УДК 517.9

В. А. Болілий

НЕСТАБІЛЬНА ТОЧКА ЗВОРОТУ В ДИФЕРЕНЦІЙНОМУ РІВНЯННІ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

V. A. Bolilyi. *Unstable turning point in the differential equation of the third order*, Matematychni Studii, **18** (2002) 157–168.

We obtain a uniform asymptotic for a solution of the singular pertubents differential equation of the third order in the case of unstable pseudo-differential turning point.

В. А. Болилый. *Нестабильная точка возврата в дифференциальном уравнении третьего порядка* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.157–168.

Получена равномерная асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения третьего порядка в случае нестабильной псевдодифференциальной точки возврата.

Постановка задачі. Розглянемо рівняння

$$\mathbf{L}_\varepsilon U(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^5 U'''(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 a(x) U''(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 b(x) U'(x,\varepsilon) + c(x) U(x,\varepsilon) = h(x), \qquad (1)$$

коли $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0; l]$. Вважатимемо, що

$$a(x), \quad b(x), \quad c(x) = x\tilde{c}(x), \quad h(x) \in C^\infty[I]. \qquad (2)$$

Метою цієї статті є побудова рівномірно придатної асимптотики розв'язку рівняння (1) у випадку, коли сингулярно збурене диференційне рівняння (СЗДР) (1) містить точку звороту $x = 0$.

Для диференційних рівнянь Ліувілля і Орра-Зоммерфельда подібні задачі розглянуті в [1], [2], проте ці рівняння містять тільки парні похідні. Наявність у СЗДР з точками звороту похідних як парного, так і непарного порядків значно ускладнює побудову рівномірно придатних асимптотик. Однією з робіт у цьому напрямку є стаття Р. Лангера [3], у якій досліджуються рівняння

$$\omega'''(z,\lambda) + \lambda h_1(z,\lambda)\omega''(z,\lambda) + \lambda^2 h_2(z,\lambda)\omega'(z,\lambda) + \lambda^3 h_3(z,\lambda) = 0$$

при $|\lambda| \to +\infty$. Для побудови асимптотики розв'язку цього рівняння Р. Лангер, використовуючи один стабільний корінь характеристичного рівняння, проводить пониження порядку досліджуваного рівняння, далі розглядається рівняння другого порядку, за розробленою раніше методикою (див. [4]).

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34E15, 34E20, 47E05.

Подібну ідею пониження степеня диференційного рівняння використано (див. [5]) при дослідженні диференційного рівняння

$$\varepsilon^3 U'''(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 a(x) U''(x,\varepsilon) + \varepsilon b(x) U'(x,\varepsilon) + c(x) U(x,\varepsilon) = h(x).$$

Проте такий підхід не є перспективним стосовно узагальнення результатів на системи СЗДР.

Вагомі результати дослідження СЗДР і систем СЗДР загального вигляду з точками звороту отримані В. Вазовим [6]. Основна ідея цих досліджень полягає в розщепленні системи СЗДР і дослідженні системи другого порядку, для якої спектр граничного оператора містить два нестабільні елементи вигляду $k_{1,2} = \pm i\sqrt{x\tilde{k}(x)}$.

У даній статті переконуємось, що метод, розроблений для рівнянь Ліувілля, Орра-Зоммерфельда (див. [1]-[2]) можна узагальнити на загальний випадок СЗДР з точками звороту, а згодом й на системи СЗДР.

Надалі припустимо, що спектр характеристичного рівняння для рівняння (1) містить один стабільний елемент. Асимптотику розв'язку СЗДР (1) шукаємо, використовуючи апарат функцій Ейрі.

1. Характеристичне рівняння. При дослідженні рівнянь типу (1) написання характеристичного рівняння, що відповідає даному диференціальному рівнянню, не є очевидною задачею, як це було для рівнянь Ліувілля й Орра-Зоммерфельда.

Звернемо увагу на той факт, що степені малого параметру в рівнянні (1) обрані так, щоб асимптотика розв'язку цього рівняння будувалася за цілими степенями малого параметру $\varepsilon > 0$.

Існує два способи відшукання (написання) характеристичного рівняння. Перший спосіб — перейти до системи СЗДР, записати характеристичне рівняння, що відповідає цій системі диференційних рівнянь. Другий — використовуючи теорему Шлезінгера-Біркгофа одержати характеристичне рівняння, що відповідає скалярному рівнянню (1). У статті ми використовуватимемо другий (скалярний) метод.

Нехай один з коренів характеристичного рівняння знакосталий, а саме $k_1(x) > 0$ для всіх $x \in I$. Тоді, використовуючи теорему Шлезінгера-Біркгофа, одержуємо характеристичне рівняння

$$P(k(x,\varepsilon)) \equiv \varepsilon^2 k^3(x,\varepsilon) + \varepsilon a(x) k^2(x,\varepsilon) + \varepsilon b(x) k(x,\varepsilon) + c(x) = 0. \tag{3}$$

У характеристичному рівнянні (3) ми не можемо відкинути деякі доданки малого порядку і перейти до додаткового характеристичного рівняння, як це робилося раніше.

З огляду на (2) і умови $k_1(x) > 0$, знайдемо повний спектр граничного оператора

$$k_1(x) < 0, \qquad k_{2,3}(x,\varepsilon) = \pm\sqrt{\frac{x\tilde{k}(x)}{\varepsilon}}, \qquad \tilde{k}(x) > 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in I. \tag{4}$$

У цьому випадку вироджене рівняння, що відповідає СЗДР (1), тобто рівняння

$$c(x)\omega(x) = h(x) \tag{5}$$

в загальному випадку, має розрив другого роду в точці $x = 0$.

В досліджуваному рівнянні, за виконання умов (4), маємо $c(0) = b(0) = 0$, тому точка $x = 0$ не є *алгебраїчною* у класичному розумінні, однак вона не є і *диференціальною* точкою звороту. Тому,у розглянутому випадку, точку звороту $x = 0$ будемо називати *псевдодиференціальною.*

За умов (4) характеристичне рівняння (3) набуває вигляду

$$\left[k^2(x,\varepsilon) - \frac{x\tilde{k}(x)}{\varepsilon}\right] \cdot \left[\varepsilon k(x,\varepsilon) + k_1(x)\right] = 0. \qquad (6)$$

Рівняння (6) містить один простий корінь, а вираз у перших квадратних дужках, відповідає точці звороту.

Виходячи з вигляду рівняння (6) і відповідно до існуючої теорії рівнянь із точками звороту [1]–[10], можна допустити, що для побудови асимптотики розв'язку рівняння (1) можна скористатись апаратом функцій Ейрі.

Рівняння (6) називатимемо *характеристичним* для рівняння (1).

2. Розширення збуреної задачі. За аналогією з [1]–[5], [10], для виділення і збереження всіх істотно особливих функцій (ІОФ), що містяться в розв'язкові СЗДР (1), введемо додаткову векторну змінну $t = \{t_1, t_2\}$ за правилом

$$t_1 = \varepsilon^{-p_1}\varphi_1(x) \equiv \Phi_1(x,\varepsilon), \quad t_2 = \varepsilon^{-p_2}\varphi_2(x) \equiv \Phi_2(x,\varepsilon), \qquad (7)$$

де показники p_i і регуляризуючі функції $\varphi_i(x)$, $i \in \{1,2\}$ підлягають визначенню.

Ввівши додаткову змінну t, згідно методу регуляризації [10], ми замість функції $U(x,\varepsilon)$ досліджуватимемо розширену функцію $\tilde{U}(x,t,\varepsilon)$. Розширення проводимо так, щоб справджувалась тотожність $\tilde{U}(x,t,\varepsilon)|_{t=\Phi(x,\varepsilon)} \equiv U(x,\varepsilon)$, де $\Phi(x,\varepsilon) = \{\Phi_1(x,\varepsilon), \Phi_2(x,\varepsilon)\}$. Для визначення розширеної функції $\tilde{U}(x,t,\varepsilon)$ одержуємо розширене рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{U}(x,t,\varepsilon) \equiv \left[\sum_{i=1}^{3} \tilde{L}_{\varepsilon i}\right] \tilde{U}(x,t,\varepsilon) = h(x). \qquad (8)$$

Тут оператори $\tilde{L}_{\varepsilon i}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\varepsilon i} \ \equiv \ & \varepsilon^{5-3p_i}\varphi_i'^3(x)\frac{\partial^3}{\partial t_i^{\,3}} + \varepsilon^{5-2p_i}L_{0i}\frac{\partial^2}{\partial t_i^{\,2}} + \varepsilon^{5-p_i}L_{1i}\frac{\partial}{\partial i_i} + \varepsilon^{3-2p_i}a(x)\varphi_i'^2\frac{\partial^2}{\partial t_i^{\,2}} + \\ & + \varepsilon^{3-p_i}a(x)d_i\frac{\partial}{\partial t_i} + \varepsilon^{2-p_i}b(x)\varphi_i'(x)\frac{\partial}{\partial t_i}, \qquad \text{при} \quad i \in \{1;2\}, \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\tilde{L}_{\varepsilon 3} \equiv \varepsilon^5\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \varepsilon^3 a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon^2 b(x)\frac{\partial}{\partial x} + c(x), \qquad (10)$$

де

$$\begin{aligned} d_i \ & \equiv \ 2\varphi_i'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi_i''(x), \quad L_{0i} \equiv 3\varphi_i'^2(x)\frac{\partial}{\partial x} + 2\varphi_i'(x)\varphi_i''(x), \\ L_{1i} \ & \equiv \ 3\varphi_i'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varphi_i''(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi_i'''(x), \qquad i \in \{1;2\}. \end{aligned} \qquad (11)$$

3. Простори безрезонансних розв'язків.

Розглянемо множини (підпростори) функцій

$$Y_{r1} = \{\alpha_r(x)\exp t_1\}, \quad Y_{r2k} = \{V_{rk}(x)U_k(t_2) + Q_{rk}(x)U_k'(t_2)\}, \qquad (12)$$

$$Y_{r3} = \{f_r(x)\nu(t_2) + g_r(x)\nu'(t_2)\}, \qquad Y_{r4} = \{\omega_r(x)\},$$

де $\alpha_r(x)$, $V_{rk}(x)$, $Q_{rk}(x)$, $f_r(x)$, $g_r(x)$, $\omega_r(x) \in C^\infty[I]$, $U_k(t_2)$ — функції Ейрі-Лангера, тобто $U_1(t_2) = \mathrm{Ai}(t_2)$, $U_2(t_2) = \mathrm{Bi}(t_2)$, а $\nu(t_2)$ істотно особлива функція (ІОФ) вигляду

$$\nu(t_2) = \mathrm{Bi}(t_2)\int\limits_{+\infty}^{t_2} \mathrm{Ai}(\tau)d\tau - \mathrm{Ai}(t_2)\int\limits_{0}^{t_2} \mathrm{Bi}(\tau)d\tau. \tag{13}$$

З цих підпросторів складемо нові простори

$$Y_r = Y_{r1}\bigoplus_{k=1}^{2} Y_{r2k}\bigoplus Y_{r3}\bigoplus Y_{r4}. \tag{14}$$

Елемент $W_r(x,t) \in Y_r$ має вигляд

$$\begin{aligned} W_r(x,t) &= \alpha_r(x)\exp t_1 + \sum_{k=1}^{2}[V_{rk}(x)U_k(t_2) + Q_{rk}(x)U_k'(t_2)] + \\ &+ f_r(x)\nu(t_2) + g_r(x)\nu'(t_2) + \omega_r(x). \end{aligned} \tag{15}$$

Властивості ІОФ $\mathrm{Ai}(t)$, $\mathrm{Bi}(t)$ і $\nu(t)$ описані в [12] і [8].

4. Побудова ряду-розв'язку. За аналогією з [1]–[9], вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елемент простору Y_{r1}. Враховуючи (3), (7), (9)–(11), маємо

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon\alpha_r(x)\exp t_1 &\equiv (\tilde{L}_{\varepsilon 1} + \tilde{L}_{\varepsilon 3})\alpha_r(x)\exp t_1 \equiv \Big[\tilde{P}(\varphi_1'(x),\varepsilon) + \varepsilon^{5-2p_1}L_{01} + \\ &+ \varepsilon^{5-p_1}L_{11} + \varepsilon^{3-p_1}a(x)d_1 + \varepsilon^2 b(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon^3 a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon^5\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big]\alpha_r(x)\exp t_1, \end{aligned} \tag{16}$$

де

$$\tilde{P}(\varphi_1'(x),\varepsilon) \equiv \varepsilon^{5-3p_1}{\varphi_1'}^3(x) + \varepsilon^{3-2p_1}a(x){\varphi_1'}^2(x) + \varepsilon^{2-p_1}b(x)\varphi_1'(x) + c(x). \tag{17}$$

У рівності (17) виберемо регуляризуючу функцію $\varphi_1(x)$ і показник p_1 так, щоб $\tilde{P}(\varphi_1'(x),\varepsilon) \equiv P(k_1(x),\varepsilon)$. Для цього досить взяти $\varphi_1(x) = \int\limits_0^x k_1(x)dx$ і $p_1 = 1$. Тоді отримаємо (див. (4))

$$\tilde{P}(\varphi_1'(x),\varepsilon) \equiv P(k_1(x),\varepsilon) \equiv 0. \tag{18}$$

Тоді тотожність (16) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon\alpha_r(x)\exp t_1 &\equiv \Big\{P(k_1(x),\varepsilon) + \varepsilon^2\Big[a(x)d_1 + b(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big] + \varepsilon^3\Big[L_{01} + a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big] + \\ &+ \varepsilon^4 L_{11} + \varepsilon^5\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big\}\alpha_r(x)\exp t_1 \equiv R_{1\varepsilon}\alpha_r(x)\exp t_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Приступимо до дослідження рівняння $\Big[a(x)d + b(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big]\alpha_r(x) = F_r^\alpha(x)$, де $F_r^\alpha(x)$ — відома досить гладка функція. З огляду на позначення (11), маємо

$$\Big[a(x)d_1 + b(x)\frac{\partial}{\partial x}\Big]\alpha_r(x) \equiv \Big[-(2k_1^2(x) + x\tilde{k}(x))\frac{\partial}{\partial x} - k_1(x){k'}_1(x)\Big]\alpha_r(x) = F_r^\alpha(x). \tag{20}$$

Оскільки $2k_1^2(x) + x\tilde{k}(x) \neq 0$ для всіх $x \in I$, то існує досить гладкий загальний розв'язок цього рівняння, а саме

$$\alpha_r(x) = \exp\Big\{-\rho(x)\Big\}\left[C_{1r} + \int \frac{F_r^\alpha(x)}{2k_1^2(x) + x\tilde{k}(x)} \exp\Big\{\rho(x)\Big\} dx\right], \tag{21}$$

де C_{1r} – довільна стала, а $\rho(x) = \displaystyle\int \frac{k_1(x)k_1'(x)}{2k_1^2(x) + x\tilde{k}(x)} dx$.

Як бачимо з (21), диференційні рівняння (20) не містять особливостей при $x \in I$. Отже, можна стверджувати, що регуляризуюча функція $\varphi_1(x)$ і показник p_1 обрані правильно.

Переходимо до основного дослідження, тобто до визначення регуляризуючої функції $\varphi_2(x)$ і показника p_2. Для цього вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи з підпросторів Y_{r2k}, $k \in \{1,2\}$. При фіксованому $k \in \{1,2\}$ маємо

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon\Big[V_{rk}(x)U_k(t_2) + Q_{rk}(x)U_k'(t_2)\Big] \equiv (\tilde{L}_{\varepsilon 2} + \tilde{L}_{\varepsilon 3})\Big[V_{rk}(x)U_k(t_2) + Q_{rk}(x)U_k'(t_2)\Big] \equiv \\ \equiv A_{rk}(x,\varepsilon)U_k(t_2) + B_{rk}(x,\varepsilon)U_k'(t_2); \end{aligned} \tag{22}$$

тут

$$\begin{aligned} A_{rk}(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{5-5p_2}{\varphi_2'}^3(x)\varphi_2^2(x)Q_{rk}(x) + \varepsilon^{5-3p_2}\Big[{\varphi'}_2^3(x) + \varphi_2(x)L_{02}\Big]V_{rk}(x) + \\ +\varepsilon^{5-2p_2}\Big[L_{02} + \varphi_2(x)L_{12}\Big]Q_{rk}(x) + \varepsilon^{3-3p_2}a(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)V_{rk}(x) + \\ +\varepsilon^{3-2p_2}a(x)\Big[{\varphi_2'}^2(x) + \varphi_2(x)d_2\Big]Q_{rk}(x) + \varepsilon^{2-2p_2}b(x)\varphi_2'(x)\varphi_2(x)Q_{rk}(x) + \tilde{L}_{\varepsilon 3}V_{rk}(x), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} B_{rk}(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{5-4p_2}{\varphi_2'}^3(x)\varphi_2(x)V_{rk}(x) + \varepsilon^{5-3p_2}\Big[2{\varphi'}_2^3(x) + \varphi_2(x)L_{02}\Big]Q_{rk}(x) + \\ +\varepsilon^{5-p_2}L_{12}V_{rk}(x) + \varepsilon^{3-3p_2}a(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x)Q_{rk}(x) + \varepsilon^{3-p_2}a(x)d_2V_{rk}(x) + \\ +\varepsilon^{2-p_2}b(x)\varphi_2'(x)V_{rk}(x) + \tilde{L}_{\varepsilon 3}Q_{rk}(x). \end{aligned} \tag{24}$$

У тотожності (22) потрібно отримати подібне до того, що було отримано в (16). Першим кроком проведення такої аналогії є виділення головних доданків у (23) і (24) і перетворення їх у тотожні нулі.

Проведені дослідження показують, що головними доданками в (23) є

$$[\varepsilon^{5-5p_2}{\varphi_2'}^3(x)\varphi_2^2(x) + \varepsilon^{2-2p_2}b(x)\varphi_2'(x)\varphi_2(x)]Q_{rk}(x) + [\varepsilon^{3-3p_2}a(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x) + c(x)]V_{rk}(x) \equiv$$

$$\equiv [{\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x) - \varepsilon^{3p_2-3}x\tilde{k}(x)][\varepsilon^{5-5p_2}\varphi_2'(x)\varphi_2(x)Q_{rk}(x) + \varepsilon^{3-3p_2}a(x)V_{rk}(x)].$$

Для визначення показника p_2 і регуляризуючої функції $\varphi_2(x)$ прирівняємо до нуля вираз у перших квадратних дужках. Тоді визначимо показник $p_2 = 1$ і отримаємо наступну задачу стосовно регуляризуючої функції

$${\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x) = x\tilde{k}(x), \qquad \varphi_2(0) = 0. \tag{25}$$

Функція

$$\varphi_2(x) = \left(\frac{3}{2}\int\limits_0^x \sqrt{x\tilde{k}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}} \tag{26}$$

є розв'язком задачі (25)

Наведемо деякі властивості регуляризуючої функції.

1. Функція $\varphi_2(x)$ монотонно зростає на всьому відрізку $[0, l]$.
2. $\varphi_2(x) \geq 0$ для всіх $x \in I = [0, l]$, а отже і змінна $t \geq 0$. Це означає, що ІОФ $U_2(t_2) = \mathrm{Bi}(t_2) \to \infty$ при $t_2 \to \infty$. Тому точка звороту $x = 0$ є *нестабільною* точкою звороту. Нагадаємо, що у випадку стабільної точки звороту ІОФ $U_1(t_2)$ і $U_2(t_2)$ були обмеженими на нескінченності функціями.

Визначивши показник $p_2 = 1$ і в (26) регуляризуючу функцію $\varphi_2(x)$, рівність (23) перепишемо у вигляді

$$A_{rk}(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon a(x)[\varphi_2(x)d_2Q_{rk}(x) + {\varphi_2'}^2(x)Q_{rk}(x)] + \varepsilon^2[{\varphi_2'}^3(x)V_{rk}(x) + \varphi_2(x)L_{02}V_{rk}(x) +$$

$$+ b(x)V_{rk}'(x)] + \varepsilon^3[L_{02} + \varphi_2(x)L_{12}]Q_{rk}(x) + \varepsilon^3 a(x)V_{rk}''(x) + \varepsilon^5 V_{rk}'''(x).$$

Для визначення функції $Q_{rk}(x)$ отримуємо диференційні рівняння

$$DQ_{rk}(x) \equiv 2\varphi_2(x)\varphi_2'(x)Q_{rk}'(x) + [\varphi_2(x)\varphi_2''(x) + {\varphi_2'}^2(x)]Q_{rk}(x) = 0. \tag{27}$$

Точка $x = 0$ є регулярною особливою точкою для диференційних рівнянь (27). Тому існують досить гладкі частинні розв'язки рівнянь (27), що задовольняють умови $|Q_{rk}(0)| < \infty$.

З урахуванням визначених $p_2 = 1$ і регуляризуючої функції $\varphi_2(x)$, тотожність (24) запишемо у виді

$$B_{rk}(x) \equiv \varepsilon^2[a(x)d_2V_{rk}(x) + 2Q_{rk}(x) + \varphi_2(x)L_{02}Q_{rk}(x) + b(x)Q_{rk}'(x)] + \tag{28}$$

$$+ \varepsilon^3 a(x)Q_{rk}''(x) + \varepsilon^4 L_{12}V_{rk}(x) + \varepsilon^5 Q_{rk}'''(x).$$

Врахувавши (25), одержимо тотожність

$$c(x) + a(x){\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x) \equiv b(x) + {\varphi_2'}^2(x)\varphi_2(x) \equiv 0.$$

Функції $V_{rk}(x)$ визначаємо з диференційних рівнянь

$$d_2V_{rk}(x) = -\frac{1}{k_1(x)}F_{rk}^V\Big(x, Q_{rk}(x)\Big). \tag{29}$$

Коефіцієнт $2\varphi_2'(x)$ при похідній в рівнянні (29) не обертається в нуль у жодній точці відрізку $I = [0; l]$. Тому нами будуть визначені досить гладкі розв'язки неоднорідних диференційних рівнянь (29) вигляду

$$V_{rk}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_2'(x)}}\left[C_{r(k+1)} + \int\limits_0^x \frac{\sqrt{\varphi_2'(x)}}{k_1(x)} \cdot F_{rk}^V(x, Q_{rk}(x))dx\right], \qquad r \in \{1; 2\}, \tag{30}$$

де $C_{r(k+1)}$ — довільні сталі.

Висновки. 1. В результаті дії розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи підпростору Y_{r1} нами однозначно визначені показник $p_1 = 1$, регуляризуюча функція $\varphi_1(x)$ і одержані диференційні рівняння (21), за допомогою яких буде побудовано перший лінійно незалежний розв'язок СЗДР (1).
2. Діючи розширеним оператором $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи простору безрезонансних розв'язків Y_{r2k}, $k \in \{1;2\}$, ми: а) незалежно від індексу k визначили показник $p_2 = 1$ і регуляризуючу функцію $\varphi_2(x)$ (див. (26)), тобто однозначно визначили змінну t_2; б) в процесі побудови асимптотики розв'язку розширеного рівняння (8) функції $Q_{rk}(x)$ будуть однозначно визначені як частинні розв'язки диференційних рівнянь (27) за умов $|Q_{rk}(0)| < \infty$; в) функції $V_{rk}(x)$ будуть містити довільні сталі (див. (30)). Ця обставина дозволить нам побудувати ще два лінійно незалежні розв'язки СЗДР (1), що відповідають двом нестабільним елементам $k_{2,3}(x) = \pm\sqrt{x\tilde{k}(x)}$.

5. Формалізм побудови ряду розв'язку неоднорідного розширеного рівняння. Вище обгрунтовані основні етапи побудови лінійно незалежних розв'язків СЗДР (1). Побудова частинного розв'язку неоднорідного диференційного рівняння (1) не впливає на визначення регуляризуючих функцій $\varphi_i(x)$ і показників p_i. Тому в даному пункті відразу розглянемо формалізм побудови фундаментальної системи розв'язків (ФСР) однорідного і частинного розв'язку неоднорідного розширеного рівняння (8). За аналогією з попереднім, досліджуємо дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елемент підпростору Y_{r3}. Об'єднавши результати отримані в попередніх пунктах, дію розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елемент ПБР (14) можна записати у вигляді тотожності

$$\tilde{L}_\varepsilon W_r(x,t) \equiv \tilde{L}_\varepsilon \Big[\alpha_r(x)\exp t_1 + y_r(x,t_2)\Big] \equiv R_{1\varepsilon}\alpha_r(x)\exp t_1 + R_\varepsilon y_r(x,t_2). \qquad (31)$$

Тут оператор $R_{1\varepsilon}$ задається тотожністю (19), а оператор R_ε у його дії на елемент $y_r(x,t_2) \in Y_{r21} \bigoplus Y_{r22} \bigoplus Y_{r3} \bigoplus Y_{r4} = \tilde{Y}_r$ подамо у вигляді тотожності

$$R_\varepsilon y_r(x,t_2) \equiv \Big[R_0 + \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \varepsilon^3 R_3 + \varepsilon^4 R_4 + \varepsilon^5 R_5\Big] y_r(x,t_2); \qquad (32)$$

тут

$$R_0 y_r(x,t_2) \equiv \big[{\varphi'_2}^2(x)\varphi_2(x) - x\tilde{k}(x)\big] R_{00} y_r(x,t_2) + a(x){\varphi'_2}^2(x)\varphi_2(x)\omega_r(x), \qquad (33)$$

$$R_1 y_r(x,t_2) \equiv a(x)R_{11}\Bigg[\sum_{k=1}^{2} Q_{rk}(x)U_k(t_2) + g_r(x)\nu(t_2)\Bigg] + \frac{1}{\pi}a(x){\varphi'_2}^2(x)f_r(x), \qquad (34)$$

$$R_2 y_r(x,t) \equiv R_{21}\Big[\sum_{k=1}^{2} V_{rk}(x)U_k(t_2) + f_r(x)\nu(t_2)\Big] + R_{22}\Big[\sum_{k=1}^{2} Q_{rk}(x)U'_k(t_2) + g_r(x)\nu'(t_2)\Big] +$$
$$+ a(x)d_2\big[\sum_{k=1}^{2} V_{rk}(x)U'_k(t_2) + f_r(x)\nu'(t_2) + \frac{1}{\pi}a(x)d_2 g_r(x) + b(x)\omega'_r(x), \qquad (35)$$

$$R_3y_r(x,t_2)\equiv a(x)\left[\sum_{k=1}^{2}\Big[V''_{rk}(x)U_k(t_2)+Q''_{rk}(x)U'_k(t_2)\Big]+f''_r(x)\nu(t_2)+g''_r(x)\nu'(t_2)+\right.$$
$$\left.+\omega''_r(x)\right]+R_{31}\Big[\sum_{k=1}^{2}Q_{rk}(x)U_k(t_2)+g_r(x)\nu(t_2)\Big]+\frac{1}{\pi}f_r(x), \tag{36}$$

$$R_4y_r(x,t_2)\equiv L_{12}\left[\sum_{k=1}^{2}V_{rk}(x)U'_k(t_2)+f_r(x)\nu'(t_2)+\frac{1}{\pi}g_r(x)\right], \tag{37}$$

$$R_5y_r(x,t_2)\equiv\sum_{k=1}^{2}\Big[V'''_{rk}(x)U_k(t_2)+Q'''_{rk}(x)U'_k(t_2)\Big]+f'''_r(x)\nu(t_2)+g'''_r(x)\nu'(t_2)+\omega'''_r(x). \tag{38}$$

де

$$R_{11}\equiv a(x)[\varphi_2(x)d_2+\varphi_2'^2(x)],\qquad R_{21}\equiv\varphi_2(x)L_{02}+\varphi_2'^3(x)+b(x)\frac{\partial}{\partial x},$$
$$R_{22}\equiv\varphi_2(x)L_{02}+2\varphi_2'^3(x)+b(x)\frac{\partial}{\partial x},\quad R_{31}\equiv\varphi_2(x)L_{12}+L_{02}$$
$$R_{00}y_r(x,t_2)\equiv a(x)\Big[\sum_{k=1}^{2}\big[V_{rk}(x)U_k(t_2)+Q_{rk}(x)U'_k(t_2)\big]+$$
$$+f_r(x)\nu(t_2)+g_r(x)\nu'(t_2)\Big]+\varphi_2'(x)\varphi_2(x)\Big[\sum_{k=1}^{2}Q_{rk}(x)U_k(t_2)+f_r(x)\nu(t_2)\Big].$$

З отриманих тотожностей (31)–(38) можна зробити наступні *висновки*:

1. Кожен з просторів Y_{r1}, Y_{r2k} і $Y_{r3}\bigoplus Y_{r4}$ інваріантний щодо розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$.
2. Оператори $P(k_1(x),\varepsilon)$ і R_0 є головними складовими розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ відповідно в підпросторах Y_{r1} і $\bigoplus_{k=1}^{2}Y_{r2k}\bigoplus Y_{r3}\bigoplus Y_{r4}$.
3. Розширене рівняння (8) регулярно збурене в просторі Y_r.

На підставі отриманих висновків асимптотику розв'язку розширеного рівняння (8) будуємо у вигляді ряду

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=-1}^{+\infty}\varepsilon^rW_r(x,t),\qquad W_r(x,t)\in Y_r. \tag{39}$$

Підставимо формально ряд (39) в розширене рівняння (8) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях малого параметру $\varepsilon>0$. Тоді для визначення коефіцієнтів цього ряду одержимо дві незалежні одна від одної рекурентні системи рівнянь.

Перша з них, що відповідає стабільному кореню $k_1(x)$, має вигляд

$$L_{01}\alpha_r(x)=-a(x)d_1\alpha_{r-1}(x)-\left[L_{11}+b(x)\frac{\partial}{\partial x}\right]\alpha_{r-3}(x)-$$
$$-a(x)\alpha''_{r-4}(x)-\alpha'''_{r-6}(x),\quad r\ge 0. \tag{40}$$

Друга серія представлена рівняннями

$$R_0 y_{-1}(x, t_2) = 0, \tag{41}$$

$$R_0 y_0(x, t_2) = h(x) - R_1 y_{-1}(x, t_2), \tag{42}$$

$$R_0 y_r(x, t_2) = -\sum_{i=1}^{5} R_i y_{r-i}(x, t_2), \qquad r \geq 1. \tag{43}$$

Отримані незалежні серії рівнянь (40) і (41)–(43) показують наступне: проведено розщеплення розв'язку розширеного рівняння (8), а отже і СЗДР (1) у такий спосіб, що лінійно незалежний розв'язок рівняння (1), який відповідає стабільному кореню $k_1(x)$ характеристичного рівняння (3), можна будувати незалежно від побудови інших двох лінійно незалежних розв'язків рівняння (1).

Ще одна деталь характерна для СЗДР з нестабільним спектром: у побудові частинного розв'язку неоднорідного СЗДР (1) із точкою звороту беруть участь тільки нестабільні корені $k_{2,3}(x)$ характеристичного рівняння (3).

6. Побудова головного члена асимптотики розв'язку. Доведемо, що із серії рівнянь (40)–(43) можна визначити досить гладкі коефіцієнти функцій $W_r(x,t)$. Розв'язуючи поступово серію диференційних рівнянь (40), визначимо усі функції $\alpha_r(x)$, $r \geq 0$ згідно формул (21). Отже один лінійно незалежний розв'язок розширеного рівняння (4), а відповідно і СЗДР (1) буде визначено.

Використовуючи тотожність (33), визначимо ядро оператора R_0 у ПБР $\tilde{Y}_r$. Маємо

$$KerR_0 = \Big\{ V_{ri}(x)U_i(t_2) + Q_{ri}(x)U_i'(t_2),\ i \in \{1,2\},\ f_r(x)\nu(t_2) + g_r(x)\nu'(t_2) \Big\}, \tag{44}$$

де $V_{ri}(x)$, $Q_{ri}(x)$, $f_r(x)$, $g_r(x)$ — довільні, досить гладкі функції при $x \in I$.

Загальним розв'язком однорідного рівняння (41) у ПБР $\tilde{Y}_{-1}$ є функція ($r = -1$)

$$y_r(x, t_2) = \sum_{i=1}^{2} \Big[V_{ri}(x)U_i(t_2) + Q_{ri}(x)U_i'(t_2) \Big] + f_r(x)\nu(t_2) + g_r(x)\nu'(t_2) \equiv Z_r(x, t_2), \tag{45}$$

у якій коефіцієнти при ІОФ до деякого моменту будуть довільними, досить гладкими функціями від $x \in I$. Використовуючи довільність вибору функцій $Q_{(-1)i}(x)$ і $g_{-1}(x)$ вимагатимемо, щоб права частина рівняння (42) не містила елементів ядра оператора R_0. Для виконання цих умов функції $Q_{(-1)i}(x)$ і $g_{-1}(x)$ виберемо як розв'язки диференційних рівнянь ($r = -1$)

$$DQ_{ri}(x) = 0, \qquad Dg_r(x) = 0. \tag{46}$$

Ці рівняння розв'язуватимемо за умов $|Q_r(0)| < \infty$ і $|g_r(0)| < \infty$. Обмеженими розв'язками при $x \in I$ рівнянь (46) будуть тотожні нулі. Крім цього, вимагаючи, щоб права частина рівняння (42) належала до множини значень оператора R_0, одержимо початкову умову $f_{-1}(0) = -\dfrac{h(0)}{k_1(0)\varphi_2'(0)} = f_{-1}^0$.

За виконання цих умов у ПБР Y_0 існує розв'язок рівняння (42) вигляду

$$y_0(x,t_2) = Z_0(x,t_2) + c^{-1}(x)\big[h(x) - \frac{1}{\pi}a(x)\varphi_2'(x)f_{-1}(x)\big] \equiv Z_0(x,t_2) + \omega_0(x).$$

При розв'язанні в ПБР Y_1 ітераційного рівняння (43) при $r = 1$ визначимо функції $Q_{0i}(x) \equiv g_0(x) \equiv 0$, одержимо початкову умову $f_0(0) = 0$ і диференційні рівняння $(r = -1)$

$$d_2 V_{ri}(x) = 0, \qquad d_2 f_r(x) = 0. \tag{47}$$

Використовуючи початкову умову $f_{-1}(0) = f_{-1}^0$, однозначно визначимо функцію $f_0(x)$, а функції $V_{(-1)i}(x)$ визначимо з точністю до довільних сталих $C_{r(i+1)}$, $i \in \{1;2\}$ (див. (30)).

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційне рівняння (43) при $r \geq 2$, ми однозначно визначимо функції $Q_{ri}(x)$ і $f_r(x)$, а $V_{ri}(x)$ — з точністю до довільних сталих $C_{r(i+1)}$.

Головний член асимптотики розв'язку розширеного рівняння (4) має вигляд

$$y_0(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1} f_{-1}(x)\nu(t_2) + \sum_{i=1}^{2} V_{0i}(x)U_i(t_2) + \alpha_0(x)\exp t_1 + \omega_0(x). \tag{48}$$

Провівши звуження в рівності (48) при $t = \Phi(x,\varepsilon)$, одержимо головний член асимптотики розв'язку неоднорідного СЗДР (1).

7. Структура фундаментальної системи розв'язків. Для розширеного однорідного рівняння (4) маємо три розв'язки. Перший розв'язок, що відповідає стабільному кореню $k_1(x)$, має вигляд

$$\tilde{Y}_1(x,t,\varepsilon) \equiv \tilde{Y}_1(x,t_1,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \alpha_r(x)\exp t_1, \tag{49}$$

де $\alpha_r(x)$ — розв'язки диференційних рівнянь (20), при цьому $\alpha_r(x) = C_{1r}k_1^{-2}(x)$, коли $r = 0$ або $r = 1$ (див. (21)).

Інші два розв'язки, що відповідають нестабільним елементам спектру $k_{2,3}(x,\varepsilon) = \pm\sqrt{\dfrac{x\tilde{k}(x)}{\varepsilon}}$, можна подати у вигляді

$$\tilde{Y}_{s+1}(x,t,\varepsilon) \equiv \tilde{Y}_{s+1}(x,t_2,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \Big[V_{rs}(x)U_s(t_2) + Q_{rs}(x)U_s'(t_2)\Big], \quad s \in \{1;2\}, \tag{50}$$

де $Q_{rs}(x) \equiv 0$, $r \in \{-1;0\}$, $s \in \{1;2\}$.

Частинний розв'язок неоднорідного розширеного рівняння (4) має вигляд

$$Y_{\text{част.}}(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1} f_{-1}(x)\nu(t_2) + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \Big[f_r(x)\nu(t_2) + g_r(x)\nu'(t_2) + \omega_r(x)\Big]. \tag{51}$$

Вимагатимемо, щоб розв'язки (49), (50) задовольняли умови $\tilde{Y}_1(0,0,\varepsilon) = 1$, $\tilde{Y}_2(0,0,\varepsilon) = 1$, $\tilde{Y}_3(0,0,\varepsilon) = 0$. У цьому випадку $W_{\text{Вр.}}[\tilde{Y}_i(0,0,\varepsilon)] = O(\varepsilon^{-2}) \neq 0$ коли $\varepsilon > 0$.

У (49), (50) і (51) проведемо звуження при $t = \Phi(x,\varepsilon)$ і запишемо отримані рівності у вигляді

$$\tilde{Y}_1\big(x, \Phi_1(x,\varepsilon), \varepsilon\big) = \left[\sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r \alpha_r(x) + \varepsilon^{m+1}\xi_{(m+1)1}(x, \Phi_1(x,\varepsilon), \varepsilon)\right] \exp\Big(\frac{\varphi_1(x)}{\varepsilon}\Big), \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\tilde{Y}_{s+1}\big(x, \Phi_2(x,\varepsilon), \varepsilon\big) = \left[\sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r V_{rs}(x) + \varepsilon^{m+1}\xi_{(m+1)(s+1)}\big(x, \Phi_2(x,\varepsilon), \varepsilon\big)\right] U_s\Big(\frac{\varphi_2(x)}{\varepsilon}\Big) + \\ + \left[\sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r Q_{rs}(x) + \varepsilon^{m+1}\xi_{(m+1)(s+2)}\big(x, \Phi_2(x,\varepsilon), \varepsilon\big)\right] \frac{dU_s\big(\varepsilon^{-1}\varphi_2(x)\big)}{d\big(\varepsilon^{-1}\varphi_2(x)\big)}, s \in \{1;2\},\end{gathered} \tag{53}$$

$$\begin{gathered}Y_{\text{част.}}\big(x, \Phi_2(x,\varepsilon), \varepsilon\big) = \varepsilon^{-1} f_{-1}(x)\nu\big(\varepsilon^{-1}\varphi_2(x)\big) + \sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r \omega_r(x) + \xi_{(m+1)6}\big(x, \Phi_2(x,\varepsilon), \varepsilon\big) + \\ + \left[\sum_{r=0}^{m} \varepsilon^m f_r(x) + \xi_{(m+1)4}\big(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon\big)\right] \nu(\varepsilon^{-1}\varphi_2(x)) + \\ + \left[\sum_{r=0}^{m} \varepsilon^r g_r(x) + \xi_{(m+1)5}\big(x, \Phi_2(x,\varepsilon), \varepsilon\big)\right] \frac{d\big(\nu(\varepsilon^{-1}\varphi_2(x))\big)}{d\big(\varepsilon^{-1}\varphi_2(x)\big)}.\end{gathered} \tag{54}$$

Використовуючи методику, описану в [1]–[9], можна довести, що при досить малих значеннях параметру $\varepsilon > 0$ правильні оцінки

$$\|\xi_{(m+1)i}(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon)\| \leq K, \quad i \in \{1;2;6;7;8\} \tag{55}$$

де K — стала, що не залежить від $x \in I$ і малого параметру $\varepsilon > 0$.

Отже побудовані формальні розв'язки (50)–(51) є асимптотичними розв'язками розширеного рівняння (8), а їх звуження при $t = \Phi(x,\varepsilon)$, тобто розв'язки (52)–(54) є асимптотичними розв'язками СЗДР (1).

Загальний розв'язок СЗДР (1) має вигляд

$$Y\Big(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon\Big) = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i Y_i\Big(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon\Big) + Y_{\text{част.}}\Big(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon\Big),$$

де γ_i — довільні сталі.

Правильна наступна теорема.

Теорема. *Нехай: 1) виконуються умови (2); 2) корені характеристичного рівняння (3) задовольняють умови (4). Тоді при досить малих значеннях параметру $\varepsilon > 0$:*

а) в ПБР (14) існують три лінійно незалежні розв'язки $\tilde{Y}_i(x,t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$ однорідного розширеного рівняння (8), які можна подати у вигляді асимптотичних рядів (49) і (50);

б) звуження рядів (49), (50) при $t = \Phi(x,\varepsilon)$ є асимптотичними рядами лінійно незалежних розв'язків СЗДР (1);

в) для лінійно незалежних розв'язків $Y_i(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon)$ справджуються оцінки (55);

г) частинний розв'язок неоднорідного СЗДР (1) можна подати у вигляді (54);

д) на будь-якому компакті відрізку I, що не містить точки звороту $x = 0$, справджується гранична рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Y_{\text{част.}}\Big(x, \Phi(x,\varepsilon), \varepsilon\Big) = \frac{h(x)}{k_1(x)x\tilde{k}(x)} \equiv \omega_0(x),$$

де $\omega_0(x)$ — розв'язки виродженного рівняння (5).

ЛІТЕРАТУРА

1. Бобочко В. Н., Коломиец В. М. Асимптотическое интегрирование уравнения типа Орра-Зоммерфельда: Киев, 1990. – 44 с. (Препринт: 90.45).
2. Бобочко В. Н. *Уравнения типа Орра-Зоммерфельда с двумя точками поворота* // Дифференц. урав. – 1992. – Т.28, №10. – С.1559–1570.
3. Langer R. E. *On the asymptotic forms of the solutions of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 80. – P.93–123.
4. Langer R. E. *The asymptotic solutions of certain ordinary differential equations of the second order, with special reference to a turning point* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 67. – P.461–490.
5. Бобочко В. М., Болілий В. О. *Псевдодифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений* // Нелінійні коливання. – 1999. – Т.2, №2.
6. Wasow W. R. Linear turning point theory. – New York: Springer-Verlag Inc, 1985. – 243 pp.
7. Бобочко В. Н. *Сингулярно возмущенная задача Коши с точкой поворота* // Матем. физика и нелин. механика. – Киев: Институт математики АН УССР. – 1991. – Вып.16(50). – С.68–74.
8. Бобочко В. Н. *Система дифференциальных уравнений с нестабильной точкой поворота* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – №3. – С.73.
9. Бобочко В. Н. *Краевая задача для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с недиагонализируемым предельным оператором* // Известия вузов. Математика. – 1999. – №4. – С.14–23.
10. Ломов С. А. Введенние в общую теорию сингулярних возмущений. — М.: Наука, 1981. – 400 с.
11. Дородницын А. А. *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН. – 1952. – Т.27, вып.6(52). – С.3–96.
12. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990.- 528 с.

Кіровоград, Україна

Надійшло 4.01.2000
Після переробки 19.06.2002