УДК 512.4

О. Л. Горбачук, Ю. П. Матурін

ІДЕАЛЬНІ І НАПІВПРОСТІ СКРУТИ ТА ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ КІЛЕЦЬ

O. L. Horbachuk, Yu. P. Maturin. *Ideal and semisimple torsions and characterization of rings*, Matematychni Studii, **18** (2002) 208–210.

It is proved that every semisimple torsion is ideal in R-Mod if and only if R is semilocal.

О. Л. Горбачук, Ю. П. Матурин. *Идеальные и полупростые кручения и характеризация колец* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.208–210.

Доказано, что каждое полупростое кручение является идеальным тогда и только тогда, когда кольцо полулокально.

Нехай R — кільце. Метою даної роботи є встановлення відповіді на наступне питання: за яких умов на кільце R кожний напівпростий скрут ідеальний?

Позначення, що будуть використовуватися, можна знайти у праці [1].

Для скорочення записів l-радикальним (r-радикальним) фільтром кільця R називатимемо радикальний фільтр лівих (правих) ідеалів кільця R.

Нагадаємо поняття ідеального скруту (див. [2], с.59, 4°).

Нехай I — ідеал в кільці R. Позначимо через $\mathcal{E}(I)$ найменший l-радикальний фільтр кільця R серед l-радикальних фільтрів, що містять ідеал I. Зауважимо, що такий l- радикальний фільтр існує і визначається рівністю

$$\mathcal{E}(I) = \bigcap\{\mathcal{E} \mid \mathcal{E}\text{— } l\text{-радикальний фільтр кільця } R,\ I \in \mathcal{E}\}$$

(див. [3], с. 87, лема 5).

Нехай λ_I — скрут в R-Mod, що відповідає $\mathcal{E}(I)$. Називатимемо скрут r в категорії R-Mod ідеальним, якщо існує ідеал I кільця R, для якого $r = \lambda_I$ (див. [2], с.59, 4°).

Лема 1. *Нехай R — кільце, I — ідеал в R, а λ_I — відповідний ідеальний скрут в категорії R-Mod. Для довільного простого лівого R-модуля M $IM = 0$ тоді і тільки тоді, коли $M \in T(\lambda_I)$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{E}$ — l-радикальний фільтр кільця R, що відповідає ідеальному скрутові λ_I, а M — простий лівий R-модуль. Якщо $IM = 0$, то $\lambda_I(M) = M$, оскільки $I \in \mathcal{E}$.

Навпаки. Нехай $M \in T(\lambda_I)$. Припустимо, що $IM \neq 0$. Розглянемо довільний ненульовий елемент m в модулі M. Тоді з простоти R-модуля M випливає, що $M =$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16D90.

Rm. Отже, $\mathrm{Im} = (IR)m = I(Rm) = IM \neq 0$. Тоді $M \in F(\lambda_I)$ (див. [2], с.59–60, пропозиція 9.6.3). Звідси, $M \in F(\lambda_I) \cap T(\lambda_I) = \{0\}$, тобто $M = 0$. Суперечність. Отже, $IM = 0$. □

Зауваження 1. Нехай I — ідеал кільця R, а r — напередскрут в R-Mod, що відповідає l-напередрадикальному фільтрові $\mathcal{E} = \{D \mid D$ — лівий ідеал в R, $D \supseteq I\}$. Легко бачити, що $\lambda_I = \bar{r}$.

З'ясуємо тепер, для яких кілець R кожен напівпростий скрут в R-Mod є ідеальним скрутом.

Теорема 1. *Нехай R — кільце. Кожен напівпростий скрут в категорії R-Mod є ідеальним тоді і тільки тоді, коли R — напівлокальне кільце.*

Доведення. Нехай кожен напівпростий скрут в категорії R-Mod є ідеальним. Розглянемо довільну підмножину Ω_1 множини Ω_l, тоді існує такий ідеал I кільця R, що $\overline{S\Omega_1} = \lambda_I$. Нехай $\mathcal{E}_1$ — l-радикальний фільтр кільця R, що відповідає скрутові $\overline{S\Omega_1}$. В силу леми 1 матимемо, що $I \subseteq J_l(\Omega_1)$. Тоді з $I \in \mathcal{E}_1$ випливає, що $J_l(\Omega_1) \in \mathcal{E}_1$.

Нехай $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ — довільна множина простих R-модулів з $T(\overline{S\Omega_1})$. Зрозуміло, що тоді для всякого $\alpha \in A$ $J_l(\Omega_1)M_\alpha = 0$. Тому і $J_l(\Omega_1)\prod_A M_\alpha = 0$. Але ж $J_l(\Omega_1) \in \mathcal{E}_1$, тоді $\prod_A M_\alpha \in T(\overline{S\Omega_1})$. Отже, за теоремою 1 праці [1] R — напівлокальне кільце.

Навпаки. Нехай R — напівлокальне кільце, Ω_1 — довільна підмножина в Ω_l, а $\mathcal{E}_1$ — l-радикальний фільтр в R, що відповідає скрутові $\overline{S\Omega_1}$. Покажемо, що $\overline{S\Omega_1} = \lambda_{J_l(\Omega_1)}$. Справді, за теоремою 1 праці [1] $J_l(\Omega_1) \in \mathcal{E}_1$. Отже, з означення l-радикального фільтру $\mathcal{E}\big(J_l(\Omega_1)\big)$ матимемо, що $\mathcal{E}(\lambda_{J_l(\Omega_1)}) \subseteq \mathcal{E}_1$. З іншого боку, очевидно, що $T(S\Omega_1) \subseteq T(\lambda_{J_l(\Omega_1)})$. Тоді $S\Omega_1 \leq \lambda_{J_l(\Omega_1)}$. Використавши означення напередрадикалу $\bar{r}$, бачимо, що $\overline{S\Omega_1} \leq \lambda_{J_l(\Omega_1)}$, оскільки $\lambda_{J_l(\Omega_1)}$ є радикалом в категорії R-Mod. Отже, $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}\big(J_l(\Omega_1)\big)$. Тоді $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\big(J_l(\Omega_1)\big)$. Це означає, що $\overline{S\Omega_1} = \lambda_{J_l(\Omega_1)}$.

Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Нехай R — кільце. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(1) *кожен напівпростий скрут в категорії R-Mod є ідеальним;*

(2) *кожен напівпростий скрут в категорії Mod-R є ідеальним;*

(3) *R — напівлокальне кільце.*

Наслідок 2. *Нехай R — кільце. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(1) *R — напівартінове зліва кільце і кожен скрут в категорії R-Mod є ідеальним;*

(2) *кожен скрут в категорії R-Mod є напівпростим та ідеальним;*

(3) *множина всіх напівпростих скрутів в R-Mod збігається з множиною всіх ідеальних скрутів в R-Mod;*

(4) *R — досконале справа кільце.*

Доведення. Враховуючи теорему 1 і те, що:
R — напівартінове зліва кільце $\Longleftrightarrow$ всі скрути в R-Mod є напівпростими $\Longleftrightarrow$ $\overline{S\Omega_l}$ є тривіальним скрутом в R-Mod;
R — досконале справа кільце $\Longleftrightarrow$ R — напівлокальне напівартінове зліва кільце $\Longleftrightarrow$ R — напівартінове зліва кільце і кожен скрут в категорії R-Mod є джансовим скрутом (див. [4], розділ VIII).

Наслідок доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Maturin Yu. *On semisimple torsion* // Вісник Київського університету. Серія фізико-математична. – 2000. – №1. – С.42–46.
2. Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. – Кишинёв: Штиинца, 1983. – 156 с.
3. Горбачук Е. Л. *Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы* // Матем. исследования. – 1972. – Т.7, №2. – С.81-90.
4. Stenström Bo. Rings of quotients. – Berlin: Springer-Verlag, 1975. – 309 p.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 27.09.01