1\}}3^{\max\{r_2,\, s_2\}}\ \ldots,$$

$$a \wedge b = 2^{\min\{r_1,\, s_1\}}3^{\min\{r_2,\, s_2\}}\ \ldots.$$

Решетка $(\Sigma, \vee, \wedge)$ будет полной дистрибутивной решеткой, она содержит наименьший элемент — число 1 и наибольший элемент — супернатуральное число $I = 2^\infty \cdot 3^\infty \cdot 5^\infty \cdot \ldots$. Супернатуральные числа вида $p^\infty$ ($p$ — простое) и только они являются минимальными бесконечными (т. е. любой их делитель — натуральный). Все делители супернатурального числа $I_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots$ образуют булеву подалгебру в решетке $(\Sigma, \vee, \wedge)$.

Последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$ назовем делимой, если $n_1 \mid n_2 \mid n_3\ \ldots$. Каждой делимой последовательности сопоставляется супернатуральное число $\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} n_i$, называемое ее характеристикой. Две последовательности имеют одну и ту же характеристику лишь в том случае, когда каждый член первой является делителем некоторого члена второй, а каждый член второй — делителем некоторого члена первой.

**1.2**. Пусть $X$ — счетное множество. Мы будем рассматривать отношения эквивалентности на $X$ с конечными равномощными классами эквивалентности; при этом если известно, что мощности всех классов равны $n$, то эквивалентность будет обозначаться символом $e_n$.

Любое множество $E$ отношений эквивалентности такого вида естественным образом упорядочено. А именно, эквивалентности $e_n$ и $e'_m$ связаны соотношением $\leqslant$ в том и только в том случае , когда каждый $e'_m$-класс эквивалентности на $X$ является объединением некоторых $e_n$-классов. В частности, отсюда получаем, что $n \mid m$. Будут рассматриваться направленные множества отношений эквивалентности, т. е. такие, что вместе с каждой парой эквивалентностей $e'$, $e''$ содержат эквивалентность $e$, удовлетворяющую условиям $e' \leqslant e$, $e'' \leqslant e$.

**Определение 1.** [5] Множества $E$ и $E'$ отношений эквивалентности на $X$ имеют одинаковый тип (равнотипны), если для каждого $e \in E$ существует $e' \in E'$ такое, что $e' \geqslant e$ и для каждого $e' \in E'$ существует $e \in E$ такое, что $e \geqslant e'$.

Для множества $E$ отношений эквивалентности на $X$ и $e \in E$ положим $E_e = \{\, e' \in E \ \mid\ e' \geqslant e \,\}$.

**Лемма 1.** [5] *Если множество отношений эквивалентности на $X$ является направленным, то для каждого $e \in E$, подмножество $E_e \subset E$ также направленное и имеет одинаковый тип с $E$.*

**Определение 2.** Пусть $\xi \in \Sigma$ — некоторое супернатуральное число. Множество $E$ отношений эквивалентности на $X$ назовем $\xi$-системой, если выполнены условия:

1) $E$— направленное множество, и мощности классов эквивалентностей для отношений из $E$ являются натуральными делителями числа $\xi$;
2) для каждого натурального делителя $n$ числа $\xi$ множество $E$ содержит лишь конечное количество (возможно равное нулю) эквивалентностей с классами мощности $n$;
3) существует делимая последовательность мощностей классов эквивалентностей из $E$, характеристикой которой является супернатуральное число $\xi$.

Очевидно, каждому супернатуральному числу $\xi$ отвечает континуум различных $\xi$-систем.

Пусть $e$ некоторое отношение эквивалентности на $X$. Подстановку $\pi \in S\,(X)$ будем называть $e$-подстановкой, если каждый $e$-класс инвариантен относительно $\pi$. Множество $S\,(e)$ всех $e$-подстановок является подгруппой $S\,(X)$, которая изоморфна декартовому произведению симметричных групп на $e$-классах множества $X$. Символом $\overline{S}\,(e)$ будем обозначать диагональ этого декартова произведения. Если $E$ — некоторое множество отношений эквивалентности на $X$, то положим

$$\overline{S}\,(E) = \bigcup_{e \in E} \overline{S}\,(e).$$

**Лемма 2.** *Если множество $E$ отношений эквивалентности на $X$ направленное, то $\overline{S}\,(E)$ является подгруппой $S\,(X)$.*

В самом деле, из направленности $E$ следует, что множество $\{\overline{S}(e) \mid e \in E\}$ также направленное, поэтому $\bigcup_{e\in E} \overline{S}(e)$ является группой.

**Лемма 3.** *Если множества $E$ и $E'$ отношений эквивалентности на $X$ равнотипны, то $\overline{S}(E) = \overline{S}(E')$.*

Действительно, если $e \leqslant e'$, то $\overline{S}(e) \subseteq \overline{S}(e')$, а поскольку $E$ и $E'$ равнотипны, то выполняются оба включения $\overline{S}(E) \subseteq \overline{S}(E')$ и $\overline{S}(E') \subseteq \overline{S}(E)$.

**Лемма 4.** *Пусть $E$ некоторая $\xi$-система. Существует цепь $e^1 \leqslant e^2 \leqslant e^3 \leqslant \ \ldots$, отношений эквивалентности из множества $E$ такая, что множество $E^C = \{\, e^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ является $\xi$-системой равнотипной с $E$.*

*Доказательство.* Пусть $n$ — некоторый делитель $\xi$ такой, что $E$ содержит отношение эквивалентности с классами мощности $n$. Обозначим $e^1$ эквивалентность такую, что $e^1 \geqslant e$ для всех эквивалентностей $e$, мощность классов которых не превышает $n$. Символом $e^2$ обозначим эквивалентность такую, что $e^2 \geqslant e$ для всех $e$, мощность классов которых не превышает $n_1$, где $n_1$ — наименьший делитель $\xi$, который больше $n$, и т. д. Таким образом, получаем цепь $e^1 \leqslant e^2 \leqslant e^3 \leqslant \ \ldots$ эквивалентностей, которая очевидно, равнотипна с $E$ и является $\xi$-системой. □

Согласно леммам 1–4, для любой $\xi$-системы $E$, при произвольном $e \in E$ имеет место равенство

$$\overline{S}(E) = \overline{S}\left(E_e^C\right).$$

Поэтому, можно ограничиться рассмотрением лишь цепных $\xi$-систем, т.е. таких, что являются цепями эквивалентностей.

Действуя подстановкой $\pi \in S(X)$ на классы эквивалентности $e$, получим новую эквивалентность, которую будем обозначать $e^\pi$.

**Лемма 5.** *Пусть $E$ — некоторая цепная $\xi$-система на множестве $X$, $\pi \in S(X)$. Семейство $E^\pi = \{\, e^\pi \mid e \in E\}$ также является цепной $\xi$-системой на $X$.*

*Доказательство.* Пусть $E = \{\, e^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, где $e^1 \leqslant e^2 \leqslant e^3 \leqslant \ \ldots$ — цепь эквивалентностей, $E^\pi = \{\, (e^i)^\pi \mid i \in \mathbb{N}\}$. Если класс отношения эквивалентности $e'$ состоит из $e$-классов $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_k$, то $a_1^\pi,\ a_2^\pi,\ \ldots\ ,\ a_k^\pi$ будут $e^\pi$-классами, а их объединение — $e'^\pi$-классом. Поскольку $(e^1)^\pi \leqslant (e^2)^\pi \leqslant \ \ldots$, то $E^\pi$ является цепной, а так как при действии $\pi$ разные эквивалентности переходят в разные и мощности классов сохраняются, то выполняются условия определения 2, т. е. $E^\pi$ — $\xi$-система. □

**Предложение 1.** *Для произвольных $\xi$-систем $E_1$, $E_2$ на $X$ существует подстановка $\pi \in S(X)$ такая, что $E_1^\pi$ и $E_2$ равнотипны.*

*Доказательство.* Пусть $E_1$ и $E_2$ — произвольные $\xi$-системы на $X$. Подстановку $\pi \in S(X)$ такую, что $E_1^\pi$ равнотипно с $E_2$ сконструируем следующим образом. Сначала возьмем $\xi$-систему $E_1^C$ равнотипную с $E_1$ и перенумеруем элементы множества $X$. Для этого зафиксируем некоторый элемент $x_1$ множества $X$ и обозначим $x_2$ такой элемент из $X$, который лежит с $x_1$ в одном классе для всех эквивалентностей из $E_1^C$. После этого элемент $x_3$ выбираем так, чтобы он принадлежал одному классу с $x_2$ для всех эквивалентностей из $E_1^C$. Если же такого элемента не существует, то выбираем $x_3$ так, чтобы он не принадлежал одному классу с $x_1$ и $x_2$ только для одного отношения эквивалентности. Продолжая этот процесс мы перенумеруем все элементы множества $X$ и получим последовательность $x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots$ . Аналогично перенумеровываем элементы множества $X$ с помощью $\xi$-системы $E_2^C$, получим последовательность $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots$. Теперь в силу выбора элементов $x_i,\ y_i,\ i \in \mathbb{N}$ легко видеть, что подстановка

$$\pi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ y_1 & y_2 & y_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

и будет искомой. □

При фиксированном $\xi \in \Sigma$ отношение равнотипности является эквивалентностью на множестве всех $\xi$-систем. Из предложения 1 сразу получаем

**Следствие 1.** *Группа $S\,(X)$ действует точно и транзитивно на множестве классов равнотипности всех $\xi$-систем.*

**Следствие 2.** *Для произвольных $\xi$-систем $E_1$ и $E_2$ на счетном множестве $X$ подгруппы $\overline{S}\,(E_1)$, $\overline{S}\,(E_2)$ сопряжены в группе $S\,(X)$.*

*Доказательство.* Выделим в $E_1$ равнотипную с ней $\xi$-систему $E_1^C$. По предложению 1 существует подстановка $\pi \in S\,(X)$ такая, что $\xi$-системы $(E_1^C)^\pi$ и $E_2$ равнотипны. Так как $\pi^{-1}\overline{S}\left(E_1^C\right)\pi = \overline{S}\left(\left(E_1^C\right)^\pi\right)$, то подгруппы $\overline{S}\,(E_1)$, $\overline{S}\,(E_2)$ сопряжены в $S\,(X)$. □

Таким образом, с точностью до изоморфизма определение группы $\overline{S}\,(E)$ не зависит от выбора $\xi$-системы $E$ на счетном множестве $X$, т.е. можно обозначать эту (абстрактную) группу символом $\overline{S}\,(\xi)$.

**Теорема 1.** *Пусть $A$, $B$ транзитивные подгруппы симметрической группы $S\,(X)$ на счетном множестве $X$. Если $A,\ B \cong \overline{S}\,(\xi)$ при некотором $\xi \in \Sigma$, то они сопряжены в группе $S\,(X)$.*

*Доказательство.* Так как группа $A$ транзитивна на $X$ и изоморфна группе $\overline{S}\,(\xi)$, то каждая подстановка $\pi \in A$ однозначно задает некоторое отношение эквивалентности на $X$. А все подстановки из $A$, как легко видеть, задают некоторую $\xi$-систему $E_1$, причем $A$ совпадает с $\overline{S}\,(E_1)$. Аналогично группа $B$ также задает некоторую $\xi$-систему $E_2$ и совпадает с $\overline{S}\,(E_2)$. Согласно следствию 1 подгруппы $A$ и $B$ сопряжены в $S\,(X)$. □

**1.3**. Естественный способ построения групп $\overline{S}\,(\xi)$, $\xi \in \Sigma$, может быть предложен, если отождествить счетное множество $X$ с натуральным рядом. Это осуществляется следующим образом (см. [7]).

Подстановку $\pi \in S\,(\mathbb{N})$ назовем периодически задаваемой с периодом длины $n$, если ее можно записать в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc|c} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n & \ldots \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n & n+i_1 & n+i_2 & \ldots & n+i_n & 2n+i_1 & 2n+i_2 & \ldots & 2n+i_n & \ldots \end{array}\right), \qquad (1)$$

где $i_1,\, i_2,\, \ldots\, ,\, i_n \in \{1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n\}$. Каждая подстановка имеет бесконечно много различных периодов, длины которых делятся на длину ее минимального периода.

Обратная к периодически задаваемой подстановке будет периодически задаваемой с тем же периодом, а произведение таких подстановок с периодами длины $m$ и $n$—

периодически задаваемая подстановка с периодом длины $HOK\,(m,\,n)$. Следовательно, все периодически задаваемые подстановки образуют подгруппу в $S\,(\mathbb{N})$, которую обозначим $PS\,(\mathbb{N})$. При любом $\xi \in \Sigma$ группа $PS\,(\mathbb{N})$ содержит подгруппу $PS_\xi\,(\mathbb{N})$, состоящую из подстановок вида (1), длины периодов которых являются делителями супернатурального числа $\xi$.

Группы $PS_\xi\,(\mathbb{N})$ введены в рассмотрение в работах [3, 4], как индуктивные пределы прямых спектров симметрических групп со строго диагональными вложениями.

Напомним, что вложение $d$ транзитивной группы подстановок $(G, X)$ в группу подстановок $(H, Y)$ называется диагональным [2], если орбиты группы $(G, X)$ на $Y$ или тривиальны (т.е. одноточечные) или равномощны $X$. Диагональное вложение строго диагонально, если длина каждой орбиты группы $d\,(G)$ на множестве $Y$ имеет мощность $|X|$. Строго диагональным будет вложение симметрической группы $S_n$ в симметрическую группу $S_{nr}$, задаваемое равенством

$$(kn+1)^{d^r\pi} = kn + i^\pi \;\; (0 \leqslant k \leqslant r-1,\; 1 \leqslant i \leqslant n)\,.$$

Бесконечная последовательность подстановок $d^1\pi = \pi,\; d^2\pi,\; \ldots$ однозначно определяет подстановку $d\pi$ на множестве $\mathbb{N}$, которую назовем распространением $\pi$ на множество $\mathbb{N}$ и обозначим $d\pi$. Положим $S\,(n) = \{\, d\pi \,|\, \pi \in S_n \,\}$.

Каждая делимая последовательность $\langle\, n_1,\, n_2,\, \ldots \,\rangle$, $r_i = n_{i+1}/n_i$, определяет последовательность вложений

$$d^{r_i} : S_{n_i} \to S_{n_{i+1}}, (i \in \mathbb{N}).$$

Предельная группа прямого спектра $\{S_{n_i}, d^{r_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ называется $\xi$- однородно симметрической группой [4]. Она естественным образом отождествляется с подгруппой $S\,(\mathbb{N})$, которая является объединением возрастающей цепи подгрупп $S\,(n_i)$. Поэтому имеет место следующее утверждение.

**Лемма 6.** *Для любого супернатурального числа $\xi$ $\xi$-однородно симметрическая группа при ее естественной реализации на множестве $\mathbb{N}$ совпадает с $PS_\xi\,(\mathbb{N})$. Группы $PS_\xi\,(\mathbb{N})$ и $\overline{S}\,(\xi)$ изоморфны. В частности, группа всех периодически задаваемых подстановок изоморфна $\overline{S}\,(I)$.*

*Доказательство.* По построению $\xi$-однородно симметрической группы каждая ее подстановка может быть записана в виде (1), т.е. принадлежит группе $PS_\xi\,(\mathbb{N})$. А каждая подстановка $\pi \in PS_\xi\,(\mathbb{N})$ в свою очередь может быть однозначно получена описанным выше способом из некоторой подстановки, которая совпадает с начальной частью подстановки $\pi$, длина которой совпадает с длиной ее периода.

Каждая подстановка из $PS_\xi\,(\mathbb{N})$ определяет некоторую эквивалентность $e$ на множестве $\mathbb{N}$, мощности классов которой являются делителями $\xi$. Для каждой такой эквивалентности $e$ существует подстановка, которая определит некоторую эквивалентность $e'$, такую что $e' \geqslant e$, т.е. множество $E$ всех таких эквивалентностей будет направленным. Множество $E$ содержит цепь эквивалентностей, мощности которых образуют делимую последовательность с характеристикой $\xi$. Так как для каждого натурального $n \mid \xi$ множество $E$ содержит только $n!$ (конечное число) эквивалентностей с классами мощности $n$, то $E$ является $\xi$-системой. А поэтому группы $PS_\xi\,(\mathbb{N})$ и $\overline{S}\,(\xi)$ изоморфны. Если $\xi = I$, то группа всех периодически задаваемых подстановок $PS\,(\mathbb{N})$ изоморфна $\overline{S}\,(I)$. $\square$

Нужные нам свойства групп $\overline{S}\,(\xi)$ сформулируем в следующем утверждении

**Лемма 7.** [4]

1) *Однородно симметрические группы $\overline{S}\,(\xi_1)$ и $\overline{S}\,(\xi_2)$ изоморфны в том и только в том случае, когда $\xi_1 = \xi_2$.*
2) *$\overline{S}\,(\xi)$ будет простой группой тогда и только тогда, когда $2^\infty \mid \xi$. В ином случае, она имеет единственный нормальный делитель индекса 2, который является объединением знакопеременных подгрупп $\overline{A}\,(n_i)$ в группах $\overline{S}\,(n_i)$, $i \in \mathbb{N}$.*

Таким образом, однородно симметрические группы естественно параметризируются супернатуральными числами. Отношению делимости супернатуральных чисел соответствует включение таких подгрупп. Поэтому семейство подгрупп $\overline{S}\,(\xi)$, $\xi \in \Sigma$, группы $S\,(\mathbb{N})$ образует полную решетку по включению, которая изоморфна решетке $(\,\Sigma,\ \vee,\ \wedge\,)$.

## §2. Почти однородно симметрические группы.

**2.1**. Символом $FS\,(X)$ обозначим финитарную симметрическую группу на счетном множестве $X$. Пусть $E$ некоторая $\xi$-система $X$.

**Определение 3.** Почти однородно симметрической группой $KS\,(E)$ называем группу, порожденную группами $FS\,(X)$ и $\overline{S}\,(E)$.

**Лемма 8.** *Группа $KS\,(E)$ разлагается в полупрямое произведение своих подгрупп $FS\,(X)$ и $\overline{S}\,(E)$:*

$$KS\,(E) = FS\,(X) \leftthreetimes\ \overline{S}\,(E)\,. \tag{2}$$

*Доказательство.* Так как [8] $FS\,(X) \triangleleft S\,(X)$, то $FS\,(X) \triangleleft KS\,(E)$. Каждая неединичная подстановка из $\overline{S}\,(E)$ передвигает бесконечное число элементов из $X$. Поэтому $FS\,(X) \cap \overline{S}\,(E) = \{\varepsilon\}$, где $\varepsilon$ — тождественная подстановка, т.е. имеет место равенство (2). □

Для почти однородно симметрических групп имеет место такой же критерий сопряженности, как и для однородно симметрических групп.

**Теорема 2.** *Группы $KS\,(E)$ и $KS\,(E')$ изоморфны тогда и только тогда, когда они сопряжены в $S\,(X)$, а это имеет место тогда и только тогда, когда $E$ и $E'$ являются $\xi$-системами для одного и того же супернатурального числа $\xi$.*

*Доказательство.* Пусть $E$ и $E'$ две $\xi$-системы для некоторого $\xi \in \Sigma$. По следствию 2 и лемме 8 группы $KS\,(E)$ и $KS\,(E')$ сопряжены в $S\,(X)$. Если $E$ и $E'$ отвечают разным супернатуральным числам, то эти группы не изоморфны, так как не изоморфны их подгруппы $\overline{S}\,(E)$ и $\overline{S}\,(E')$, а разложение в полупрямое произведение (2) однозначно. Если же $KS\,(E)$ и $KS\,(E')$ изоморфны, то $\overline{S}\,(E)$ и $\overline{S}\,(E')$ также изоморфны и в силу теоремы 1 сопряжены в $S\,(X)$ некоторой подстановкой $\pi$. Как легко видеть, $KS\,(E)$ и $KS\,(E')$ будут сопряжены этой же подстановкой $\pi$. □

Таким образом, с точностью до изоморфизма, группа $KS(E)$ не зависит от выбора $\xi$-системы $E$, поэтому можно обозначать ее символом $KS(\xi)$.

**2.2**. Теорема 2 показывает, что, как и в случае однородно симметрических групп, достаточно рассматривать конкретную конструкцию почти однородно симметрических групп на множестве натуральных чисел.

Подстановку $\pi$ называем почти периодически задаваемой с периодом длины $n$, если ее можно записать в виде

$$\left(\begin{array}{cccc||cccc|cccc|c} 1 & 2 & \dots & n & n{+}1 & n{+}2 & \dots & 2n & 2n{+}1 & 2n{+}2 & \dots & 3n & \dots \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n & j_{n+1} & j_{n+2} & \dots & j_{2n} & n{+}j_{n+1} & n{+}j_{n+2} & \dots & n{+}j_{2n} & \dots \end{array}\right), \tag{3}$$

где $j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j_{n+1}, j_{n+2}, \dots, j_{2n} \in \{n{+}1, n{+}2, \dots, 2n\}$. В последнем случае подстановку

$$\pi_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

называем предпериодом $\pi$, подстановку

$$\pi_0 = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n & \dots \\ j_{n+1} & j_{n+2} & \dots & j_{2n} & n+j_{n+1} & n+j_{n+2} & \dots & n+j_{2n} & \dots \end{array}\right)$$

— периодической частью $\pi$, а подстановку

$$\pi_p = \begin{pmatrix} n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ j_{n+1} & j_{n+2} & \dots & j_{2n} \end{pmatrix}$$

—основным периодом $\pi$. Подстановки вида (3) можно охарактеризовать как такие, для которых длина наименьшего периода периодической части является делителем длины предпериода. Если подстановка $\alpha$ действует на некотором подмножестве $Y \subset \mathbb{N}$, то символом $\widehat{\alpha}$ обозначим ее тривиальное продолжение на $\mathbb{N}$, т.е.

$$x^{\widehat{\alpha}} = \begin{cases} x^{\alpha}, & \text{если } x \in Y, \\ x, & \text{если } x \in \mathbb{N} \backslash Y. \end{cases}$$

Для любой почти периодически определенной подстановки $\pi$ имеют место равенства $\pi = \widehat{\pi}_f \cdot \widehat{\pi}_0 = \widehat{\pi}_0 \cdot \widehat{\pi}_f$.

Множество $KS(\mathbb{N})$ всех почти периодически задаваемых подстановок образует группу. Для любого $\xi \in \Sigma$ в ней выделяется подгруппа $KS_\xi(\mathbb{N})$ тех подстановок вида (3), длина предпериода (а следовательно и длина наименьшего периода периодической части) которых делит $\xi$.

**Лемма 9.** *Для любого $\xi \in \Sigma$ имеет место соотношение $KS(\xi) \cong KS_\xi(\mathbb{N})$. В частности, $KS(I) \cong KS(\mathbb{N})$.*

*Доказательство.* Аналогично доказательству леммы 6, множество всех подстановок из $KS_\xi(\mathbb{N})$ однозначно задает некоторую $\xi$-систему $E$ на $\mathbb{N}$, а построенная по ней группа $KS(E)$ совпадает с группой $KS_\xi(\mathbb{N})$. По теореме 2 имеем $KS_\xi(\mathbb{N}) \cong KS(\xi)$. Подставляя $\xi = I$ получаем $KS(I) \cong KS(\mathbb{N})$, что и требовалось. $\square$

**2.3**. Классы сопряженных элементов однородно симметрических групп описаны в [3, 4]. Классы сопряженных элементов групп $KS_\xi(\mathbb{N})$, $\xi \in \Sigma$, характеризуются следующим образом.

Напомним, что циклическим типом подстановки $\pi \in S_n$ называется вектор $t(\pi) = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, где $k_i$ — количество циклов длинны $i$ в разложении $\pi$ в произведение циклов. Вектор $st(\pi) = (k_1, k_2, \ldots, k_s)$, где $s$ наибольший номер, для которого $k_s \neq 0$, называется ее сокращенным цикловым типом.

**Определение 4.** Финитарным типом подстановки $\pi \in KS_\xi(\mathbb{N})$ назовем сокращенный цикловой тип ее предпериода $\pi_f$, а периодическим типом — сокращенный цикловой тип ее основного периода $\pi_p$.

Пусть длины основных периодов подстановок $\alpha, \beta \in KS_\xi(\mathbb{N})$ равны $m$ и $n$, соответственно, и пусть при этом, для определенности, $m \geqslant n$.

**Определение 5.** Периодические типы подстановок $\alpha, \beta \in KS_\xi(\mathbb{N})$ назовем пропорциональными, если $m/n = k$ — натуральное число и $st(\alpha_p) = k \cdot st(\beta_p)$.

**Лемма 10.** *Периодические типы сопряженных подстановок в $KS_\xi(\mathbb{N})$ являются пропорциональными.*

*Доказательство.* Пусть $\alpha, \beta \in KS_\xi(\mathbb{N})$, длины их основных периодов равняются $n$ и $m$ соответственно и, для определенности, $n \geqslant m$. Если $\alpha$ и $\beta$ сопряжены в $KS_\xi(\mathbb{N})$, то существует подстановка $\pi \in KS_\xi(\mathbb{N})$, такая что $\alpha = \pi^{-1}\beta\,\pi$. Пусть $k$ — длина основного периода подстановки $\pi$. Тогда число $l = HOK\,(n, m, k)$ будет длиной некоторого общего периода всех трех подстановок. Поскольку $\alpha = \pi^{-1}\beta\,\pi$, то основные периоды подстановок $\alpha$ и $\pi^{-1}\beta\,\pi$ совпадают. А, поэтому,

$$st\left(\alpha_p^l\right) = n_1\, st\left(\alpha_p^n\right) = st\left((\pi^{-1}\beta\,\pi)_p^l\right) = st\left(\beta_p^l\right) = m_1\, st\left(\beta_p^m\right),$$

где индекс сверху обозначает длину периода. Из этого равенства следует, что или $n_1 \mid m_1$ или координаты вектора $st\left(\beta_p^m\right)$ делятся нацело на $n_1$. Поэтому периодические типы сопряженных подстановок в $KS_\xi(\mathbb{N})$ пропорциональны. □

**Определение 6.** Финитарные типы подстановок $\alpha, \beta \in KS_\xi(\mathbb{N})$ называем линейно связанными, если периодические типы этих подстановок пропорциональны, а финитарные — можно представить в виде

$$st(\alpha_f) = st(\beta_f) + (k-1)\ st(\beta_p) \quad \text{или} \quad st(\beta_f) = st(\alpha_f) + (k-1)\ st(\alpha_p).$$

**Определение 7.** Типом подстановки $\pi \in KS_\xi(\mathbb{N})$ называем пару

$$\tau(\pi) = \langle st(\pi_f),\ st(\pi_p)\rangle,$$

где $st(\pi_f)$ — ее финитарный тип, а $st(\pi_p)$ — ее периодический тип. Типы $\tau_1$ и $\tau_2$ назовем эквивалентными, если их первые компоненты являются линейно связанными, а вторые — пропорциональными.

**Теорема 3.** *Подстановки $\alpha, \beta \in KS_\xi(\mathbb{N})$ будут сопряженными в этой группе, тогда и только тогда, когда их типы $\tau(\alpha)$, $\tau(\beta)$ эквивалентны.*

*Доказательство.* Пусть $\alpha,\ \beta \in KS_\xi(\mathbb{N})$ и длина основного периода $\alpha$ равняется $n$, а длина основного периода $\beta$ равняется $m$. Предположим, что подстановки $\alpha$ и $\beta$ сопряженные в $KS_\xi(\mathbb{N})$. Тогда в ней существует подстановка $\pi$ с основным периодом длины $k$, такая что $\alpha = \pi^{-1}\beta\,\pi$. Общим периодом этих подстановок можно взять $l = HOK\,(n,\ m,\ k)$. Так как $\alpha = \pi^{-1}\beta\,\pi$, то финитарные части подстановок $\alpha$ и $\pi^{-1}\beta\,\pi$ совпадают. Поэтому,

$$st\left(\alpha_f^l\right) = st\left(\left(\pi^{-1}\beta\,\pi\right)_f^l\right).$$

Поскольку имеют место равенства

$$st\left(\left(\pi^{-1}\beta\,\pi\right)_f^l\right) = st\left(\beta_f^l\right) = st\left(\beta_f^m\right) + \left(\frac{l}{m} - 1\right) st\left(\beta_f^l\right),$$

$$st\left(\alpha_f^l\right) = st\left(\alpha_f^n\right) + st\left(\alpha_p^n\right),$$

то получаем, что

$$st\left(\beta_f^m\right) = st\left(\alpha_f^n\right) + r\,st\left(\alpha_p^n\right), \quad \text{где} \quad r = (\,\frac{m}{n} - 1) \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, финитарные типы подстановок $\alpha$ и $\beta$ являются линейно связанными. Далее по лемме 10 получаем, что типы подстановок $\alpha$ и $\beta$ эквивалентные.

Наоборот, предположим, что типы подстановок $\alpha$ и $\beta$ являются эквивалентными, т.е.

$$st\left(\beta_f^m\right) = st\left(\alpha_f^n\right) + r\,st\left(\alpha_p^n\right), \quad \text{где} \quad r = (\,\frac{m}{n} - 1) \in \mathbb{N},$$

а периодические типы $(r+1)$-пропорциональны. Тогда существует такое $l \in \mathbb{N}$, что подстановки $\alpha$ и $\beta$ будут иметь вид (3) с периодом длины $l = (r+1)\,n$, если $m \geqslant n$. Отсюда, легко видеть, что найдется подстановка $\pi \in KS_\xi(\mathbb{N})$, такая что

$$\left(\pi_f^l\right)^{-1} \alpha_f^l\,\pi_f^l = \beta_f^l,\ \ \left(\pi_p^l\right)^{-1} \alpha_p^l\,\pi_p^l = \beta_p^l,$$

а это значит, что подстановки сопряжены. □

**Следствие 3.** *Подстановки $\alpha,\ \beta \in PS_\xi(\mathbb{N})$ будут сопряженными в $PS_\xi(\mathbb{N})$ тогда и только тогда, когда они сопряженные в $KS_\xi(\mathbb{N})$, т.е. каждый класс сопряженных элементов в $PS_\xi(\mathbb{N})$ является пересечением класса сопряженных элементов в $KS_\xi(\mathbb{N})$ с подгруппой $PS_\xi(\mathbb{N})$.*

*Доказательство.* Если подстановки $\alpha,\ \beta \in PS_\xi(\mathbb{N})$ сопряженные в $PS_\xi(\mathbb{N})$, то они, очевидно, сопряжены в группе $KS_\xi(\mathbb{N})$.

Наоборот, предположим, что $\alpha,\ \beta \in PS_\xi(\mathbb{N})$ и $\alpha,\ \beta$ сопряженные в группе $KS_\xi(\mathbb{N})$. Тогда их периодические части $k$-пропорциональны, а финитарные типы совпадают с периодическими типами. Следовательно, их линейная связанность эквивалентна $k$-пропорциональности. Отсюда получаем, что они сопряжены в $PS_\xi(\mathbb{N})$. □

**2.4.** Если $2^\infty \nmid \xi$, то символом $PA_\xi(\mathbb{N})$ обозначаем подгруппу индекса 2 в $PS_\xi(\mathbb{N})$.

**Теорема 4.** *Для любого супернатурального числа $\xi$ такого, что $2^\infty \mid \xi$ нормальные делители группы $KS_\xi(\mathbb{N})$ исчерпываются подгруппами следующего нормального ряда*

$$\{e\} \triangleleft FA(\mathbb{N}) \triangleleft FS(\mathbb{N}) \triangleleft KS_\xi(\mathbb{N}), \qquad (4)$$

*где $FA(\mathbb{N})$ — финитарная знакопеременная подгруппа в $FS(\mathbb{N})$. Если же $2^\infty \nmid \xi$ , то нормальные подгруппы $KS_\xi(\mathbb{N})$ образуют следующую решетку (Рис. 1).*

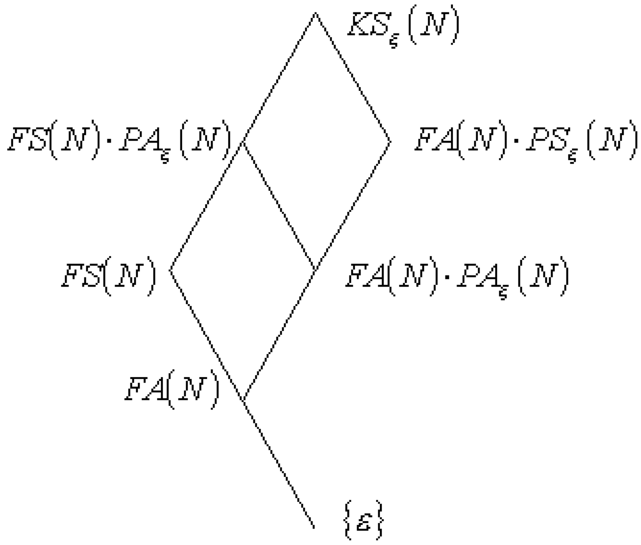


Рис. 1.

*Доказательство.* 1) Пусть $2^\infty \mid \xi$. Так как $FS(\mathbb{N}) \triangleleft S(\mathbb{N})$, то $FS(\mathbb{N}) \triangleleft KS_\xi(\mathbb{N})$. Группа $FS(\mathbb{N})$ содержит только один нетривиальный нормальный делитель — подгруппу четных подстановок $FA(\mathbb{N})$ [8]. Она нормальна в $S(\mathbb{N})$, а следовательно и в $KS_\xi(\mathbb{N})$. Фактор группа $KS_\xi(\mathbb{N})/FS(\mathbb{N})$ изоморфна $PS_\xi(\mathbb{N})$ и является простой, так как $2^\infty \mid \xi$. Следовательно, нормальный ряд (4) содержит все нормальные делители группы $KS_\xi(\mathbb{N})$.

2) Пусть $2^\infty \nmid \xi$. В этом случае $PS_\xi(\mathbb{N})$ содержит единственный нетривиальный нормальный делитель — подгруппу $PA_\xi(\mathbb{N})$. Поскольку $KS_\xi(\mathbb{N}) = FS(\mathbb{N}) \leftthreetimes PS_\xi(\mathbb{N})$, то нормальными делителями в $KS_\xi(\mathbb{N})$ будут лишь следующие произведения нормальных делителей в $FS(\mathbb{N})$ и $PS_\xi(\mathbb{N})$: $KS_\xi(\mathbb{N})$, $FS(\mathbb{N})\cdot PA_\xi(\mathbb{N})$, $FA(\mathbb{N})\cdot PS_\xi(\mathbb{N})$, $FA(\mathbb{N})\cdot PA_\xi(\mathbb{N})$, $FS(\mathbb{N})$, $FA(\mathbb{N})$, $\{\varepsilon\}$. Включения между этими нормальными делителями даются, очевидно, диаграммой Рис. 1. Теорема доказана. □

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М.*Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечных групп.* // Докл. АН СССР. – 1974. –Т. 218, № 4. – С. 749 – 752.

2. Залесский А.Е. *Групповые кольца индуктивных пределов знакопеременных групп* // Алгебра и анализ. –1990. – Т.2, №6 –С.132–149.

3. Крошко Н.В., Сущанський В.I.*Однорiдно симетричнi групи* // Доп. НАН України. – 1993. – №12. – С. 9–13.

4. Kroshko N.V., Sushchansky V.I. *Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings* // Archiv der Mathematik. – 1998. –V.71. – P.173–182.

5. Gschwend T., Kegel O. H. *On the group of weak automorphisms of a family of equivalence relations* // Algebra and operator theory.– 1997.– P.237–248.

6. Brawley J. V., Schnibben G. E.*Infinite algebraic extensions of finite fields.*– Contemporary mathematics, Vol. 95.– Providence, Rhode Island:–Amer. Math. Soc. – 1992.– 104 p.

7. Назарчук В.В., Сущанський В.І. *Групи періодично визначених підстановок.* // Доп. НАН України. – 2003. – №3.– С.26–30.

8. Bhattacharjee M., Macpherson D., Möller R.G., Neumann P. Notes on Infinite Permutation Groups. – New Delhi: Hindustan Book Agency.– 1997. – 202 p.

Национальный университет им. Т. Шевченко, Киев, Украина
Силезский технический университет, Гливице, Польша

*Поступило 21.10.2002*