УДК 517.5

О. Б. Скасків, О. М. Тракало

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА

O. B. Skaskiv, O. M. Trakalo. *Asymptotic estimates for Laplace integrals*, Matematychni Studii, **18** (2002) 125–146.

Asymptotic estimates for the Laplace integrals are established.

О. Б. Скаскив, О. М. Тракало. *Асимптотические оценки интегралов Лапласа* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.125–146.

Для интегралов типа Лапласа устанавливаются асимптотические оценки.

1. Вступ. Для $p \in \mathbb{N}$ вживатимемо наступні стандартні позначення:

$$\|a\| = a_1 + a_2 + \dots + a_p \quad \text{для} \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p,$$

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_py_p \text{ для } x = (x_1, \dots, x_p),\ y = (y_1, \dots, y_p).$$

Нехай $f(x)$ — довільна невід'ємна неперервна функція на $\mathbb{R}^p_+$, а ν — зліченно адитивна на $\mathbb{R}^p_+$ міра з необмеженим носієм. Розглянемо функції $F(\sigma)$, визначені на $\mathbb{R}^p$ за допомогою збіжного для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралу

$$F(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}^p_+} f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle}\nu(dx). \tag{1}$$

Через $S_p(\nu)$ позначимо клас функцій вигляду (1), а через $\nu(E)$ — позначаємо ν-міру ν-вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^p$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}^p_+\cap E} \nu(dx)$.

Зазначимо, що у статтях [1–4] оцінки додатних інтегралів вигляду (1) використовувались при дослідженні асимптотичних властивостей рядів Діріхле. У випадку, коли ν — міра Лебега на $\mathbb{R}^p$, відомі асимптотичні формули для інтегралів вигляду (1) за додаткових обмежень на опуклу функцію $u = h(x) = -\ln f(x)\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, що доволі складно формулюються (див., наприклад [5, с.85]). При цьому, якщо функція $h(x)$ має максимум не в одній точці, то застосування методу Лапласа вимагає додаткових припущень стосовно гладкості многовидів, на яких досягається цей максимум. У [6] знайдено рівномірні по σ і h оцінки інтегралів (1) без додаткових умов на опуклу функцію h у випадку, коли ν — міра Лебега. При цьому відзначається, що потреба у таких оцінках виникає у зв'язку з узагальненнями теореми Пелі-Вінера.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50, 44A10.
Дослідження першого автора частково підтримані грантом INTAS, 99-00089.

Виявляється, що можна отримувати оцінки зверху інтегралів вигляду (1) через

$$\mu(\sigma, F) = \sup\{f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle} : x \in \operatorname{supp}\nu\}$$

без додаткових припущень стосовно функції f, крім припущень додатності і неперервності. В [1] такі оцінки отримано за умов лише на міру ν в класі $S_1(\nu)$ (тобто, у випадку $p = 1$), при цьому отримувані оцінки виконуються лише зовні деяких виняткових множин. Нескладно зрозуміти, що в загальному не можна отримати оцінки інтегралів вигляду (1) зверху через $\mu(\sigma, F)$ без виняткових множин. Відзначимо також, що в [7, с.190–191] функція, подібна до $\mu(\sigma, F)$, вводиться для вивчення цілих функцій, що є перетвореннями Фур'є деякої функції f. А в [8] у випадку $p = 1$ відзначено природність задачі дослідження асимптотичних властивостей інтегралів Лебега-Стільтьєса в залежності від властивостей міри $\nu(dt) = dv(t)$, де $v(t)$ — додатна монотонна функція.

У цій статті отримаємо деякі асимптотичні оцінки інтегралів вигляду (1) у випадку $p \in \mathbb{N}$, при цьому навіть у випадку $p = 1$ отримаємо нові твердження. Отримані твердження застосовуємо для дослідження асимптотичних властивостей цілих кратних рядів Діріхле.

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$; L^+ — підклас L, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функції; L_1 — клас функцій $\psi \in L$ таких, що

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty,$$

$L_1^+ = L_1 \cap L^+$; L_2 — клас диференційовних вгнутих функцій $\omega \in L^+$ таких, що

$$\frac{1}{t} = O(\omega'(t)), \quad t \to +\infty;$$

L_2^0 — клас функцій $\omega \in L_2$ таких, що для кожної функції $\varepsilon(t) \to +0$ $(t \to +\infty)$

$$\omega'(t) \searrow 0, \quad t \to +\infty, \quad \text{і} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} \omega'((1 - \varepsilon(t))t)/\omega'(t) = 1.$$

Методика доведень цього повідомлення є близькою до методу доведень з [1], який по-суті експлуатує ту ж ідею, що й у П. Розенблума [9].

2.1. Допоміжні твердження. Застосування нерівності Чебишова і Маркова. Леми про похідні додатних функцій. Проведемо деякі формальні викладки, коректність яких обгрунтуємо нижче. Нехай F — функція вигляду (1), $e_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^p$, $t \in \mathbb{R}$

$$g_b(t) \equiv F(b + te_0), \quad g(t) \equiv \ln g_b(t). \tag{2}$$

Вслід за [2] для фіксованих b і t на ймовірнісному просторі $\Omega = \mathbb{R}_+^p$ з мірою

$$P(dx) = e^{\langle b,x\rangle} f(x) e^{t\|x\|} \frac{\nu(dx)}{g_b(t)}$$

розглянемо випадкову величину $\xi = \|x\|$. Позаяк математичне сподівання $M\xi$ і дисперсія $D\xi$ дорівнюють

$$M\xi = \int\limits_{\mathbb{R}_+^p} \xi(x) P(dx) = g'(t), \quad D\xi = g''(t),$$

то за нерівністю Чебишова для $\varepsilon = \sqrt{cD\xi}$, $c > 1$, маємо

$$\frac{1}{g_b(t)} \int\limits_{|\|x\|-g'(t)|\geq\sqrt{cg''(t)}} e^{\langle b,x\rangle} f(x) e^{t\|x\|}\nu(dx) = P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = \frac{1}{c}.$$

Звідси

$$g_b(t) \leq \frac{c}{c-1} \int\limits_{|\|x\|-g'(t)|<\sqrt{cg''(t)}} e^{\langle b,x\rangle + t\|x\|} f(x)\nu(dx) \tag{3}$$

для всіх $b \in \mathbb{R}^p$ і $t \in \mathbb{R}$.

Якщо замість нерівності Чебишова скористатись нерівністю Маркова $P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \dfrac{M\xi}{\varepsilon}$ з $\varepsilon = cM\xi$, $c > 1$, то подібно отримуємо нерівність

$$g_b(t) \leq \frac{c}{c-1} \int\limits_{\|x\|<cg'(t)} e^{\langle b,x\rangle + t\|x\|} f(x)\nu(dx). \tag{4}$$

для всіх $b \in \mathbb{R}^p$ і $t \in \mathbb{R}$.

Зауваження. Враховуючи, що $g''(t) = D\xi > 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, отримуємо, що для кожного фіксованого $b \in \mathbb{R}^p$ функція $g'(t)$ — зростаюча, де $g(t)$ — визначена в (2).

Нам будуть потрібні наступні леми.

Лема 1 [10, с. 359]. *Нехай $g_0(t)$ — додатна диференційовна неспадна на $(-\infty, +\infty)$ функція, ψ — додатна неперервна на $(-\infty, +\infty)$ функція така, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dt}{\psi(t)} = A < +\infty$, а $E = \{t \in \mathbb{R} : g_0'(t) \geq \psi(g_0(t))\}$. Тоді для лінійної міри Лебега множини E маємо* $\mathrm{meas}_1 E \leq A$.

Лема 2. *Нехай ψ — додатна неперервна на $(-\infty, +\infty)$ функція, а функція $g_0(t)$ і множина E такі, як і в лемі 1. Тоді*

$$\mathrm{meas}_1(E \cap [r, R]) \leq \int\limits_{g_0(r)}^{g_0(R)} \frac{dt}{\psi(t)}, \quad -\infty < r < R < +\infty.$$

Справді,

$$\mathrm{meas}_1(E \cap [r, R]) = \int\limits_{E\cap[r,R]} dt \leq \int\limits_{E\cap[r,R]} \frac{g_0'(t)}{\psi(g_0(t))} dt = \int\limits_{g_0(E\cap[r,R])} \frac{dx}{\psi(x)} \leq \int\limits_{g_0(r)}^{g_0(R)} \frac{dx}{\psi(x)}.$$

Зауважимо, що лема 1 випливає з леми 2 у випадку, коли $\psi \in L_1$.

2.2. Допоміжні твердження. Конуси зростання, пов'язані з функціями вигляду (1). Нехай $\mathrm{supp}\,\nu$ — носій міри ν в $\mathbb{R}^n$, тобто замкнена множина $E \equiv \mathrm{supp}\,\nu$ така, що $\nu(\mathbb{R}^p \setminus E) = 0$ і $\nu(\{x \in \mathbb{R}^p : |x - x_0| < r\}) > 0$ для кожних $x_0 \in E$ і $r > 0$.

Нехай $h_\nu(\sigma) = \sup\{\langle x, \sigma\rangle : x \in \mathrm{supp}\,\nu\}$, $\quad \sigma \in \mathbb{R}^p$, — опорна функція множини $supp\,\nu$.

Для функції F вигляду (1) визначимо

$$\mu(\sigma, F) = \sup\{f(x)e^{\langle\sigma,x\rangle} : x \in \operatorname{supp}\nu\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^p,$$

і для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ функції

$$h_F(\sigma) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln F(t\sigma), \ \ h_\mu(\sigma) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln \mu(t\sigma, F).$$

Визначимо конуси в $\mathbb{R}^p$ за допомогою рівностей

$$\gamma(\delta) = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : h_\delta(\sigma) = +\infty\}, \ \ \gamma_0(\delta) = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : h_\delta(\sigma) > 0\},$$

де δ означає міру ν або функції F та μ. Правильне наступне твердження.

Твердження 1. *Якщо F — функція вигляду (1), де $f(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}^p_+$), а ν — зліченно-адитивна міра з необмеженим в $\mathbb{R}^p_+$ носієм, то*

$$\gamma(\nu) = \gamma(F) \subset \gamma(\mu), \quad \gamma_0(\nu) = \gamma_0(F) \subset \gamma_0(\mu).$$

Доведення. 1. Нехай $\sigma \in \gamma(\mu)$, з того, що $\operatorname{supp}\nu$ — необмежена в $\mathbb{R}^p_+$ множина, випливає, що для кожного $a > 0$ існує $b > a$ таке, що $\nu(\Pi_{a,b}) > 0$, де

$$\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^p_+ : a \le \langle\sigma, x\rangle \le b\}.$$

Тоді для $t > 0$

$$F(t\sigma) \ge \int\limits_{\Pi_{a,b}} e^{t\langle\sigma,x\rangle} f(x)\nu(dx) \ge e^{at}\nu(\Pi_{a,b}) \min\{f(x) : x \in \Pi_{a,b}\}. \tag{5}$$

З останньої нерівності отримуємо

$$h_F(\sigma) = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln F(t\sigma) \ge a, \tag{6}$$

звідки, враховуючи довільність a, маємо $h_F(\sigma) = +\infty$, тобто $\sigma \in \gamma(F)$ і, отже, $\gamma(\nu) \subset \gamma(F)$.

Припустимо тепер, що $\sigma \notin \gamma(\nu)$, тоді $h_\nu(\sigma) = k < +\infty$. Тому, послідовно маємо

$$F(t\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}^p_+} e^{t\langle x,\sigma\rangle} f(x)\nu(dx) \le e^{kt} \int\limits_{\mathbb{R}^p_+} f(x)\nu(dx) = e^{kt}F(0), \tag{7}$$

тобто

$$h_F(\sigma) \le k = h_\nu(\sigma) < +\infty \tag{8}$$

і, отже, $\sigma \notin \gamma(F)$. Звідси, $\gamma(F) \subset \gamma(\nu)$, що разом з протилежним включенням $\gamma(\nu) \subset \gamma(F)$ дає $\gamma(F) = \gamma(\nu)$.

2. Нехай тепер $\sigma \in \gamma_0(\nu) \setminus \gamma(\nu)$, тобто $0 < h_\nu(\sigma) < +\infty$. Тоді існують $a > 0$ і $b > 0$ такі, що $\nu(\Pi_{a,b}) > 0$, і, як вище, отримаємо нерівність (5), а з неї нерівність (6), з якої, враховуючи, що $a > 0$ матимемо, що $h_F(\sigma) > 0$, тобто $\sigma \in \gamma_0(F)$ і, отже, $\gamma_0(\nu) \subset \gamma_0(F)$.

Якщо тепер $\sigma \notin \gamma_0(\nu)$, то $k = h_\nu(\sigma) \leq 0$, тому з нерівності (7) отримуємо $F(t\sigma) \leq F(0)$ і, отже, $h_F(\sigma) \leq 0$, тобто $\sigma \notin \gamma_0(F)$. Звідси $\gamma_0(F) \subset \gamma_0(\nu)$ і остаточно $\gamma_0(\nu) = \gamma_0(F)$.

3. Нехай тепер $\sigma \in \gamma(F) = \gamma(\nu)$. Тоді для кожного $a > 0$ існує $b > a$ таке, що $\nu(\Pi_{a,b}) > 0$. Тому для кожного $x \in \Pi_{a,b} \cap \operatorname{supp} \nu$

$$\ln \mu(\sigma t, F) \geq \ln f(x) + t\langle \sigma, x\rangle \geq \ln f(x) + at, \tag{9}$$

тобто

$$h_\mu(\sigma) \geq a, \tag{10}$$

звідки, завдяки довільності a, отримуємо $h_\mu(\sigma) = +\infty$. Отже, $\sigma \in \gamma(\mu)$ та $\gamma(F) = \gamma(\nu) \subset \gamma(\mu)$. Подібно, якщо $\sigma \in \gamma_0(F) \setminus \gamma(F)$, то існують $0 < a < b < +\infty$ такі, що $\nu(\Pi_{a,b}) > 0$. Тому для кожного $x \in \Pi_{a,b} \cap \operatorname{supp} \nu$ виконується нерівність (9), звідки отримуємо (10). Отже, $\sigma \in \gamma_0(\mu)$ і $\gamma_0(F) \subset \gamma_0(\mu)$. Твердження 1 доведено повністю. $\square$

Подібно доводяться наступні твердження

Твердження 2. *Для кожного* $\sigma \in \mathbb{R}^p$

$$h_F(\sigma) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln F(t\sigma) = h_\nu(\sigma).$$

Твердження 3. *Якщо* $\sup\{f(x) : x \in \operatorname{supp} \nu\} = C < +\infty$, *то* $\gamma(F) = \gamma(\mu) = \gamma(\nu)$ *і* $\gamma_0(F) = \gamma_0(\mu) = \gamma_0(\nu)$.

Твердження 4. *Якщо* $\sup\{f(x) : x \in \operatorname{supp} \nu\} < +\infty$, *то для кожного* $\sigma \in \mathbb{R}^p$

$$h_\mu(\sigma) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(t\sigma, F) = h_\nu(\sigma).$$

Останнє твердження і твердження 2 випливають відповідно з опуклості для кожного $\sigma \in \mathbb{R}^p$ функцій $\ln \mu(t\sigma, F)$ і $\ln F(t\sigma)$, як функцій змінної $t > 0$. Опуклість функції $\ln \mu(t\sigma, F)$, як і опуклість функції $\ln \mu(\sigma, F)$, як функції від змінної $\sigma \in \mathbb{R}^p$, перевіряється безпосередніми обчисленнями. Подібне є правильним і стосовно функції $\ln F(\sigma)$.

Твердження 5. *Функція* $\ln F(\sigma)$ *— опукла, як функція від* $\sigma \in \mathbb{R}^p$.

Для доведення твердження 5 досить скористатись нерівністю Гельдера. Власне, твердження 5 отримаємо із загальнішого твердження 6. Нескладно тепер помітити, що є правильним наступне твердження.

Твердження 5′. *Для кожного конуса* $K \subset \mathbb{R}^p$ *з вершиною у початку координат* O *такого, що* $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$,

$$\lim_{|\sigma|\to+\infty,\, \sigma\in K} \frac{\ln F(\sigma)}{|\sigma|} = +\infty.$$

Твердження 6. *Нехай інтеграл*

$$F(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}^p_+} g(\sigma, x)\nu(dx)$$

існує для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$, *міра* ν *така, як в означенні інтегралу (1), а функція* g *— додатна на* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p_+$ *і така, що* $\ln g(\sigma, x)$ *опукла функція від* $\sigma \in \mathbb{R}^p$ *для кожного* $x \in \mathbb{R}^p_+$. *Тоді функція* $\ln F(\sigma)$ *опукла на* $\mathbb{R}^p$.

З опуклості $\ln g(\sigma, x)$ випливає

$$g(q\sigma^{(1)} + (1-q)\sigma^{(2)}, x) \le (g(\sigma^{(1)}, x))^q (g(\sigma^{(2)}, x))^{1-q}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^p_+$, будь-яких $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)} \in \mathbb{R}^p$ та $0 < q < 1$. Залишається скористатись нерівністю Гельдера.

3. Асимптотичні співвідношення за обмежень лише на міру. Нехай $\nu(a,b] = \nu(\{x \in \mathbb{R}^p_+ : a < \|x\| \le b\})$, а $\operatorname{meas}_p(E)$ — Лебегова міра на $\mathbb{R}^p$ вимірної множини E. Спочатку доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай $F \in S_p(\nu)$. Якщо $\omega \in L_2$ і*

$$(\exists \psi_1 \in L_1^+)\,(\exists \psi_2 \in L_1) : \varlimsup_{t\to+\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln^+ \nu\left(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}\right] \le d, \tag{11}$$

то

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \le d + o(1) \tag{12}$$

при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \backslash E$) для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат (в точці $O = (0, \ldots, 0)$) такого, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$; множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$\operatorname{meas}_p(E \cap C(R)) = O(R^{p-1}), R \to +\infty,$$

$C(R)$ — прямий необмежений циліндр з віссю $\{\sigma \in \mathbb{R}^p : \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_p\}$, в основі якого $(p-1)$-вимірна куля радіуса R з центром у початку координат.

Доведення. Зазначимо, що позаяк $\max\{\|x\|^s, 1\} \le e^{\|x\|^s}$ для $s \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}^p_+$, то $\|x\|^s e^{\langle x, \sigma\rangle} \le e^{\langle x, \sigma + s e_0\rangle}$ для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і зі збіжності для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$ інтегралу (1) випливатиме нескінченна диференційовність функції $F(\sigma)$, і тому міркування з п. 2, що привели до нерівностей (3) і (4) є коректними.

Як і в [1], доведемо насамперед, що

$$\ln F(\sigma) \le (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{13}$$

при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$).

За умовою $\omega \in L_2$ маємо $\dfrac{1}{\omega'(t)} = O(t)$ $(t \to +\infty)$, тому з (11) випливає

$$\ln^+ \nu\left(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}\right] = O(\psi_1^{-1}(t)), \quad t \to +\infty. \tag{14}$$

Перевіримо, чи існує функція $\psi_0 \in L_1^+$ така, що

$$\ln^+ \nu\left(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}\right] = o(\psi_0^{-1}(t)), \quad 0 \le \psi_1(0) \le t \to +\infty. \tag{15}$$

Для цього визначимо $\psi_0(x)$ і при $x < 0$ так, щоб $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{\psi_0(x)} < +\infty$. Враховуючи, що для кожного $A > 0$

$$\int_0^A \frac{dt}{\psi(t)} = \int_{\psi(0)}^{\psi(A)} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \frac{A}{\psi(A)} + \int_{\psi(0)}^{\psi(A)} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt,$$

отримаємо, що за умови $t = O(\psi(t))$ $(t \to +\infty)$, $\psi \in L_1^+$ тоді і тільки тоді, коли

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt < +\infty. \tag{16}$$

Проте, якщо функція $\psi(t)$ неспадна, то для $0 < B < A < +\infty$

$$\int_B^A \frac{dt}{\psi(t)} \geq \frac{A-B}{\psi(A)}, \quad \int_B^{+\infty} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2} dt \geq \frac{\psi^{-1}(B)}{B},$$

звідки, якщо $\psi \in L_1^+$ або для ψ виконується (16), то $t = o(\psi(t))$ $(t \to +\infty)$. Отже, якщо $\psi_1 \in L_1^+$, то для ψ_1 виконується умова (16) з $\psi \equiv \psi_1$. Залишається тепер покласти $l(t) = \int_t^{+\infty} \psi_1^{-1}(u) u^{-2}\, du$ і ψ_0 вибрати таку, що $\psi_0(x)$ при $x \geq 0$ дорівнює оберненій функції до функції $(l(t))^{-1/2}\psi_1^{-1}(t)$ при $t \geq \psi_1(0)$, і $\psi_0(x) = \psi_0(0)(1+x^2)$ при $x < 0$. Справді, $(l(t))^{-1/2} \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$, $\psi_0(0) = \psi_1(0) > 0$ і

$$\int_{\psi_1(0)}^{+\infty} \frac{\psi_0^{-1}(t)}{t^2} dt = -\int_{\psi_1(0)}^{+\infty} (l(t))^{-1/2} dl(t) = 2(l(\psi_1(0)))^{1/2} < +\infty.$$

Тобто $\psi_0 \in L_1^+$, а також

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} = \frac{1}{\psi_0(0)} \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi_0(x)} < +\infty.$$

Залишилось зауважити, що $\psi_1^{-1}(t) = o(\psi_0^{-1}(t))$ $(t \to +\infty)$ і з (14) негайно отримаємо (15).

Нехай тепер для $b \in \mathbb{R}^p$ і $e_0 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^p$

$$E_1(b,\psi) = \{\sigma = b + te_0 \,:\, g''(t) \geq \psi(g'(t))\}, \quad E_1(\psi) = \bigcup_{||b||=0} E_1(b,\psi)$$

$$E_2(b,\psi) = \{\sigma = b + te_0 \,:\, g'(t) \geq \psi(g(t))\}, \quad E_2(\psi) = \bigcup_{||b||=0} E_2(b,\psi).$$

Нехай для $t \geq \psi_1(0) + 1$

$$\varepsilon(t) = \sup\left\{ \frac{1}{\psi_0^{-1}(u)} \ln^+ \nu \left(u - \sqrt{\psi_2(u)}; u + \sqrt{\psi_2(u)} \right] \,:\, u \geq t \right\}$$

і для $t < \psi_1(0) + 1$

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{1}{\psi_0^{-1}(t)} \ln^+ \nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] \right\}^{\nu},$$

де $a^{\nu}(t)$ для функції $a(t)$ означає $a^{\nu}(t) = 0$ для $t < \psi_1(0) + 1$, і таких t, що $a(t)$ — не визначено і $a^{\nu}(t) = \max\{a(t); 0\}$ у протилежному випадку.

За умовою (15) $\varepsilon(t) \searrow 0$ $(t \to +\infty)$. Зауважимо, що $\nabla \ln F(\sigma) = g'(t)$ при $\sigma = b + te_0$, де $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial \sigma_1} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial \sigma_p}$.

Застосовуючи тепер лему 1 з функціями $g_0(t) = g'(t)$, маємо

$$\psi(t) = \tilde{\psi}_2(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\psi_2(t), & t \geq 0, \\ \psi_2(0)\Big(\dfrac{1}{c} + t^2\Big), & t < 0. \end{cases}$$

Для всіх $\sigma \notin E_1(\tilde{\psi}_2)$ маємо при $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \tilde{\psi}_2(g'(t)) = \tilde{\psi}_2(\nabla \ln F(\sigma)),$$

і отже,

$$\ln F(\sigma) \leq \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \varepsilon(\nabla \ln F(\sigma))\psi_0^{-1}(\nabla \ln F(\sigma)).$$

Застосовуючи лему 1 з функціями $g_0(t) = g(t)$ і $\psi(t) = \psi_0(t)$, при $\sigma \notin E_2(\psi_0)$ і $\sigma = b + te_0$, отримаємо

$$\psi_0^{-1}(\nabla \ln F(\sigma)) = \psi_0^{-1}(g'(t)) \leq g(t) = \ln F(\sigma),$$

тобто

$$\ln F(\sigma) \leq \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \varepsilon(\nabla \ln F(\sigma)) \ln F(\sigma). \tag{17}$$

Далі, за твердженням 5 функція $\ln F(b + te_0)$ опукла при кожному фіксованому $b \in \mathbb{R}^p$. Тому для кожного фіксованого $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і $\Delta t > 0$ маємо

$$\frac{\ln F(\sigma + e_0\Delta t) - \ln F(\sigma)}{|e_0|\Delta t} \geq \frac{\ln F(\sigma + e_0\Delta t) - \ln F(0)}{|\sigma + e_0\Delta t|}.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p$

$$\nabla \ln F(\sigma) \geq \frac{\ln F(\sigma) - \ln F(0)}{|\sigma|}. \tag{18}$$

Залишилось зауважити, що за твердженням 5′ $\dfrac{1}{|\sigma|} \ln F(\sigma) \to +\infty$ $(|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K)$, і тому з (18) маємо $\nabla \ln F(\sigma) \to +\infty$ при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K)$. Позаяк $\nabla \ln F(\sigma) \to +\infty$ $(|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K)$, із (17) при $|\sigma| \to +\infty$, $\sigma \in K \setminus (E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\psi_0))$ отримаємо співвідношення (13). Із співвідношення (13) при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E_*)$ дістаємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \frac{1}{2} \ln F(\sigma), \tag{19}$$

де $E_* = E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\psi_0)$.

Визначимо для $t \geq \psi_1(0) + 1$

$$d(t) = \sup\{\omega'(\psi_1^{-1}(u)) \ln^+ \nu \left(u - \sqrt{\psi_2(u)}; u + \sqrt{\psi_2(u)}\right] \,:\, u \geq t\}.$$

Нехай

$$l_1(t) = \int_t^{+\infty} \frac{du}{\psi_2(u)}, \quad \psi_2^*(t) = \psi_2(t)(l_1(t))^{1/2}.$$

Зауважимо, що $\psi_2^*(t) < \psi_2(t)$ $(t \to +\infty)$ і

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi_2^*(t)} = -\int\limits_0^{+\infty} (l_1(t))^{-1/2} dl_1(t) = 2(l_1(0))^{1/2} < +\infty,$$

тобто $\psi_2^*(t) \in L_1$. Крім цього, $l_1(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$. Виберемо $c = c(\sigma) = (l_1(\nabla \ln F(\sigma)))^{-\frac{1}{2}}$ і до нерівності (3) застосуємо лему 1 з функціями $g_0(t) = g'(t)$. Тоді

$$\psi(t) = \psi_3(t) = \begin{cases} (l_1(t))^{1/2}\psi_2^*(t), & t \geq 0, \\ l_1(0)^{1/2}\psi_2^*(0)(1+t^2), & t < 0. \end{cases}$$

Для всіх $\sigma \notin E_1(\psi_3)$ послідовно маємо при $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \psi_3(g'(t)) = \psi_3(\nabla \ln F(\sigma)),$$

тобто, враховуючи, що згідно з (18)

$$\nabla \ln F(\sigma) \to +\infty \ (|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K), \quad cg''(t) \leq \psi_2(\nabla \ln F(\sigma))$$

і отже, при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E_1(\psi_3))$

$$F(\sigma) \leq \frac{c}{c-1}\mu(\sigma, F)\nu\left(\overline{u} - \sqrt{\psi_2(\overline{u})}; \overline{u} + \sqrt{\psi_2(\overline{u})}\right],$$

де $\overline{u} = \nabla \ln F(\sigma)$. Звідси, за теоремою Лагранжа про скінченні прирости, скориставшись монотонністю $\omega'(t)$, при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E_1(\psi_3))$, маємо

$$\begin{gathered} \omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq \\ \leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \left\{ \ln \frac{c}{c-1} + \ln^+ \nu\left(\overline{u} - \sqrt{\psi_2(\overline{u})}; \overline{u} + \sqrt{\psi_2(\overline{u})}\right] \right\} = \\ = o(1) + \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \ln^+ \nu\left(\overline{u} - \sqrt{\psi_2(\overline{u})}; \overline{u} + \sqrt{\psi_2(\overline{u})}\right]. \end{gathered} \tag{20}$$

Залишається, як і вище, знову застосувати лему 1 цього разу з функціями $g_0(t) = g(t)$ і $\psi(t) = \psi_0(t/2)$. Тому при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus (E_1(\psi_3) \cup E_2(\psi_0(t/2)) \cup E_*)$ послідовно за допомогою нерівності (19) для $\sigma = b + te_0$ маємо

$$\begin{gathered} \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \leq \omega'\left(\frac{1}{2}\ln F(\sigma)\right) = \omega'\left(\frac{1}{2}g(t)\right) \leq \omega'(\psi_0^{-1}(g'(t))) = \\ = \omega'(\psi_1^{-1}(\nabla \ln F(\sigma))) = \omega'(\psi_1^{-1}(\overline{u})), \end{gathered}$$

позаяк $\overline{u} = \nabla \ln F(\sigma) \to +\infty$ $(|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K)$. Тому при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K, \sigma \notin E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\psi_0) \cup E_1(\psi_3) \cup E_2(\psi_0(t/2)) \equiv E)$ із (20) отримуємо

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq d(\overline{u}) + o(1).$$

Залишилось пригадати, що $\overline{\lim}_{u \to +\infty} d(u) = d$.

Доведемо тепер, що $\mathrm{meas}_p(E \cap C(R)) = O(R^{p-1})$ $(R \to +\infty)$, де $C(R)$ — необмежений циліндр в $\mathbb{R}^p$, описаний у вступі. Перевіримо, що останнє співвідношення виконується для $E_1(\psi)$. Для решти множин, що утворюють E, перевірка здійснюється подібно. Справді, нехай $E_1(b)$ та E_1 — множини, у які перейдуть відповідно множини $E_1(b,\psi)$ і $E_1(\psi)$ при повороті системи координат, при якому промінь $\{x=(x_1,\ldots,x_p) : x_1 = x_2 = \cdots = x_p > 0\}$ переходить у додатну піввісь Ox_1. Тоді, циліндр $C(R)$ перейде у циліндр $C'(R)=\{x=(x_1,\ldots,x_p) : x_2^2+\cdots+x_p^2 \le R^2\}$, і для $K(R)=\{x=(x_2,\ldots,x_p) : x_2^2+\cdots+x_p^2\le R^2\}$ маємо

$$\mathrm{meas}_p(E_1(\psi)\cap C(R)) = \mathrm{meas}_p(E_1\cap C'(R)) = \int\limits_{K(R)}\Bigg(\int\limits_{E_1(b)} dx_1\Bigg)dx_2\ldots dx_p.$$

Зауважимо, що насправді $E_1(b)=E_1(x_2,\ldots,x_p)$. Враховуючи, що за лемою 1

$$\mathrm{meas}_1 E_1(b) = \mathrm{meas}_1 E_1(b,\psi) = A < +\infty,$$

де $A=A(\psi)$ стала, що залежить лише від ψ і не залежить від $b\in\mathbb{R}^p$, звідси отримаємо, що $\mathrm{meas}_p(E_1(\psi)\cap C(R)) \le BA(\psi)R^{p-1}$. Тому

$$\mathrm{meas}_p(E\cap C(R)) \le B(A(\tilde{\psi}_2)+A(\psi_0)+A(\psi_3)+A(\psi_0(t/2)))R^{p-1}.$$

Остання нерівність завершує доведення теореми 1. □

4. Асимптотичні співвідношення за обмежень на швидкість зростання функції. Для $0<r,R<+\infty$ нехай $C'(r,R)$ — обмежений "справа" циліндр $\{x=(x_1,\ldots,x_p) : x_1\le r, \quad x_2^2+\cdots+x_p^2\le R^2\}$, а $C(r,R)$ — його образ при повороті системи координат такому, що додатна піввісь Ox_1 переходить у промінь $\{x=(x_1,\ldots,x_p) : x_1=x_2=\cdots=x_p>0\}$.

Нехай $\Phi\in L^+$ і $\Phi(t)/t\to+\infty$ $(t\to+\infty)$. Вслід за [11] визначимо класи $L_1(\Phi)$ і $L_2(\Phi)$ функцій $\psi\in L$ таких, що відповідно виконуються умови

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^{\Phi(t)}\frac{du}{\psi(u)}=0,\quad \varliminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^{\Phi(t)}\frac{du}{\psi(u)}=0.$$

З доведення теореми 1 випливає, що одним з основних його моментів є встановлення асимптотичної нерівності (13). Тому у цьому пункті почнемо із встановлення умов достатніх для справедливості зовні виняткових множин нерівності (13).

Крім цього, якщо існує така множина $E\subset\mathbb{R}^p$, що для всіх $\sigma\in E$ і деякої сталої $h>0$

$$\ln F(\sigma) \ge (1+h)\ln\mu(\sigma,F), \tag{21}$$

то у випадку, коли $\omega\in L_2$ для $\sigma\in E$ маємо

$$\begin{gathered}\omega(\ln F(\sigma))-\omega(\ln\mu(\sigma,F)) \ge\\ \ge (\ln F(\sigma)-\ln\mu(\sigma,F))\omega'(\ln F(\sigma)) \ge\\ \ge \left(1-\frac{1}{1+h}\right)\ln F(\sigma)\omega'(\ln F(\sigma)) \ge c\frac{h}{h+1},\end{gathered} \tag{22}$$

де $c>0$ — стала така, що $t\omega'(t)\ge c>0$.

Тобто, якщо для всіх $\sigma \in E$ виконується (21), то для всіх $\sigma \in E$ виконується (22) і, отже, якщо нерівність (13) не виконується для $\sigma \in E$, то нерівність (12) з $d < ch/(h+1)$, зокрема $d = 0$, не виконується для всіх $\sigma \in E$. Очевидно, якщо $\omega \in L_2$ і така, що $t\omega'(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, то у цьому випадку нерівність (12) з $d = 0$ не виконується для всіх $\sigma \in E \cap K$, де $K \subset \gamma(F)$.

Доведемо спочатку наступне твердження.

Твердження 7. *Нехай $\Phi \in L^+$ і $F \in S_p(\nu)$. Якщо*

$$\ln F(\sigma) \leq \Phi(\|\sigma\|) \quad (\|\sigma\| \geq c_0 > 0) \tag{23}$$

й існують $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що

$$\overline{\lim} t \to +\infty \to \overline{\lim} \frac{1}{\psi_1^{-1}(t)} \ln^+ \nu \left(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}\right] = 0, \tag{24}$$

то співвідношення (13) виконується при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E)$ для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат (в точці O) такого, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$; множина E така, що

$$\mathrm{meas}_p(E \cap C(r,R)) = o(rR^{p-1}) \tag{25}$$

при $r \to +\infty$ рівномірно за $R > 0$; тут $\nu(a,b] = \nu\left(\{x \in \mathbb{R}_+^p : a < \|x\| \leq b\}\right)$.

Зауваження. За умов твердження 7, зокрема, маємо

$$\mathrm{meas}_p(E \cap C(r,r)) = o(r^p), \quad r \to +\infty;$$

при цьому $\mathrm{meas}_p(C(r,r) \cap \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| \geq 0\}) = r^p \mathrm{const}$.

Доведення твердження 7. Використовуємо позначення з доведення теореми 1. Позаяк $\frac{1}{|\sigma|} \ln F(\sigma) \to +\infty$ $(|\sigma| \to +\infty,\ \sigma \in K)$, то за (18) $\nabla \ln F(\sigma) \to +\infty$ $(|\sigma| \to +\infty,\ \sigma \in K)$. Застосовуючи спочатку лему 2 з функціями $g_0(t) = g'(t)$ і

$$\psi(t) = \tilde{\psi}_2(t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{c}\psi_2(t), & t \geq 0, \\ \psi_2(0)\Big(\frac{1}{c} + t^2\Big), & t < 0 \end{cases},$$

а потім з функціями $g_0(t) = g(t)$ і

$$\psi(t) = \tilde{\psi}_1(t) \equiv \begin{cases} \psi_1(t), & t \geq 0, \\ \psi_1(0)(1+t^2), & t < 0 \end{cases},$$

відповідно маємо при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K)$ і $\sigma \notin E_1(\tilde{\psi}_2)$, $\sigma = b + te_0$

$$g''(t) \leq \tilde{\psi}_2(g'(t)) = \frac{1}{c}\psi_2(\nabla \ln F(\sigma))$$

і при $\sigma \notin E_2(\tilde{\psi}_1)$

$$\psi_1^{-1}(\nabla \ln F(\sigma)) = \psi_1^{-1}(g'(t)) \leq g(t) = \ln F(\sigma).$$

Тому з нерівності (3) при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus (E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\tilde{\psi}_1))$) та $\sigma = b + te_0$ отримуємо з $\overline{u} = \nabla \ln F(\sigma)$

$$\ln F(\sigma) \le \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + \ln \nu(\overline{u} - \sqrt{\psi_2(\overline{u})}, \overline{u} + \sqrt{\psi_2(\overline{u})}] =$$
$$= \ln \frac{c}{c-1} + \ln \mu(\sigma, F) + o(\psi_1^{-1}(\overline{u})) = \ln \mu(\sigma, F) + o(\ln F(\sigma)),$$

тобто асимптотичну нерівність (13). Залишається для множини $E = E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\tilde{\psi}_1)$ отримати оцінку (25). Нехай E_1 і E_2 — множини, у які перейдуть відповідно множини $E_1(\tilde{\psi}_2)$ і $E_2(\tilde{\psi}_1)$ при повороті системи координат такому, що промінь $\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) : \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p > 0\}$ переходить у додатну піввісь Ox_1. Нехай, крім цього, $E_1(b) = E_1(x_2, \dots, x_p)$ і $E_2(b) = E_2(x_2, \dots, x_p)$ — образи відповідно множин $E_1(b, \tilde{\psi}_2)$ і $E_2(b, \tilde{\psi}_1)$ при описаному повороті системи координат. Тоді

$$\operatorname{meas}_p(E_1(\tilde{\psi}_2)) \cap C(r, R)) = \operatorname{meas}_p(E_1 \cap C'(r, R)) =$$
$$= \int\limits_{K(R)} \Bigg(\int\limits_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 \Bigg) dx_2 \dots dx_p. \tag{26}$$

Позаяк при описаному перетворенні простору $\mathbb{R}^p$ множині $\{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 = 0\}$ відповідає множина $\{\sigma = b : \|b\| = 0\}$, то за лемою 2

$$\sup\Bigg\{ \int\limits_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 : (x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p-1};\ \|b\| = 0 \Bigg\} \le$$
$$\le \sup\{\operatorname{meas}_1(E_1(b, \tilde{\psi}_2) \cap (-\infty, r]) : \|b\| = 0\} \le$$
$$\le \sup\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\ln F(b + re_0)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_2(t)} : \|b\| = 0 \Bigg\} \le$$
$$\le \sup\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\Phi(\|b\| + pr)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_2(t)} : \|b\| = 0 \Bigg\} = \int\limits_{-\infty}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\tilde{\psi}_2(t)} =$$
$$= \frac{1}{\psi_2(0)} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{c}} + c \int\limits_{0}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_2(t)} = c \int\limits_{0}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_2(t)} + \tilde{c},$$

де $\tilde{c} = \dfrac{\pi\sqrt{c}}{2\psi_2(0)}$. Звідси та з (26) отримаємо

$$\operatorname{meas}_p(E_1(\tilde{\psi}_2) \cap C(r, R)) \le \operatorname{meas}_{p-1} K(R) \Bigg(\tilde{c} + c \int\limits_{0}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_2(t)} \Bigg) \le$$
$$\le c^* R^{p-1} \Bigg(\int\limits_{0}^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_2(t)} + 1 \Bigg), \tag{27}$$

де c^* — деяка абсолютна стала, залежна лише від p і $\psi_2(0)$. Подібно отримуємо

$$\begin{gathered}\mathrm{meas}_p(E_2(\tilde\psi_1)\cap C(r,R))=\mathrm{meas}(E_2\cap C'(r,R))=\\=\int\limits_{K(R)}\bigg(\int\limits_{E_2(b)\cap(-\infty,r]}dx_1\bigg)dx_2\dots dx_p\le\\ \le\mathrm{meas}_{p-1}K(R)\sup\bigg\{\int\limits_{E_2(b)\cap(-\infty,r]}dx_1\,:\,(x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^{p-1}\bigg\}=\\=\mathrm{meas}_{p-1}K(R)\sup\{\mathrm{meas}_1(E_2(b,\tilde\psi_1)\cap(-\infty,r])\,:\,\|b\|=0\}\le\\ \le\mathrm{meas}_{p-1}K(R)\sup\bigg\{\int\limits_{-\infty}^{\ln F(b+re_0)}\frac{dt}{\tilde\psi_1(t)}\,:\,\|b\|=0\bigg\}\le\\ \le\mathrm{meas}_{p-1}K(R)\sup\bigg\{\int\limits_{-\infty}^{\Phi(\|b\|+pr)}\frac{dt}{\tilde\psi_1(t)}\,:\,\|b\|=0\bigg\}=\\=\mathrm{meas}_{p-1}K(R)\int\limits_{-\infty}^{\Phi(pr)}\frac{dt}{\tilde\psi_1(t)}\le c^{**}R^{p-1}\bigg\{\int\limits_0^{\Phi(pr)}\frac{dt}{\psi_1(t)}+1\bigg\},\end{gathered}\tag{28}$$

де c^{**} — деяка стала, залежна лише від p і $\psi_1(0)$. Тобто, з (27) і (28), використовуючи умови $\psi_1\in L_1^+(\Phi)$, $\psi_2\in L_1(\Phi)$, отримуємо

$$\mathrm{meas}_p(E\cap C(r,R))\le R^{p-1}\bigg(c^*+c^{**}+c^*\int\limits_0^{\Phi(pr)}\frac{dt}{\psi_2(t)}+c^{**}\int\limits_0^{\Phi(pr)}\frac{dt}{\psi_1(t)}\bigg)=R^{p-1}r\alpha_1(r),\tag{29}$$

де $\alpha_1(r)=\alpha(r,p,\psi_1,\psi_2,\Phi)$ — деяка функція, залежна лише від r,p,ψ_1,ψ_2 і Φ така, що $\alpha_1(r)\to+0$ $(r\to+\infty)$. Твердження 7 доведено. □

Подібно до твердження 7 доводимо наступне твердження.

Твердження 8. *Нехай $\Phi\in L^+$ і $F\in S_p(\nu)$. Якщо існує послідовність $\sigma^{(j)}\in\mathbb{R}^p$ така, що $\|\sigma^{(j)}\|\to+\infty$ $(j\to+\infty)$ і*

$$\ln F(\sigma)\le\Phi(\|\sigma\|)\quad(\sigma=\sigma^{(j)},j\ge1),\tag{30}$$

а також існують функції $\psi_1\in L_1^+(\Phi)$, $\psi_2\in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова (24), то співвідношення (13) виконується при $|\sigma|\to+\infty$ $(\sigma\in K\setminus E)$ для кожного конуса $K\subset\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат (в точці O) такого, що $\overline{K}\setminus\{O\}\subset\gamma(F)$; множина E така, що

$$\mathrm{meas}_p(E\cap C(r,R))=\alpha_2(r)rR^{p-1},\tag{31}$$

де $\alpha_2(r)=\alpha_2(r,p,\psi_1,\psi_2,\Phi)$ — деяка функція, залежна лише від r, p, ψ_1, ψ_2, Φ і така, що

$$\alpha_2(r)\to0,\quad r=\frac1p\|\sigma^{(j)}\|\to+\infty,\,j\to+\infty.$$

Доведення твердження 8. Слідуємо за доведенням твердження 7, відзначаючи лише нові моменти у міркуваннях. Позаяк у доведенні твердження 7 умова (23) використовувалась лише при отриманні співвідношення (29), а доведення того, що асимптотична нерівність (13) виконується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E, E = E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\tilde{\psi}_1)$) використовувало лише умови $\psi_1 \in L_1^+$, $\psi_2 \in L_1$, (28) та $\dfrac{1}{|\sigma|} \ln F(\sigma) \to +\infty$ ($|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K \subset \gamma(F)$), то можна вважати (повторюючи міркування з доведення твердження 7), що і у випадку твердження 8 співвідношення (13) виконується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E, E = E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\tilde{\psi}_1)$), де $E_1(\tilde{\psi}_2)$ і $E_2(\tilde{\psi}_1)$, описані у доведенні твердження 7, при цьому, слідуючи за доведенням (27) і (28), отримуємо

$$\mathrm{meas}_p(E \cap C(r,R)) \le R^{p-1} \sup\Big\{ \int\limits_{-\infty}^{\ln F(b+re_0)} \Big(\frac{1}{\tilde{\psi}_1(t)} + \frac{1}{\tilde{\psi}_2(t)}\Big) dt \, : \, \|b\| = 0 \Big\}.$$

Звідки, для $r = \dfrac{1}{p}\|\sigma^{(j)}\|$ за умовою (30) одержуємо

$$\mathrm{meas}_p(E \cap C(r,R)) \le R^{p-1}\Big(c^* + c^{**} + c^* \int\limits_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_2(t)} + c^{**} \int\limits_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_1(t)}\Big).$$

У випадку $r = \|\sigma^{(j)}\|/p > 0$ та $\mathrm{meas}_p(E \cap C(r,R)) \le R^{p-1}(c^* + c^{**})$ у випадку $r = \|\sigma^{(j)}\|/p \le 0$ зі сталими c^* і c^{**} тими ж, що і у доведенні твердження 7.

Звідси за умовами $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ отримуємо, що є правильною рівність (31) з функцією $\alpha_2(r)$ такою, що $\alpha_2(r) \to 0$ при $r = \|\sigma^{(j)}\|/p \to +\infty$. Твердження 8 доведено. □

Із тверджень 7 і 8 у вигляді наслідків отримуємо наступні теореми.

Теорема 2. *Якщо для $\Phi \in L^+$ і функції $F \in S_p(\nu)$ виконуються умови (23) і*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \int\limits_0^{2\Phi(r)} \frac{d \ln \nu(0,t]}{t} = 0, \tag{32}$$

то співвідношення (13) є правильним при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$), де K і E, описані у твердженні 7, $\nu(0,t] = \nu(\{x : 0 < \|x\| \le t\})$.

Теорема 3. *Якщо для $\Phi \in L^+$ і функції $F \in S_p(\nu)$ виконуються умови (30) і (32), то співвідношення (13) є правильним при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$), де K і E, описані у твердженні 8.*

Доведення теорем 2 і 3. проведемо одночасно. Досить показати, що якщо умова (32) виконується, то для деяких функцій $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ виконується умова (24).

Нехай $\nu_0(t) = \ln \nu(0;t]$. В [11, с.13–14] (див. також [12]) доведено фактично наступне твердження.

Лема 3. *Нехай $\Phi_1 \in L^+$. Якщо $\nu_0(t)$ — додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція така, що*

$$\frac{1}{r} \int\limits_0^{\Phi_1(r)} \frac{d\nu_0(t)}{t} \to 0 (r \to +\infty),$$

то існує функція $\psi_1 \in L_1^+(\Phi_1)$, для якої

$$\nu_0(t) = o(\psi_1^{-1}(t)), \quad t \to +\infty.$$

Нехай тепер $\nu_0(t) = \ln \nu(0; 2t]$, $\Phi_1(r) = 2\Phi(r)$. Тоді за лемою 3 існує функція $\psi_1 \in L_1^+(\Phi_1) \subset L_1^+(\Phi)$, така, що

$$\ln \nu(0; 2t] = o(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty).$$

Залишається вибрати $\psi_2(t) = t^{3/2}$ і зауважити, що $\psi_2 \in L_1^+(\Phi)$ і при $t \geq 1$

$$\ln \nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] \leq \ln \nu(0; 2t] = o(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty),$$

тобто виконується умова (24) з функціями $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$. Завершує доведення теорем 2 і 3 застосування тверджень 7 і 8 відповідно. □

За допомогою тверджень 7 і 8 отримуємо також наступні теореми.

Теорема 4. *Нехай $\Phi \in L^+$, $\omega \in L_2^0$ і $F \in S_p(\nu)$. Якщо виконується умова (23) і існують функції $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln^+ \nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] \leq d, \tag{33}$$

то нерівність (12) справджується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат (в точці $O = (0, \dots, 0)$) такого, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$; множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$\mathrm{meas}_p(E \cap C(r, R)) = o(rR^{p-1})$$

при $r \to +\infty$ рівномірно за $R > 0$.

Теорема 5. *Нехай $\Phi \in L^+$, $\omega \in L_2^0$ і для $F \in S_p(\nu)$ виконується умова (30) вздовж деякої послідовності $\sigma = \sigma^{(j)} \in \mathbb{R}^p$, $\|\sigma^{(j)}\| \to +\infty$ ($j \to +\infty$). Якщо існують функції $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$ і $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова (33), то нерівність (12) справджується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат (в точці $O = (0, \dots, 0)$) такого, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F)$; множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що*

$$\mathrm{meas}_p(E \cap C(r, R)) = \alpha_3(r) r R^{p-1}$$

для деякої функції $\alpha_3(r) = \alpha_3(r, p, \psi_1, \psi_2, \Phi)$ такої, що

$$\alpha_3(r) \to 0, \quad r = \frac{1}{2p} \|\sigma^{(j)}\| \to +\infty, \, j \to +\infty.$$

Доведення теорем 4 і 5 в основному повторює схему доведення теореми 1 у частині доведення нерівності (12), а у частині встановлення потрібних оуінок величини міри виняткових множин — доведення тверджень 7 і 8. Зокрема, із справедливості умови (33) для функцій $\psi_1 \in L_1^+(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ та умови $1/\ t = O(\omega'(t))$ випливає, що для цих функцій ψ_j — правильне співвідношення (14). Далі доводимо, що існує функція $\psi_0 \in L_1^+(\Phi)$ така, що співвідношення (15) є правильним з функціями $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ і $\psi_0(t)$. Для цього досить довести, що існує функція $\psi_0 \in L_1^+(\Phi)$ така, що $\psi_1^{-1}(t) = o(\psi_0^{-1}(t))$ $(t \to +\infty)$. Доведення цього факту отримуємо з наступного твердження, отриманого фактично при доведенні в [11, с. 13–14], сформульованого вище у лемі 3, твердження.

Лема 4. *Нехай $\Phi_1(t)$, $\nu_0(t)$ — функції такі, як і в лемі 3. Тоді існує функція $\psi_0 \in L^+$ така, що*

$$\nu_0(r) = o(\psi_0^{-1}(r)), \quad \frac{1}{r} \int\limits^{\psi_0^{-1}(\Phi_1(r))} \frac{dx}{\psi_0(x)} \to 0, \quad r \to +\infty.$$

Залишається вибрати тепер $\nu_0(t) = \psi_1^{-1}(t)$, $\Phi_1(r) = \psi_1(\Phi(r))$ і застосувати лему 4. Тобто існує функція $\psi_0 \in L_1^+$ така, що співвідношення (17) є правильним.

Нехай, $d(t)$ — функція, визначена у доведенні теореми 1. Безпосередніми обчисленнями перевіряється, що з умови $\psi \in L_1(\Phi)$ випливає

$$\frac{1}{r} \int\limits^{\Phi(2pr)} \frac{dx}{\psi(x)} \to 0, \quad R \to +\infty. \tag{34}$$

Позаяк $g(t)$ опукла функція, то $g'(t) \nearrow (t \to +\infty)$ і, отже, з умови $\ln F(\sigma) \le \Phi(\|\sigma\|)$ при $\sigma = b + te$, $\|b\| = 0$ маємо для досить великих $t \ge 1$

$$g'(t) \le \frac{1}{t} \int\limits_t^{2t} g'(x)dx \le \frac{g(2t)}{t} \le g(2t) = \Phi(2t). \tag{35}$$

Отже, нехай в нерівності (3) $c(\sigma) \equiv c > 1$ — фіксоване. Тоді, застосовуючи лему 2 з функціями

$$g_0(t) = g'(t), \quad \psi(t) = \tilde{\psi}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}\psi_2(t), & t \ge 0, \\ \psi_2(0)\Big(\dfrac{1}{c} + t^2\Big), & t < 0 \end{cases}$$

і враховуючи, що з (18) за твердженням 5′ $\nabla \ln F(\sigma) \to +\infty$ $(|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K)$, при $\sigma = b + te_0$, $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E_1(\tilde{\psi}_2))$ маємо

$$cg''(t) \le c\tilde{\psi}_2(g'(t)) = \psi_2(\nabla \ln F(\sigma)). \tag{36}$$

При цьому, як і вище, для $r, R > 0$ маємо

$$\operatorname{meas}_p(E_1(\tilde{\psi}_2) \cap C(r,R)) = \operatorname{meas}_p(E_1 \cap C'(r,R)) = \int\limits_{K(R)} \Bigg(\int\limits_{E_1(b) \cap (-\infty, r]} dx_1 \Bigg) dx_2 \dots dx_p,$$

а також, скориставшись нерівністю (35), отримуємо

$$\sup\Big\{\int\limits_{E_1(b)\cap(-\infty,r]} dx_1\,:\,(x_2,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^{p-1},\,\|b\|=0\Big\}\le$$
$$\le\sup\{\mathrm{meas}_1 E_1(b,\tilde\psi_2)\cap(-\infty,r]\,:\,\|b\|=0\}\le$$
$$\le\sup\Big\{\int\limits_{-\infty}^{g'(r)}\frac{dt}{\tilde\psi_2(t)}\,:\,\|b\|=0\Big\}\le\int\limits_{-\infty}^{\Phi(2pr)}\frac{dt}{\tilde\psi_2(t)}.$$

Тому

$$\mathrm{meas}_p(E_1(\tilde\psi_2)\cap C(r,R))\le R^{p-1}\int\limits_{-\infty}^{\Phi(2pr)}\frac{dt}{\tilde\psi_2(t)}=R^{p-1}\Big(\tilde c+c\int\limits_{0}^{\Phi(2pr)}\frac{dt}{\psi_2(t)}\Big),\tag{37}$$

де $\tilde c=\frac{\pi\sqrt{c}}{2\psi_2(0)}$. Скориставшись (34), отримуємо, що

$$\mathrm{meas}_p(E_1(\tilde\psi_2)\cap C(r,R))\le R^{p-1}(\tilde c+cr\tilde\alpha(r)),\tag{38}$$

де $\tilde\alpha(r)\to0$ $(r\to+\infty)$ функція, що залежить лише від p,Φ та ψ_2. Застосовуючи теорему 2, а також лему 2 з функціями

$$g_0(t)=g(t),\quad \psi(t)=\tilde\psi_1(t)=\begin{cases}\psi_1(t), & t\ge0,\\ \psi_1(0)(1+t^2), & t<0\end{cases},$$

при $\sigma=b+te_0$, при $|\sigma|\to+\infty$ $(\sigma\in K\setminus(E\cup E_2(\tilde\psi_1)))$, маємо

$$\omega'(\ln\mu(\sigma,F))\le\omega'((1-\varepsilon_0(\sigma))\ln F(\sigma))\le\omega'((1-\varepsilon_0(\sigma))g(t))\le$$
$$\le\omega'((1-\varepsilon_0(\sigma))\tilde\psi_1^{-1}(g'(t)))\omega'((1-\varepsilon_0(\sigma))\psi_1^{-1}(\nabla\ln F(\sigma))\le$$
$$\le(1+o(1))\omega'(\psi_1^{-1}(\nabla\ln F(\sigma))),\tag{39}$$

де $\varepsilon_0(\sigma)\to+0$ $(|\sigma|\to+\infty)$. При цьому, як і вище для множини $E_2(\tilde\psi_1)$ маємо

$$\sup\Big\{\int\limits_{E_2(b)} dx_1\,:\,(x_2,\dots,x_p),\,\|b\|=0\Big\}\le$$
$$\le\sup\{\mathrm{meas}_1(E_2(b,\tilde\psi_1)\cap(-\infty;r]\,)\,:\,\|b\|=0\}\le$$
$$\le\sup\Big\{\int\limits_{-\infty}^{g(r)}\frac{dt}{\tilde\psi_1(t)}\,:\,\|b\|=0\Big\}=$$
$$=\frac{\pi}{2\psi_1(0)}+\int\limits_{0}^{\Phi(pr)}\frac{dt}{\psi_1(t/2)},$$

звідки,

$$\mathrm{meas}_p(E_2(\tilde{\psi}_1) \cap C(r,R)) = \int\limits_{K(R)} \Bigg(\int\limits_{E_1(b)\cap(-\infty,r]} dx_1 \Bigg) dx_2 \ldots dx_p \leq$$
$$\leq R^{p-1}\Bigg(\frac{\pi}{2\psi_1(0)} + \int\limits_0^{\Phi(pr)} \frac{dt}{\psi_1(t)}\Bigg). \tag{40}$$

Звідси і з (34) отримуємо

$$\mathrm{meas}_p(E_2(\tilde{\psi}_1) \cap C(r,R)) = R^{p-1}(c^* + \alpha^*(r)r), \tag{41}$$

де $c^* = \pi/(2\psi_1(0))$, а $\alpha^*(r) \to 0$ $(r \to +\infty)$ функція, залежна тільки від p, Φ, ψ_1. Об'єднуючи оцінки (29), (38) і (41), для міри множини $E_0 = E \cup E_2(\tilde{\psi}_1) \cup E_1(\tilde{\psi}_2)$ отримаємо $\mathrm{meas}_p(E_0 \cap C(r,R)) = o(R^{p-1}r)$ при $r \to +\infty$ рівномірно по $R > 0$.

При $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E_0)$, враховуючи, що $\overline{u} = \nabla \ln F(\sigma) \to +\infty$, з нерівності (3) за допомогою нерівностей (36) і (39) послідовно, як і вище у доведенні теореми 1, отримаємо

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma,F)) \leq$$
$$\leq \omega'(\ln \mu(\sigma,F))\Big\{\ln\frac{c}{c-1} + \ln \nu(\overline{u} - \sqrt{\psi_2(\overline{u})}; \overline{u} + \sqrt{\psi_2(\overline{u})}]\Big\} \leq$$
$$\leq o(1) + \omega'(\ln \mu(\sigma,F)) d(\overline{u})/\omega'(\psi_1^{-1}(\overline{u})) \leq d(\overline{u}) + o(1).$$

Залишається пригадати, що $\overline{\lim\limits_{u\to+\infty}}\, d(u) = d$. Теорему 4 доведено.

Схема доведення теореми 5 залишається тією ж, що і у попередньому доведенні, за винятком оцінки величини виняткової множини, яка проводиться дещо інакше.

У порівнянні з теоремою 1 у теоремах 4 і 5 на функцію $\omega \in L_2$ накладено дві додаткові умови $\omega'(t) \to 0$ та $q = \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, \omega'((1-\varepsilon(t))t)/\omega'(t) = 1$. Аналіз доведення теореми 4 показує, що від цих умов можна відмовитись, якщо означення класу $L_1(\Phi)$ змінити у наступний спосіб

$$\frac{1}{r}\int^{2\Phi(r)} \frac{dt}{\psi(t)} \to 0 \quad (r \to +\infty). \tag{42}$$

Отже, нехай $L_1^0(\Phi)$ клас функцій $\psi \in L_1^+(\Phi)$, для яких виконується умова (42). Якщо тепер у доведенні теореми 4 при доведенні нерівності (39) застосувати лему 2 з функціями $g_0(t) = g(t)$ та $\psi(t) = \tilde{\psi}_1(t/2)$, то зовні відповідних виняткових множин отримуємо

$$\omega'(\ln \mu(\sigma,F)) \leq \omega'((1-\varepsilon_0(\sigma)) \ln F(\sigma)) \leq$$
$$\leq \omega'((1-\varepsilon_0)g(t)) \leq \omega'(2(1-\varepsilon_0(\sigma))\psi_1^{-1}(\nabla \ln F(\sigma))),$$

і позаяк, $\varepsilon_0(\sigma) \to 0$ при $|\sigma| \to +\infty$, то $\omega'(\ln \mu(\sigma,F)) \leq \omega'(\psi_1^{-1}(\nabla \ln F(\sigma)))$. Звідси негайно отримаємо, що зовні відповідних виняткових множин при $\overline{u} = \nabla \ln F(\sigma)$

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq$$
$$\leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F))\left(\ln \frac{c}{c-1} + d(\overline{u})/\omega'(\psi^{-1}(\overline{u}))\right) \leq$$
$$\leq \omega'(\ln \mu(\sigma, F)) \ln \frac{c}{c-1} + d(\overline{u}).$$

Звідси, вибираючи $c > 0$ досить великим, для довільного $\varepsilon > 0$ при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E_0$) отримуємо

$$\omega(\ln F(\sigma)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \leq d + \varepsilon.$$

Нескладно при цьому переконатись, що оцінка виняткової множини $E_0 = E \cup E_1(\tilde{\psi}_2) \cup E_2(\tilde{\psi}_1(t/2))$ за умови $\psi_1 \in L_1^0(\Phi)$ не зміниться. Звідси вже безпосередньо випливає, що правильне наступне твердження.

Теорема 4′. *Нехай $\Phi \in L^+$, $\omega \in L_2$ і $F \in S_p(\nu)$. Якщо виконується умова (23) і існують функції $\psi_1 \in L_1^0(\Phi)$, $\psi_2 \in L_1(\Phi)$ такі, що виконується умова (33), то нерівність (12) справджується при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$) для кожного конуса $K \subset \mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат (в точці $O = (0, \dots, 0)$) такого, що*

$$\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F);$$

множина $E \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$\mathrm{meas}_p(E \cap C(r, R)) = o(rR^{p-1})$$

при $r \to +\infty$ рівномірно за $R > 0$.

Легко зрозуміти, що твердження подібне до твердження теореми 4′ є правильним і у випадку теореми 5. Доведення цього факту, як і доведення теореми 5, залишаємо поза рамками цієї статті.

Наведемо деякі наслідки. Нехай $p \geq 1$ і $\lambda = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$ — фіксована послідовність $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \dots, n_p)$ така, що $0 \leq \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ ($k \to +\infty$), $j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Нехай $D^p(\lambda)$ — клас цілих функцій $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$, зображуваних абсолютно збіжними для всіх $z \in \mathbb{C}^p$ кратними рядами Діріхле

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} F_n e^{\langle z, \lambda_n \rangle}.$$

Для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ і функції $F \in D^p(\lambda)$ позначимо

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}^p\},$$
$$\mathbf{M}(\sigma, F) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |F_n| e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle},$$
$$\mu(\sigma, F) = \max\{|F_n| e^{\sigma \lambda_n} : n \in \mathbb{Z}_+^p\}.$$

Наслідок 1. *Нехай* $F \in D^p(\lambda)$, $\omega \in L_2$ *і* $n_\lambda(a,b] = n(a+b) - n(a-b)$, $n(t) = \sum\limits_{\|\lambda_n\| \le t, F_n \ne 0} 1.$ *Якщо*

$$(\exists \psi_1 \in L_1^+)\ (\exists \psi_2 \in L_1)\ :\ \lim_{t\to+\infty} \omega'(\psi_1^{-1}(t)) \ln^+ n_\lambda(t; \sqrt{\psi_2(t)}] = 0,$$

то

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) = o(1)$$

при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K \setminus E)$, *де* K *і* E *описані в теоремі 1.*

Для доведення досить в теоремі 1 прийняти $d = 0$, а за міру $\nu(dx)$ — міру таку, що для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+^p$:

$$\nu(E) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \delta_n(E),$$

де $\delta_n(E) = \begin{cases} 1, \ \lambda_n \in E \\ 0, \ \lambda_n \notin E \end{cases}$, — міри , зосереджені в точках послідовності $\lambda = (\lambda_n)$. Тоді

$$\nu\left(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}\right] = n_\lambda\left(t; \sqrt{\psi_2(t)}\right] \quad \text{для всіх} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Зрозуміло, як отримати подібні наслідки з інших отриманих вище тверджень. Відзначимо, що у випадку теорем 2–5 отримуємо нові твердження і у випадку класу $D^p(\lambda)$.

Наступний наслідок можна отримати також з відповідної теореми з [1].

Наслідок 2. *Нехай* $F \in D^1(\lambda)$ *і* $\mu_0(\sigma) = \sup\left\{ e^{\sigma\lambda_n^{(1)}} \sum\limits_{s=n}^{+\infty} |F_s| \ :\ n \ge 0 \right\}$. *Тоді*

$$\ln M(\sigma, F) \le (1 + o(1)) \ln \mu_0(\sigma) \tag{43}$$

і

$$\ln \mathbf{M}(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu_0(\sigma) \tag{44}$$

при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E *— скінченної міри).*

Доведення. Нехай, як і в [13], $H_0(t) = \sum\limits_{\lambda_n^{(1)} > t} |F_n|$. Тоді для $\sigma > 0$, інтегруючи частинами, отримуємо

$$\mathbf{M}(\sigma, F) = \sum_{k=0}^{+\infty} |F_k| e^{\sigma\lambda_k^{(1)}} = -\int_0^{+\infty} e^{\sigma t} dH_0(t) + |F_0| =$$

$$= \sigma \int_0^{+\infty} e^{\sigma t} H_0(t) dt + \mathbf{M}(0, F). \tag{45}$$

Зауважимо тепер, що у випадку, коли ν міра Лебега на $\mathbb{R}_+$ та $\psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv t^2$ маємо

$$\nu\left(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}\right] = 2t \ (t \to +\infty).$$

Застосуємо тепер теорему 1 з $\omega(t) \equiv \ln t$. Тоді $\omega'(t) \equiv \frac{1}{t}$ і, отже, умова (11) виконується з $d = 0$, тому за теоремою 1 отримуємо

$$\ln\ln \int\limits_0^{+\infty} e^{\sigma t} H_0(t)dt - \ln\ln \mu^*(\sigma) \le o(1) \tag{46}$$

при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E — скінченної міри), де $\mu^*(\sigma) = \sup\{e^{\sigma t} H_0(t) : t \ge 0\}$. Зауважимо, що для всіх $t \in [\lambda_k^{(1)}; \lambda_{k+1}^{(1)})$ і $\sigma > 0$

$$e^{\sigma t} H_0(t) < e^{\sigma \lambda_{k+1}^{(1)}} \sum_{s=k+1}^{+\infty} |F_s|.$$

Тому $\mu_0(\sigma) = \mu^*(\sigma)$. Отже, з (45) і (46) отримуємо послідовно при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$)

$$\ln \int\limits_0^{+\infty} e^{\sigma t} H_0(t)dt \le (1 + o(1)) \ln \mu^*(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu_0(\sigma),$$

тобто $\ln \mathbf{M}(\sigma, F) \le (1 + o(1)) \ln \mu_0(\sigma)$ і наслідок 2 доведено. □

З огляду на те, що співвідношення (44) виконується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$ — скінченної міри) для кожного цілого ряду Діріхле

$$F \in \bigcup_{\lambda} D^1(\lambda) \equiv D^1,$$

то наслідок 2 можна назвати “інваріантною” формою теореми Бореля.

З іншого боку, авторам не відомо, чи асимптотична нерівність (43) насправді не виявиться асимптотичною рівністю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Скаскив О. Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. – 1999. – Т.66, №2. – С.282–292.
2. Орищин О. Г., Скасків О. Б., Тракало О. М. *Зауваження про нерівності типу Вімана для кратних рядів Діріхле* // Вісник ДУ ”Львівська політехніка”. – 1999. – №364. – С.127–131.
3. Скасків О. Б., Тракало О. М. *Про класичну нерівність Вімана для цілих кратних рядів Діріхле* // Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – Т.43, №3. – С.34–39.
4. Скасків О. Б.,Тракало О. М.*Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле* // Матем. студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.163–172.
5. Федорюк М. В.Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
6. Юлмухаметов Р. С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Исследов. по теории прибриж.: Сб. ст. – Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. – С.132–137.
7. Евграфов М. А.Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
8. Бойчук В. С., Гольдберг А. А.*К теореме о трех прямых* // Мат. заметки. – 1974. – Т.15, №1. – С.45–53.

9. Rosenbloom P. C. *Probability and entire functions* // Studies Math. Anal. and Related Topics. – Stanford: Calif. Univ. Press, 1962. – P.325–332.

10. Hayman W. K. Subharmonic functions. V.2. – London etc.: Acad.Press, 1989. – XXI+591 pp.

11. Скасків О. Б., Трусевич О. М. *Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів* // Препринт №17-1. – Львів: Інститут прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 1999. – 18 с.

12. Скасків О. Б. *Асимптотичні властивості аналітичних функцій, представлених степеневими рядами і рядами Діріхле.* – Дис. ... докт. фіз.-мат.н. – Львів, 1995. – 299 с.

13. Шеремета М. М. *Про зростання цілого ряду Діріхле* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, №8. – С.1149–1153.

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 17.05.2002