УДК 517.927

О. В. Махней

ФУНКЦІЯ ГРІНА СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ОПЕРАТОРА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

A. V. Makhney. *Green function of a singular differential operator and its properties*, Matematychni Studii, **18** (2002) 147–156.

In this paper, a Green function for linear differential operator with generalized functions in coefficients of corresponding it differential equation is constructed. With the aid of obtained expressions for adjoint boundary conditions a relationship between Green functions of adjoint boundary problems is proved.

А. В. Махней. *Функция Грина сингулярного дифференциального оператора и её свойства* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.147–156.

В этой работе построена функция Грина для линейного дифференциального оператора с обобщёнными функциями в коэффициентах соответствующего ему дифференциального уравнения. С помощью полученных выражений для сопряжённых краевых условий доказывается соотношение между функциями Грина сопряжённых краевых задач.

Вступ. Лінійні диференційні оператори, породжені диференційними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено досить добре (див., наприклад, [1]). Однак, в задачах прикладного характеру часто зустрічаються розривні чи навіть узагальнені функції в коефіцієнтах. Такі задачі є значно гірше дослідженими.

Більше того, спряжені диференційні вирази містять доданки вигляду $(p(x)\,y)^{(j)}$, які при недостатній гладкості не можна звести за допомогою j-кратного диференціювання до звичайних диференційних. Щоб підкреслити цю обставину, їх у літературі називають квазідиференційними.

Ще в середині 50-х років минулого століття вивчались крайові задачі для звичайних диференційних рівнянь другого й четвертого порядків, що описують вільні коливання струни і балки, які крім неперервно розподіленої маси несуть на собі ще й зосереджені точкові маси — бусинки [2]. Але, у зв'язку із специфікою, методи дослідження цих задач не вдалось застосувати до рівнянь вищих порядків та рівнянь неодночленного класу. В монографії [3] досліджується оператор Шредінгера на необмеженому проміжку у випадку, коли сингулярний потенціал є, наприклад, скінченною чи нескінченною сумою δ-функцій Дірака. Значно більш загальні сингулярні самоспряжені оператори вивчаються в [4] за допомогою методу самоспряжених розширень і сингулярних білінійних форм. У статті [5] отримано асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій сингулярного диференційного оператора.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34B27.

Слід зазначити, що спряжені диференціальні вирази містять доданки вигляду $(p(x)\,y)^{(j)}$, які при недостатній гладкості не можна звести за допомогою j-кратного диференціювання до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цю обставину, їх у літературі називають квазідиференціальними.

Квазіпохідні — це компоненти вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференційного рівняння до системи диференційних рівнянь першого порядку. Мабуть першим, хто ввів поняття квазіпохідних, яке дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів в квазідиференційних виразах, був Д. Шин [6, 7]. Однак, він і його послідовники вивчали переважно квазідиференційні вирази з неперервними або, принаймні, сумовними за Лебегом коефіцієнтами.

Ця робота присвячена побудові функції Гріна сингулярного диференційного оператора, породженого несамоспряженим диференційним виразом з узагальненими коефіцієнтами і однорідними крайовими умовами. Крім цього, за допомогою методу введення квазіпохідних досліджено властивості функцій Гріна спряжених крайових задач. При дослідженні зв'язку між цими функціями Гріна довелось подолати деякі специфічні труднощі, притаманні для несамоспряжених диференційних виразів.

Отримані результати дозволяють вивчати й інші задачі, зокрема задачі на розклад за власними функціями (в одній з наступних робіт будуть запропоновані спектральні властивості сингулярного диференційного оператора). Аналогічні результати можна отримати і у випадку сингулярного квазідиференційного оператора.

1. Постановка задачі. Розглянемо вираз

$$l\,(y) \equiv y^{(n)} + p_1\,(x)\,y^{(n-1)} + p_2\,(x)\,y^{(n-2)} + \dots + p_n\,(x)\,y, \tag{1}$$

де $p_i = q_i'$, $q_i \in BV^+\,[a,b]$, $i \in \{1,\dots,n\}$, (тут $BV^+\,[a,b]$ — простір неперервних праворуч функцій обмеженої на $[a,b]$ варіації, а знак "$'$" означає узагальнене диференціювання). Очевидно, що p_i — міри, тобто узагальнені функції нульового порядку (див. [8, с. 160]). Ми вважатимемо функції q_i і p_i комплекснозначними.

Розв'язок початкової задачі

$$l(y) = 0,\;\; y^{(j)}(a) = y_j, \quad j \in \{0,\dots,n-1\}, \tag{2}$$

існує і єдиний, причому він і всі його похідні до $(n-2)$-го порядку включно є абсолютно неперервними на $[a,b]$ функціями, а $y^{(n-1)} \in BV^+[a,b]$ (див. [9]).

Розглянемо тепер відповідне диференційному виразу (1) рівняння

$$l\,(y) = \lambda y, \tag{3}$$

де λ — комплексний параметр, і крайові умови

$$U_\nu\,(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}\,(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} y^{(j)}\,(b) = 0, \quad \nu \in \{1,\dots,n\}, \tag{4}$$

які задаються за допомогою n лінійно незалежних форм $U_\nu\,(y)$. З [10] відомо, що розв'язок крайової задачі (3), (4) існує в просторі абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій, а його похідні задовольняють такі ж умови гладкості, що й у випадку початкової задачі (2). Зрозуміло, що $y^{(n)}(x)$ є мірою, як узагальнена похідна функції обмеженої варіації $y^{(n-1)}(x)$.

Диференційний вираз (1) і крайові умови (4) породжують диференційний оператор L. Ми будемо розглядати його як такий, що діє з $BV^+[a,b]$ в простір мір. Функції $f_1, f_2 \in BV^+[a,b]$ ми будемо вважати еквівалентними, якщо $\int_a^b |f_1(x)|^2dx = \int_a^b |f_2(x)|^2dx$. Тоді норма і скалярний добуток визначаються в просторі $BV^+[a,b]$ (елементами якого можна вважати не самі функції, а введені вище класи еквівалентності) наступним способом

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2dx}, \quad (f_1,f_2) = \int_a^b f_1(x)\overline{f_2(x)}dx$$

(риска зверху тут означає комплексне спряження); а в просторі узагальнених похідних $\|f\| = \int_a^b |dg(x)| = \bigvee_a^b[g]$, де $f(x) = g'(x)$, $g \in BV^+[a,b]$, а символ $\bigvee_a^b[g]$ позначає варіацію функції $g(x)$ на $[a,b]$.

За допомогою вектора $Y = \mathrm{colon}\left(y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ рівняння (3) зводиться до системи

$$Y' = C'Y, \tag{5}$$

з матрицею-мірою

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda - p_n & -p_{n-1} & \cdots & -p_1 \end{pmatrix}.$$

Крайові умови (4) теж можна переписати у матричному вигляді

$$W_aY\,(a) + W_bY\,(b) = 0, \tag{6}$$

де $W_a = (\alpha_{\nu j})$, $W_b = (\beta_{\nu j})$. Оскільки стрибок матриці

$$\Delta C\,(x) = C\,(x) - C\,(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\Delta q_n\,(x) & \cdots & -\Delta q_1\,(x) \end{pmatrix},$$

то за додаткової умови неперервності функції $q_1\,(x)$ правильна матрична рівність $[\Delta C\,(x)]^2 \equiv 0$, що забезпечує коректність системи (5), тобто існування розв'язку крайової задачі (5), (6) (див. [10, 11]). Під розв'язком рівняння (3) ми розуміємо першу координату $y\,(x)$ вектора $Y\,(x)$ системи (5), що задовольняє (3) в сенсі теорії узагальнених функцій.

Система, спряжена до системи (5), визначається векторною рівністю (див. [9])

$$Z' = -\left(C^*\right)' Z, \tag{7}$$

де $Z = \mathrm{colon}\left(z^{\{n-1\}}, z^{\{n-2\}}, \dots, z^{\{1\}}, z\right)$, $*$ — ермітове спряження, а фігурні дужки означають квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння. В роботі [9] встановлено, що вони визначаються формулами

$$z^{\{0\}} \overset{df}{=} z,\ z^{\{i\}} = \bar{p}_i z - \left(z^{\{i-1\}}\right)', \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

де риска над p_i означає комплексне спряження. З (7) видно (див. [9]), що спряжений до (1) диференційний вираз і спряжене до (3) диференційне рівняння мають вигляд

$$l^*(z) = (-1)^n z^{(n)} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{n-j} (\bar{p}_j z)^{(n-j)}, \tag{8}$$

$$l^*(z) = \bar{\lambda} z. \tag{9}$$

2. Спряжені крайові умови. Розглянемо вираз Z^*Y і продиференціюємо його, скориставшись формулами (5), (7):

$$(Z^*Y)' = (Z^*)'Y + Z^*Y' = -\left((C^*)'Z\right)^* Y + Z^*C'Y = -Z^*C'Y + Z^*C'Y = 0.$$

Таке диференціювання допустиме, оскільки добутки $(Z^*)'Y$ і Z^*Y' є коректними на підставі відомого факту про те, що y, y', … , $y^{(n-2)}$, z — абсолютно неперервні функції, а $y^{(n-1)}$, $z^{\{1\}}$, … , $z^{\{n-1\}}$ є функціями обмеженої варіації на проміжку $[a,b]$ (див. [9, 10]). Отже, Z^*Y є сталою величиною і тому

$$(Z^*Y)\Big|_a^b = 0 \tag{10}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\bar{z}^{\{n-1\}}(b)\, y(b) + \bar{z}^{\{n-2\}}(b)\, y'(b) + \cdots + \bar{z}(b)\, y^{(n-1)}(b) -$$
$$-\bar{z}^{\{n-1\}}(a)\, y(a) - \bar{z}^{\{n-2\}}(a)\, y'(a) - \cdots - \bar{z}(a)\, y^{(n-1)}(a) = 0.$$

За допомогою останньої рівності можна визначити спряжені крайові умови. Для цього доповнимо лінійні форми $U_1(y)$, $U_2(y)$, … , $U_n(y)$ формами $U_{n+1}(y)$, $U_{n+2}(y)$, … , $U_{2n}(y)$ до лінійно незалежної системи $2n$ лінійних форм. Тоді систему

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(b), \quad \nu \in \{1, \ldots, 2n\},$$

можна однозначно розв'язати відносно невідомих $y(a)$, $y'(a)$, … , $y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, $y'(b)$, … , $y^{(n-1)}(b)$, які визначаються через $U_1(y)$, … , $U_{2n}(y)$. Підставивши отримані $y^{(q)}(a)$, $y^{(q)}(b)$ $(q \in \{0, \ldots, n-1\})$ в білінійну форму $(Z^*Y)\big|_a^b$, ми отримаємо, що

$$(Z^*Y)\Big|_a^b = \sum_{\nu=1}^{2n} A_\nu(\xi)\, B_\nu(\eta),$$

де $\eta = \left(y^{(q)}(a), y^{(q)}(b)\right)$, $\xi = \left(\bar{z}^{\{q\}}(a), \bar{z}^{\{q\}}(b)\right)$, $q \in \{0, \ldots, n-1\}$, а $B_\nu(\eta) = U_\nu(y)$. Позначимо $A_{2n}(\xi) = V_1(z)$, … , $A_1(\xi) = V_{2n}(z)$. Очевидно, що для того, щоб виконувалась рівність (10), повинні виконуватись співвідношення

$$V_j(z) = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{11}$$

які ми назвемо спряженими крайовими умовами до умов (4).

Якщо $|W_a| \neq 0$ і $|W_b| \neq 0$ одночасно в рівнянні (6), то легко переконатись в тому, що крайові умови для спряженого рівняння подаватимуться у вигляді

$$Z^*(a)\,W_a^{-1} + Z^*(b)\,W_b^{-1} = 0.$$

3. Функція Гріна крайової задачі. Розглянемо тепер неоднорідне диференційне рівняння

$$l(y) = \lambda y + f, \tag{12}$$

де $f(x) = g'(x)$, $g \in BV^+[a,b]$, і побудуємо функцію Гріна крайової задачі (12), (4). Зазначимо, що розв'язок цієї задачі разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ є абсолютно неперервним, а $y^{(n-1)} \in BV^+[a,b]$ (див. [9, 10]).

Нехай $K(x,t,\lambda)$ — функція Коші однорідного рівняння (3). З [9] відомо, що $K(x,a,\lambda)$, $K^{\{1\}}(x,a,\lambda)$, ... , $K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і розв'язок рівняння (12) можна подати у вигляді

$$y(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda) + \int_a^x K(x,t,\lambda)\,dg(t). \tag{13}$$

Оскільки, згідно з [9],

$$y^{(j)}(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_k K^{\{k-1\}(j)}(x,a,\lambda) + \int_a^x K^{(j)}(x,t,\lambda)\,dg(t), \quad j \in \{1,\ldots,n\},$$

підстановка формули (13) в крайові умови (4) дає рівності

$$U_\nu(y) = \sum_{k=1}^{n} c_k U_\nu\left(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} \int_a^b K^{(j)}(b,t,\lambda)\,dg(t), \quad \nu \in \{1,\ldots,n\}. \tag{14}$$

За припущення, що λ не є власним значенням оператора L, визначник цієї системи відмінний від нуля

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left(U_\nu\left(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)\right) \neq 0, \quad \nu, k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Тоді сталі c_k можна визначити з системи (14) однозначно. Підставляючи ці значення c_k у формулу (13), отримаємо

$$y(x,\lambda) = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b \frac{A_{\nu,k}}{\Delta(\lambda)} \beta_{\nu j} K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\,K^{(j)}(b,t,\lambda)\,dg(t) + \int_a^x K(x,t,\lambda)\,dg(t),$$

де $A_{\nu,k}$ — алгебраїчне доповнення елемента $U_\nu\left(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\right)$ у визначнику $\Delta(\lambda)$.

Вираз

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{A_{\nu,k}}{\Delta(\lambda)} \beta_{\nu j} K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\,K^{(j)}(b,t,\lambda) + K(x,t,\lambda), & x > t, \\ -\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{A_{\nu,k}}{\Delta(\lambda)} \beta_{\nu j} K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda)\,K^{(j)}(b,t,\lambda), & x < t \end{cases} \tag{15}$$

називатимемо *функцією Гріна* задачі (12), (4). З єдиності вибору сталих випливає єдиність функції Гріна.

Як видно з наступної теореми, ця функція Гріна, яка будується лише за допомогою функції Коші однорідного рівняння і її змішаних квазіпохідних, є аналогом функції Гріна в класичному розумінні (див. [1]).

Теорема 1. *Якщо λ не є власним значенням оператора L, то розв'язок задачі (12), (4) можна зобразити у вигляді*

$$y\,(x) = \int_a^b G\,(x, t, \lambda)\, dg\,(t), \tag{16}$$

де функція Гріна $G\,(x, t, \lambda)$ подається формулою (15) і володіє наступними властивостями:

1) *похідні за першою змінною $G^{(k)}\,(x, t, \lambda)$ ($k \in \{0, \ldots, n-2\}$) є неперервними функціями двох змінних x, t і абсолютно неперервними за кожною змінною при фіксованій іншій;*
2) *функція $G^{(n-1)}\,(x, t, \lambda)$ має обмежену на проміжку $[a, b]$ варіацію за першою змінною і є абсолютно неперервною по t;*
3) *$G\,(x, t, \lambda)$ на кожному з інтервалів $[a, t)$, $(t, b]$ по x задовольняє рівняння (3);*
4) *$G\,(x, t, \lambda)$ за змінною x задовольняє крайові умови (4);*
5) *при $x = t$ функція $G\,(x, t, \lambda)$ задовольняє умови стрибка*

$$G^{(k)}\,(t+0, t, \lambda) - G^{(k)}\,(t-0, t, \lambda) = 0, \quad k \in \{0, \ldots, n-2\};$$
$$G^{(n-1)}\,(t+0, t, \lambda) - G^{(n-1)}\,(t-0, t, \lambda) =$$
$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{A_{\nu,k}}{\Delta\,(\lambda)} \beta_{\nu j} \Delta q_{n-i}\,(t)\, K^{(i)\{k-1\}}\,(t, a, \lambda)\, K^{(j)}\,(b, t, \lambda).$$

Доведення. Формулу (16) доведено вище. Пункти 1)–4) легко перевірити, врахувавши згадані вище властивості розв'язків рівняння (3) та спряженого до нього, а також формулу з [9]

$$\hat{K}\,(x, t, \lambda) = \overline{K\,(t, x, \lambda)},$$

де $\hat{K}\,(x, t, \lambda)$ — функція Коші спряженого однорідного рівняння, а риска зверху означає комплексне спряження. Для доведення 5) розглянемо співвідношення

$$K^{\{k-1\}}\,(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\,(t, \lambda)\, y_j\,(x, \lambda), \quad k \in \{1, \ldots, n\},$$

які випливають з того факту, що всі $K^{\{k-1\}}\,(x, t, \lambda)$ є розв'язками рівняння (3); $y_j\,(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, — фундаментальна система розв'язків рівняння (3). Тоді, згідно з [9],

$$\Delta y^{(n-1)}\,(x) = -\sum_{i=0}^{n-2} \Delta q_{n-i}\,(x)\, y^{(i)}\,(x),$$

звідки ($k \in \{1, \ldots, n\}$)

$$K^{(n-1)\{k-1\}}\,(t+0, a, \lambda) - K^{(n-1)\{k-1\}}\,(t-0, a, \lambda) = -\sum_{i=0}^{n-2} \Delta q_{n-i}\,(t)\, K^{(i)\{k-1\}}\,(t, \lambda).$$

Тепер, врахувавши 1) і властивості функції Коші, можна одержати 5), що й доводить теорему. $\square$

Зазначимо, що коли $\Delta q_i(x) = 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, властивість 5) набуває “класичного” вигляду

$$G^{(k)}(t+0,t,\lambda) - G^{(k)}(t-0,t,\lambda) = 0, \quad k \in \{0, \ldots, n-2\};$$

$$G^{(n-1)}(t+0,t,\lambda) - G^{(n-1)}(t-0,t,\lambda) = 1.$$

Зауваження. Функцію $G(x,t,\lambda)$ можна записати також у вигляді

$$G(x,t,\lambda) = (-1)^n \frac{Q(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{17}$$

де

$$Q(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} K(x,a,\lambda) & \cdots & K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda) & \mathrm{X}(x,t,\lambda) \\ U_1(K(x,a,\lambda)) & \cdots & U_1\left(K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda)\right) & U_1(\mathrm{X}(x,t,\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_n(K(x,a,\lambda)) & \cdots & U_n\left(K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda)\right) & U_n(\mathrm{X}(x,t,\lambda)) \end{vmatrix}, \tag{18}$$

а

$$\mathrm{X}(x,t,\lambda) = \begin{cases} K(x,t,\lambda), & x > t, \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

Для того, щоб переконатись в еквівалентності формул (15) і (17), досить розписати визначник (18) за елементами першого рядка і останнього стовпця.

4. Матричний аналог скалярної функції Гріна. Неоднорідне рівняння (12) шляхом введення вектора Y зводиться до системи диференційних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'Y + F', \tag{19}$$

де $F(x) = \operatorname{colon}(0, \ldots, 0, g(x))$. Ця система є коректною внаслідок виконання умов $[\Delta C(x)]^2 \equiv 0$ і $\Delta C(x)\Delta F(x) \equiv 0$ (див. [12]). Розв’язок задачі (19), (6), якщо λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді інтегралу від розв’язувального ядра (матричного аналогу скалярної функції Гріна) і вектора F. Цей результат буде потрібним для подальших досліджень властивостей функції Гріна задачі (12), (4).

Для задачі (19), (6) справедлива формула Коші (див. [9, 12])

$$Y(x) = B(x,a)Y(a) + \int_a^x B(x,t)\,dF(t), \tag{20}$$

де $B(x,t) = B(x,t,\lambda)$ — фундаментальна матриця системи (5); вона подається у вигляді $B(x,t,\lambda) = R(x,\lambda)R^{-1}(t,\lambda)$, тут $R(x,\lambda)$ — інтегральна матриця системи (5). Ми можемо записати рівність (20) у наступному вигляді:

$$Y(x) = R(x,\lambda)C + \int_a^x B(x,t,\lambda)\,dF(t), \tag{21}$$

де $C = \operatorname{colon}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $C = R^{-1}(a,\lambda) Y(a)$. Підставивши (21) в умови (6), отримаємо, внаслідок того, що $|W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)| \neq 0$ (бо λ не є власним значенням крайової задачі), вираз для стовпця C

$$C = -\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\}^{-1} \int_a^b W_b B(b,t,\lambda)\, dF(t).$$

Отже,

$$Y(x) = \int_a^b M(x,t,\lambda)\, dF(t), \tag{22}$$

де розв'язувальне ядро

$$M(x,t,\lambda) = \begin{cases} B(x,t,\lambda) - R(x,\lambda)\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\}^{-1} W_b B(b,t,\lambda), & x > t, \\ -R(x,\lambda)\{W_a R(a,\lambda) + W_b R(b,\lambda)\}^{-1} W_b B(b,t,\lambda), & x < t. \end{cases}$$

5. Зв'язок між функціями Гріна спряжених крайових задач. Спряжений диференційний вираз (8) разом з крайовими умовами (10) породжує диференційний оператор L^*. Нехай $H(x,t,\lambda)$ — функція Гріна оператора $L^* - \bar{\lambda}1$. Вона будується за допомогою функції Коші $\hat{K}(x,t,\lambda)$ однорідного рівняння (9) і її змішаних квазіпохідних в сенсі вихідного і спряженого рівнянь. Неважко переконатись, що формули, подібні до (16) і (22), є справедливими і для функції $H(x,t,\lambda)$. Крім того, вона володіє властивостями, подібними до наведених в теоремі 1, зокрема $H(x,t,\lambda)$ є абсолютно неперервною за кожною з двох перших змінних при фіксованих інших і неперервною за сукупністю змінних x і t, а квазіпохідні за першою змінною $H^{\{k\}}(x,t,\lambda)$ ($k \in \{1,\ldots,n-1\}$) мають обмежену варіацію по x і є абсолютно неперервними по t. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо λ не є власним значенням оператора L, то при $x \neq t$ функції Гріна спряжених крайових задач пов'язані між собою співвідношенням*

$$G(x,t,\lambda) = \overline{H(t,x,\lambda)},$$

де риска зверху означає комплексне спряження.

Доведення. Припустимо без втрати загальності, що $G(x,t,\lambda)$ і $H(x,t,\lambda)$ є функціями Гріна спряжених крайових задач

$$l(y) - \lambda y = f_1(x), \tag{23}$$

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{\nu j} y^{(j)}(b) = 0, \quad \nu \in \{1,\ldots,n\}, \tag{24}$$

і

$$l^*(z) - \bar{\lambda} z = -f_2(x), \tag{25}$$

$$V_\nu(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{\nu j} z^{\{j\}}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{\nu j} z^{\{j\}}(b) = 0, \quad \nu \in \{1,\ldots,n\}, \tag{26}$$

відповідно, де $f_1(x)$, $f_2(x)$ — дійснозначні неперервні на $[a,b]$ функції. Ці задачі внаслідок введення векторів $Y = \mathrm{colon}\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ і $Z = \mathrm{colon}\left(z^{\{n-1\}}, \ldots, z^{\{1\}}, z\right)$ зводяться до задач

$$\begin{cases} Y' = C'Y + F_1, \\ W_a Y(a) + W_b Y(b) = 0 \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} Z' = -\left(C^*\right)' Z + F_2, \\ \hat{W}_a Z(a) + \hat{W}_b Z(b) = 0 \end{cases}$$

відповідно, де $F_1(x) =: (0, \ldots, 0, f_1(x))$, $F_2(x) =: (f_2(x), 0, \ldots, 0)$, а W_a, W_b, $\hat{W}_a$, $\hat{W}_b$ — матриці порядку $n \times n$.

Оскільки добутки $(Z^*)' Y$ і $Z^* Y'$ коректні, то

$$(Z^* Y)' = (Z^*)' Y + Z^* Y' = -Z^* C' Y + F_2^* Y + Z^* C' Y + Z^* F_1 = Z^* F_1 + F_2^* Y.$$

З іншого боку, врахувавши шлях побудови крайових умов спряженої задачі (11), можна переконатись в справедливості рівності (10) для неоднорідних спряжених крайових задач (23)–(26). Тоді

$$\int_a^b \left(Z^*(x) F_1(x) + F_2^*(x) Y(x)\right) dx = 0$$

або

$$\int_a^b Z^*(t) F_1(t)\, dt + \int_a^b F_2^*(x) Y(x)\, dx = 0.$$

Оскільки за формулою (22)

$$Y(x) = \int_a^b M(x,t,\lambda) F_1(t)\, dt, \ Z(t) = \int_a^b N(t,x,\lambda) F_2(x)\, dx,$$

то враховуючи (16), можна зробити висновок, що останній елемент першого рядка матриці $M(x,t,\lambda)$ дорівнює $G(x,t,\lambda)$, а перший елемент останнього рядка матриці $N(t,x,\lambda)$ збігається з $-H(t,x,\lambda)$. Крім того,

$$\int_a^b \left(\int_a^b N(t,x,\lambda) F_2(x)\, dx\right)^* F_1(t)\, dt + \int_a^b F_2^*(x) \int_a^b M(x,t,\lambda) F_1(t)\, dt dx = 0,$$

тобто

$$\int_a^b \int_a^b F_2^*(x) \{N^*(t,x,\lambda) + M(x,t,\lambda)\} F_1(t)\, dx dt =$$
$$= \int_a^b \int_a^b \left\{G(x,t,\lambda) - \overline{H(t,x,\lambda)}\right\} f_1(t) f_2(x)\, dx dt = 0.$$

Оскільки функція в фігурних дужках справа — неперервна функція змінних x і t, а $f_1(x)$, $f_2(x)$ — також (довільні) дійснозначні неперервні функції, то згідно з основною лемою варіаційного числення (див. [13])

$$G(x,t,\lambda) - \overline{H(t,x,\lambda)} = 0,$$

що й завершує доведення. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Кац И. С., Крейн М. Г. *О спектральных функциях струны* // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. – С. 648–731.
3. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. – 566 с.
4. Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряжённых операторов. — К.: Наукова думка, 1993. – 176 с.
5. Махней О. В. *Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т.44, №2. – С. 17–25.
6. Шин Д. Ю. *О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка* // Матем. сборник. – 1940. – Т.7(49). – №3. – С. 479–532.
7. Шин Д. Ю. *О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве* // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13(55). – №1. – С. 39–70.
8. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. – 312 с.
9. Тацій Р. М. *Узагальнені квазідиференціальні рівняння* // Препр. №2–94. Львів: ІППММ АН України, 1994. – 56 с.
10. Таций Р. М., Кисилевич В. В. *Краевая задача для обобщённой дифференциальной системы* // Деп. в Укр. ИНТЭИ, №1047. – 1992. – 37 с.
11. Стасюк М. Ф., Таций Р. М. *Корректные дифференциальные системы с мерами* // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифф. уравн. и их прил. – 1988. – № 222. – С. 89–90.
12. Стасюк М. Ф., Таций Р. М. *Однозначно определенные неоднородные дифференциальные уравнения с мерами* // 1 Республ. конф. "Разрывные динамические системы": Тез. докл. – К.: Наукова думка, 1989. – С. 53.
13. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969. – 424 с.

Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Надійшло 15.06.2001
Після переробки 31.10.2001