УДК 517.956.4

Т. М. Балабушенко

# ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ $\overrightarrow{2B}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ, НЕОБМЕЖЕНИХ ВІДНОСНО ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ

T. M. Balabushenko. *Properties of solutions of $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems in domains, unbounded on time-variable*, Matematychni Studii, **18** (2002) 69–80.

We study properties of solutions of $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems, satisfying a special $\Lambda_\delta^{m,r}$-condition in domains unbounded with respect to time-variable. Theorems on integrated representation and stability of solutions, theorems of Liouville type, and also theorems on a correct resolvability of the Cauchy problem and of the problems without initial conditions are proved.

Т. М. Балабушенко. *Свойства решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем в областях, неограниченных относительно временной переменной* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №1. – С.69–80.

Изучены свойства решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем, удовлетворяющих в неограниченных по временной переменной областях специальным $\Lambda_\delta^{m,r}$-условиям. Доказаны теоремы об интегральном представлении и устойчивости решений, теоремы типа Лиувилля, а также теоремы о корректной разрешимости задачи Коши и задачи без начальных условий.

В [1] були означені $\overrightarrow{2b}$-параболічні за С. Д. Ейдельманом системи, які задовольняють $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови в необмежених відносно часової змінної областях, а також наведені приклади таких систем. Дана стаття є продовженням [1]. Вона присвячена застосуванню оцінок фундаментальної матриці розв'язків за $\Lambda_\delta^{m,r}$-умов до доведення теорем про інтегральне зображення і стійкість розв'язків, теорем типу Ліувілля, а також теорем про коректну розв'язність задачі Коші та задачі без початкових умов для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем, які задовольняють відповідні $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови. Ці теореми в певній мірі узагальнюють результати з [2,3] для параболічних за І.Г.Петровським систем.

**1. Позначення, $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови.** Нехай $n$, $N$, $b_1, ..., b_n$ — задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, ..., 2b_n)$; $B$ — найменше спільне кратне чисел $b_1, ..., b_n$; $m_j \equiv B/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, ..., n\}$; $\mathbb{Z}_+^n$ — сукупність усіх $n$-вимірних мультиіндексів; $\partial_t u \equiv \partial u/\partial t$; $\|k\| \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} m_j k_j$, $\partial_x^k \equiv \partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_n}^{k_n}$, якщо $k \equiv (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ і $x \equiv (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\Pi_H \equiv \{(t,x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $H_1 \equiv (0, \infty)$, $H_2 \equiv (-\infty, T]$, де $T$ — задане додатне число; $\Pi_m \equiv \Pi_{H_m}$, $m \in \{1, 2\}$; $\mathbb{C}_N$ — множина всіх стовпчиків висоти $N$, елементи яких є комплексними числами.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K45.

Розглянемо $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему $N$ рівнянь

$$(Lu)(t,x) \equiv \left( I\partial_t - \sum_{||k||\le 2B} a_k(t,x)\partial_x^k \right) u(t,x) = f(t,x),\ (t,x)\in \Pi_m, \tag{1}$$

де $I$ — одинична матриця порядку $N, m \in \{1,2\}$. Нагадаємо означення з [1].

**Означення 1.** Система (1) задовольняє умову $\Lambda_\delta^{m,r}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $m \in \{1,2\}$, $r \in \mathbb{Z}_+^1 \cup \{\infty\}$, якщо існує фундаментальна матриця розв'язків (ФМР) $Z(t,x;\tau,\xi), \{t,\tau\} \subset H_m, \tau < t$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ , задачі Коші для системи (1), яка має похідні $\partial_x^k Z$, $\|k\| \le r$, і для матриці $Z$ та її похідних правильні оцінки

$$|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_k \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t-\tau))^{-1-k_j} e^{\delta(t-\tau)} E_c(t-\tau, x-\xi), \tag{2}$$

$$\{t,\tau\}\subset H_m, \quad \tau < t, \quad \{x,\xi\}\subset \mathbb{R}^n, \quad ||k|| \le r,$$

де $C_k$ і $c$ — додатні сталі, $\alpha_j, j \in \{1,...,n\}$, — невід'ємні монотонно неспадні функції такі, що $\alpha_j(0) = 0$ і $\alpha_j(t) \to \infty$ при $t \to \infty$,

$$E_c(t,x) \equiv \exp\left( -c \sum_{j=1}^n (\alpha_j(t))^{-q_j} |x_j|^{q_j} \right).$$

Розглянемо набір функцій

$$\hat{k}_j(t,a_j) \equiv \begin{cases} c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - (\alpha_j(t))^{2b_j} a_j^{2b_j-1})^{1-q_j}, & 0 \le t \le T, \\ c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} + (\alpha_j(|t|))^{2b_j} a_j^{2b_j-1})^{1-q_j}, & t < 0, j \in \{1,...,n\} \end{cases} \tag{3}$$

де $c_0 \in (0,c)$, стала $c$ і функції $\alpha_j, j \in \{1,...,n\}$ з оцінок (2), $a_j, j \in \{1,...,n\}$ — невід'ємні числа такі, що $\alpha_j(T) < (c_0/a_j)^{1/q_j}$. Легко переконатись, що функції $\hat{k}_j, j \in \{1,...,n\}$, мають наступні властивості

$$-c_0(\alpha_j(t))^{-q_j}|x_j - \xi_j|^{q_j} + a_j|\xi_j|^{q_j} \le \hat{k}_j(t,a_j)|x_j|^{q_j}, 0 < t \le T, \quad \{x_j,\xi_j\}\subset \mathbb{R},$$

$$\hat{k}_j(\tau,a_j) \le \hat{k}_j(t,a_j), \tau < t, \{\tau,t\} \subset (-\infty, T],$$

а якщо виконуються нерівності

$$(\alpha_j(t-\tau))^{2b_j} \le \begin{cases} (\alpha_j(t))^{2b_j} - (\alpha_j(\tau))^{2b_j}, & 0 \le \tau \le t \le T; \\ (\alpha_j(t))^{2b_j} + (\alpha_j(|\tau|))^{2b_j}, & \tau < 0 \le t \le T; \\ (\alpha_j(|\tau|))^{2b_j} - (\alpha_j(|t|))^{2b_j}, & \tau \le t \le 0, \end{cases} \tag{4}$$

то правильні оцінки

$$-c_0(\alpha_j(t-\tau))^{-q_j}|x_j-\xi_j|^{q_j} + \hat{k}_j(\tau,a_j)|\xi_j|^{q_j} \le \hat{k}_j(t-\tau, \hat{k}_j(\tau,a_j)), \tag{5}$$

$$\hat{k}_j(t-\tau, \hat{k}_j(\tau, a_j)) \le \hat{k}_j(t, a_j), \tag{6}$$

$$-\infty < \tau < t \le T, \quad \{x_j, \xi_j\} \subset \mathbb{R}, \ j \in \{1, ..., n\}.$$

Зауважимо, що нерівності (4) виконуються, якщо, наприклад, $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $t \ge 0$.

**2. Інтегральні зображення розв'язків.** Наведемо теореми про інтегральне зображення розв'язків системи (1), які визначені в $\overline{\Pi}_m, m \in \{1,2\}$. Припустимо, що система (1) задовольняє $\Lambda_\delta^{m,2B}$-умову та наступну умову

$\mathbf{A_m}$. Існує для (1) спряжена за Лагранжем система і в кожному шарі $\Pi_{[t_0,T_0]}, \{t_0, T_0\} \subset \overline{H}_m, t_0 < T_0$, ФМР $Z$ задачі Коші для системи (1) має властивість нормальності.

Розглянемо спочатку випадок $m = 1$. Для будь-яких $t \ge 0, p \in [1,\infty]$ і $\eta \equiv (\eta_1, ..., \eta_n)$ з $\eta_j \ge 0, j \in \{1, ..., n\}$, означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta} \equiv \|u(t,\cdot)\Phi_\eta(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де

$$\Phi_\eta(x) \equiv \exp\left(-\sum_{j=1}^n \eta_j |x_j|\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

**Теорема 1.** *Нехай система (1) задовольняє $\Lambda_\delta^{1,2B}$-умову (зі сталими $c > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ і функціями $\alpha_j, j \in \{1, ..., n\}$) та умову $\mathbf{A_1}$ і нехай $u : \overline{\Pi}_1 \to \mathbb{C}_N$ — такий неперервний розв'язок цієї системи, що для фіксованих $p$ і $\eta$:*

*1)* $\forall\, T_0 > 0 \quad \exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in [0, T_0] : \|u(t,\cdot)\|_{p,\eta} \le C;$

*2) функція $f \equiv Lu$ неперервна та задовольняє умови*
$\forall\, t > 0 : \|f(t,\cdot)\|_{p,\eta} < \infty$ *і* $\int_0^\infty e^{-\delta\tau}\|f(\tau,\cdot)\|_{p,\eta} d\tau < \infty.$

*Тоді для $u$ в $\Pi_1$ правильне зображення*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)u(0,\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi \tag{7}$$

*і справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta} \le C \exp\left(\delta t + \sum_{j=1}^n \frac{(\eta_j \alpha_j(t))^{2b_j}}{2b_j (c_0 q_j)^{2b_j - 1}}\right) \left(\|u(0,\cdot)\|_{p,\eta} + \int\limits_0^t e^{-\delta\tau}\|f(\tau,\cdot)\|_{p,\eta} d\tau\right), t > 0, \tag{8}$$

*де $c_0$ — фіксована стала з проміжку $(0, c)$.*

*Доведення.* Розглянемо довільне фіксоване число $T_0 > 0$, набір функцій з [4]

$$k_j(t, a_j) \equiv c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1} t)^{1-q_j}, \ 0 \le t \le T_0, \ j \in \{1, ..., n\},$$

де $a_j, j \in \{1, ..., n\}$, — невід'ємні числа такі, що $T_0 < \min\limits_{1\le j \le n} (c_0/a_j)^{2b_j-1}$, і функцію $\Psi(t,x) \equiv \exp\Big(-\sum_{j=1}^n k_j(t,a_j)|x_j|^{q_j}\Big), (t,x) \in \Pi_{[0,T_0]}$. Очевидно, що

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \equiv \|u(t,\cdot)\Psi(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta},$$

$$t \in [0, T_0], \quad p \in [1, \infty], \tag{9}$$

де $k(t,a) \equiv (k_1(t,a_1), ..., k_n(t,a_n))$.

З умови 1) теореми та оцінки (9) маємо

$$\exists\ C_1 > 0 \quad \forall\ t \in [0,T] : \ \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \leq C_1. \tag{10}$$

Подібно з умови 2) одержуємо, що

$$\exists\ C_2 > 0 \quad \forall\ t \in (0,T_0] : \ \|f(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \leq C_2,$$

$$\int\limits_0^{T_0} \|f(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau,a)} d\tau \leq C_2. \tag{11}$$

Умови теореми щодо системи (1) та оцінки (10) і (11) дозволяють скористатись властивістю 3 з [4, с.63-64] для випадку $p = \infty$ та подібною властивістю для $p \in [1,\infty)$ (така властивість використовувалася також в [5]), згідно з якою правильне зображення (7) в $\Pi_{[0,T_0]}$. Оскільки $T_0$ — довільне додатне число, то звідси випливає правильність зображення (7) в $\Pi_1$.

За допомогою формули (7), оцінки (2) для $k = 0$, нерівностей Гельдера та Мінковського маємо для $(t,x) \in \Pi_1$ і $p \in (1,\infty)$

$$|u(t,x)| \leq Ce^{\delta t} \left( \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t))^{-1} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)p'/2}(t, x-\xi) d\xi \right)^{1/p'} \times \right.$$

$$\times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t, x-\xi) |u(0,\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} + \int\limits_0^t e^{-\delta\tau} \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t-\tau))^{-1} \times$$

$$\left. \times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)p'/2}(t-\tau, x-\xi) d\xi \right)^{1/p'} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t-\tau, x-\xi) |f(\tau,\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} d\tau \right) =$$

$$= Ce^{\delta t} \left( \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t))^{-1+(1/p')} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t, x-\xi) |u(0,\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t e^{-\delta\tau} \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t-\tau))^{-1+(1/p')} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t-\tau, x-\xi) |f(\tau,\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} d\tau \right),$$

де $p' \equiv p/(p-1)$. Звідси одержуємо

$$\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta} \leq Ce^{\delta t} \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t))^{-1/p} \left( \left( \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(0,\xi)|^p \Phi_{\eta p}(\xi) \times \right.\right.\right.$$

$$\times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t, x-\xi)\Phi_{-\eta p}(x-\xi)dx \right) d\xi \Bigg)^{1/p} +$$

$$+ \int\limits_0^t e^{-\delta\tau} d\tau \left( \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\tau,\xi)|^p \, \Phi_{\eta p}(\xi) \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t, x-\xi)\Phi_{-\eta p}(x-\xi)dx \right) d\xi \right)^{1/p} \right). \quad (12)$$

У праву частину нерівності (12) входить інтеграл

$$I_p \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t, x-\xi)\Phi_{-\eta p}(x-\xi)dx,$$

який заміною $x_j = \xi_j + \alpha_j(t)y_j, \ j \in \{1,...,n\}$, зводиться до вигляду

$$I_p \equiv \prod_{j=1}^n \alpha_j(t) \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-((c-c_0)p/2)|y_j|^{q_j} + g_j(|y_j|)\right) dy_j,$$

де $g_j(r) \equiv -c_0 p r^{q_j} + \eta_j p \alpha_j(t) r, \ r \ge 0, \ j \in \{1,...,n\}$. Оскільки максимум функції $g_j$ досягається в точці $(\eta_j\alpha_j(t)/(c_0q_j))^{1/(q_j-1)}$ і дорівнює $p(\eta_j\alpha_j(t))^{2b_j}/(2b_j(c_0q_j)^{2b_j-1})$, то

$$I_p \le C \prod_{j=1}^n \alpha_j(t) \exp\left( p \sum_{j=1}^n \frac{(\eta_j\alpha_j(t))^{2b_j}}{2b_j(c_0q_j)^{2b_j-1}} \right). \quad (13)$$

Зауважимо, що оцінка (13) правильна для будь-якого $p \in [1,\infty)$.

З (12) і (13) випливає нерівність (8) для $p \in (1,\infty)$.

Для $p \in \{1,\infty\}$ нерівність (8) доводиться простіше, бо не використовується нерівність Гельдера. Справді, спочатку одержуємо нерівність

$$|u(t,x)| \le Ce^{\delta t} \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t))^{-1} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t, x-\xi)|u(0,\xi)|d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t e^{-\delta\tau} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\tau, x-\xi)|f(\tau,\xi)|d\xi \right), \quad (t,x) \in \Pi_1,$$

з якої маємо

$$||u(t,\cdot)||_{1,\eta} \le Ce^{\delta t} \prod_{j=1}^n (\alpha_j(t))^{-1} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(0,\xi)|\Phi_\eta(\xi) \times \right.$$

$$\times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)p/2}(t, x-\xi)\Phi_{-\eta}(x-\xi)dx \right) d\xi +$$

$$\left. + \int\limits_0^t e^{-\delta\tau} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\tau,\xi)|\Phi_\eta(\xi) \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c+c_0)/2}(t, x-\xi)\Phi_{-\eta}(x-\xi)dx \right) d\xi \right)$$

у випадку $p=1$ і

$$\|u(t,\cdot)\|_{\infty,\eta} \le Ce^{\delta t}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t))^{-1}\left(\|u(0,\cdot)\|_{\infty,\eta}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t e^{-\delta\tau}\|f(\tau,\cdot)\|_{\infty,\eta}d\tau\right)\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}E_{(c+c_0)/2}(t,x-\xi)\Phi_{-\eta}(x-\xi)dx$$

для $p=\infty$. З цих нерівностей за допомогою оцінки (13) випливає оцінка (8) для $p\in\{1,\infty\}$. □

Нехай $m=2$. Для будь-яких $t\le T,\ p\in[1,\infty]$ означимо норми

$$||u(t,\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)} \equiv ||u(t,\cdot)\hat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

де $\hat{k}(t,a)\equiv(\hat{k}_1(t,a_1),...,\hat{k}_n(t,a_n))$, $\hat{\Psi}_\nu(t,x)\equiv\exp\left(\nu\sum\limits_{j=1}^{n}\hat{k}_j(t,a_j)|x_j|^{q_j}\right)$, $t\le T$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\nu\in\mathbb{R}$.

**Теорема 2.** *Нехай система (1) задовольняє $\Lambda_\delta^{2,2B}$-умову (зі сталими $c>0$, $\delta\in\mathbb{R}$ і функціями $\alpha_j, j\in\{1,...,n\}$, такими, що для них правильні оцінки (4)) та умову $\mathbf{A_2}$. Припустимо, що $u\colon\Pi_2\to\mathbb{C}_N$ — розв'язок системи (1), для якого виконуються умови:*

1. *$\exists\ C>0\ \ \forall\ t\le T: e^{-\delta t}||u(t,\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)}\le C$, причому для $p=\infty$ $e^{-\delta t}||u(t,\cdot)||_p^{\hat{k}(t,a)}\to 0$ при $t\to-\infty$;*
2. *функція $f\equiv Lu$ неперервна та задовольняє умови $\forall\ t\le T: \|f(t,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)}<\infty$ і $\int_{-\infty}^T e^{-\delta\tau}\|f(\tau,\cdot)\|_p^{\hat{k}(\tau,a)}d\tau<\infty$.*

*Тоді для $u$ в $\Pi_2$ правильні зображення*

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi \tag{14}$$

*та оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)}\le Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-\delta\tau}\|f(\tau,\cdot)\|_p^{\hat{k}(\tau,a)}d\tau,\ t\le T. \tag{15}$$

*Доведення.* Нехай $t_0$ — довільне фіксоване число з $(-\infty,T)$ і $u$ — заданий розв'язок системи (1). Тоді виконується початкова умова

$$u(t,x)|_{t=t_0}=u(t_0,x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Якщо детально проаналізувати доведення з [4] властивості для $p=\infty$ та подібної властивості в [5] для $p\in[1,\infty)$, які використовувались при доведенні теореми 1, то можна встановити аналогічний результат і у випадку використання функцій $\hat{k}_j, j\in$

$\{1, ..., n\}$. А саме, якщо виконуються умови теореми, то для розв'язку $u$ задачі Коші (1), (16) правильне зображення

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t_0,\xi)u(t_0,\xi)d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,\ (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}. \qquad (17)$$

Рівність (17) справджується для будь-якого $t_0 < T$. Зафіксувавши точку $(t,x)$ і перейшовши до границі при $t_0 \to -\infty$ у формулі (17), одержимо для розв'язку формулу (14) в усій області $\Pi_2$. Умови теореми при цьому гарантують існування відповідних границь інтегралів з (17).

Справді, нехай $I_{t_0}$ та $J_{t_0}$ – відповідно перший та другий інтеграли з формули (17). Доведемо, що $I_{t_0} \to 0$ при $t_0 \to -\infty$. Для $p \in (1,\infty)$, використавши оцінки (2) з $k=0$ та нерівність Гельдера, маємо

$$|I_{t_0}| \leq C_0 \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j(t-t_0))^{-1} e^{\delta(t-t_0)} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)p'}(t-t_0, x-\xi)d\xi \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(t_0,\xi)|^p E_{c_0 p}(t-t_0,x-\xi)d\xi \right)^{1/p}.$$

Звідси за допомогою нерівностей (5) і (6) випливає оцінка

$$|I_{t_0}| \leq C \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j(t-t_0))^{-1/p} e^{\delta t} \hat{\Psi}_1(t,x) (e^{-\delta t_0} \|u(t_0,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t_0,a)}). \qquad (18)$$

Подібно, але без використання нерівності Гельдера, доводиться, що оцінка (18) правильна і для $p \in \{1,\infty\}$.

На підставі умови 1) і того, що $\alpha_j(t-t_0) \to \infty$ при $t_0 \to -\infty$, з (18) одержуємо, що $I_{t_0} \to 0$ при $t_0 \to -\infty$.

Доведемо, що $J_{t_0} \to J_{-\infty}$ при $t_0 \to -\infty$, де $J_{-\infty}$ — інтеграл з формули (14). За допомогою міркувань, подібних до використаних при доведенні оцінки (18), одержуємо нерівність

$$|J_{-\infty} - J_{t_0}| \leq C \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j(t-t_0))^{-1/p} e^{\delta t} \hat{\Psi}_1(t,x) \int\limits_{-\infty}^{t_0} e^{-\delta\tau} \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\hat{k}(\tau,a)} d\tau, \qquad (19)$$

з якої випливає, що $J_{t_0} \to J_{-\infty}$ при $t_0 \to -\infty$, якщо врахувати збіжність інтегралу з умови 2).

Отже, формулу (14) встановлено. За допомогою формули (14) та оцінок (2), (5), (6) отримаємо оцінку (15). Для $p \in (1,\infty)$, як і при доведенні нерівностей (18) і (19), маємо

$$|u(t,x)| \leq C_0 \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\delta(t-\tau)} \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j(t-\tau))^{-1} \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)p'/2}(t-\tau, x-\xi)d\xi \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\tau,\xi)|^p \hat{\Psi}_{-p}(\tau,\xi)(E_{c_0 p}(t-\tau,x-\xi)\hat{\Psi}_p(\tau,\xi))\ E_{(c-c_0)p/2}(t-\tau,x-\xi)d\xi\right)^{1/p} d\tau \Bigg) \le$$

$$\le Ce^{\delta t}\hat{\Psi}_1(t,x)\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-1/p}\times$$

$$\times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\tau,\xi)|^p \hat{\Psi}_{-p}(\tau,\xi)E_{(c-c_0)p/2}(t-\tau,x-\xi)d\xi\right)^{1/p} d\tau,$$

звідки

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\hat{k}(t,a)} \le Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}||f(\tau,\cdot)||_p^{\hat{k}(\tau,a)}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-1/p}\times$$

$$\times \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)p/2}(t-\tau,x-\xi)dx\right)^{1/p} d\tau = Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}||f(\tau,\cdot)||_p^{\hat{k}(\tau,a)}d\tau.$$

Отже, нерівність (15) для $p \in (1,\infty)$ доведено.

Якщо $p = 1$, то за допомогою (2), (5) і (6) маємо

$$||u(t,\cdot)||_1^{\hat{k}(t,a)} \le Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-1}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{\Psi}_{-1}(t,x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\tau,x-\xi)|f(\tau,\xi)|d\xi dx \le$$

$$\le Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-1}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{\Psi}_{-1}(t,x)E_{c-c_0}(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(\tau,\xi)|\hat{\Psi}_{-1}(\tau,\xi)(E_{c_0}(t-\tau,x-\xi)\hat{\Psi}_1(\tau,\xi))d\xi dx.$$

Звідси випливає оцінка (15) для $p = 1$. У випадку $p = \infty$ подібно отримуємо

$$\|u(t,\cdot)\|_\infty^{\hat{k}(t,a)} \le Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-1}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(\hat{\Psi}_{-1}(t,x)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_c(t-\tau,x-\xi)|f(\tau,\xi)|d\xi\Big) \le Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-1}\times$$

$$\times\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}\Big(\hat{\Psi}_{-1}(t,x)\int_{\mathbb{R}^n}|f(\tau,\xi)|\hat{\Psi}_{-1}(\tau,\xi)E_{c-c_0}(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times(E_{c_0}(t-\tau,x-\xi)\hat{\Psi}_1(\tau,\xi))d\xi\Big) \leq Ce^{\delta t}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\delta\tau}\|f(\tau,\cdot)\|_{\infty}^{\hat{k}(\tau,a)}d\tau.$$

□

**3. Теорема про стійкість розв'язків.** Розглянемо в $\Pi_1$ відповідну (1) однорідну систему

$$Lu = 0, \tag{20}$$

яка задовольняє $\Lambda_\delta^{1,2B}$-умову та умову $\mathbf{A_1}$.

Для неперервних функцій $u\colon \overline{\Pi}_1 \to \mathbb{C}_N$ означимо норму

$$\|u\|_{p,\eta}^{g(\cdot)} \equiv \sup_{t\geq 0}(g(t)\|u(t,\cdot)\|_{p,\eta}),$$

де $p \in [1,\infty]$, $\eta \equiv (\eta_1,...,\eta_n), \eta_j \geq 0$, $j \in \{1,...,n\}$, $g\colon \overline{H}_1 \to H_1$ — деяка неперервна функція.

**Означення 2.** Нульовий розв'язок системи (20) називається $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$-стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\Delta > 0$ таке, що для довільного неперервного розв'язку $u : \overline{\Pi}_1 \to \mathbb{C}_N$ системи (20), який задовольняє умову 1) з теореми 1 та умову $\|u(0,\cdot)\|_{p,\eta} < \Delta$, справджується нерівність $\|u\|_{p,\eta}^{g(\cdot)} < \varepsilon$.

З теореми 1 безпосередньо випливає така теорема про стійкість.

**Теорема 3.** *Нульовий розв'язок системи (20), яка задовольняє указані на початку цього пункту умови, є $E_{p,\eta}^{g(\cdot)}$ -стійким з $p \in [1,\infty]$, $\eta \equiv (\eta_1,...,\eta_n)$, $\eta_j \geq 0$, $j \in \{1,...,n\}$, і*

$$g(t) = \exp\left(-\delta t - \sum_{j=1}^{n}\frac{(\eta_j\alpha_j(t))^{2b_j}}{2b_j(c_0q_j)^{2b_j-1}}\right), \quad t \geq 0,$$

*де $c_0 \in (0,c)$, сталі $c,\delta$ та функції $\alpha_j, j \in \{1,...,n\}$, з $\Lambda_\delta^{1,2B}$-умови.*

**4. Теореми типу Ліувілля.** Розглянемо в $\Pi_2$ однорідну систему (20).

**Теорема 4.** *Нехай система (20) задовольняє $\Lambda_0^{2,r}$-умову з $r \geq 2B$ та умову $\mathbf{A_2}$. Тоді будь-який її розв'язок $u\colon \Pi_2 \to \mathbb{C}_N$, який задовольняє умову*

$$\exists\ C > 0\ \ \forall\ (t,x) \in \Pi_2 :\ |u(t,x)| \leq C\prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|)^{\gamma_j}, \tag{21}$$

*як функція від $x_j$ є многочленом степеня, не вищого за $[\gamma_j], j \in \{1,...,n\}$, де $\gamma_j \geq 0$, $j \in \{1,...,n\}$, такі, що $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j\gamma_j \leq r$.*

*Доведення.* У будь-якій довільно взятій точці $\tau$ з $(-\infty, T)$ розв'язок $u$ системи (20) набуває значення $u(\tau, x), x \in \mathbb{R}^n$. Умови теореми дозволяють скористатися властивістю з [4], згідно з якою для розв'язку $u$ в $\Pi_{(\tau,T]}$ правильне зображення

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)u(\tau,\xi)d\xi. \tag{22}$$

Далі, в довільній фіксованій точці $(t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}$ проведемо оцінку, використовуючи оцінки (2) та умову (21)

$$|\partial_x^k u(t,x)| \le C_k \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j(t-\tau))^{-1-k_j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t-\tau, x-\xi) \prod_{j=1}^{n} (1+|\xi_j|)^{\gamma_j} d\xi, \|k\| \le r.$$

Здійснивши в останньому інтегралі заміну змінних інтегрування за формулами $z_j = (\xi_j - x_j)/\alpha_j(t-\tau),\ j \in \{1,...,n\}$, одержуємо

$$|\partial_x^k u(t,x)| \le C_k \prod_{j=1}^{n} \big( (\alpha_j(t-\tau))^{-k_j} \times \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-c|z_j|^{q_j})(1+|x_j+\alpha_j(t-\tau)z_j|)^{\gamma_j} dz_j \le$$

$$\le C(x) \prod_{j=1}^{n} (\alpha_j(t-\tau))^{\gamma_j - k_j}, \|k\| \le r.$$

Виберемо тепер $k^0 \equiv (k_1^0, ..., k_n^0) \in \mathbb{Z}_+^n,\ \|k^0\| < r$, так, щоб для всіх $k \equiv (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, що $\|k\| \le r,\ k_j \ge k_j^0,\ j \in \{1,...,n\}$, справджувались нерівності $k_j > \gamma_j,\ j \in \{1,...,n\}$. Оскільки $\alpha_j(t-\tau) \to \infty$ при $\tau \to -\infty,\ j \in \{1,...,n\}$, і $(t,x)$ — довільна фіксована точка, то $\partial_x^k u(t,x) = 0,\ (t,x) \in \Pi_2$. Отже, $u(t,x)$ є многочленом по $x_j$ степеня, не вищого, ніж $k_j^0 - 1$, а згідно з (21) цей степінь не перевищує $[\gamma_j],\ j \in \{1,...,n\}$. $\square$

З теореми 2 безпосередньо випливає така теорема типу Ліувілля.

**Теорема 5.** *Нехай система (20) задовольняє в* $\Pi_2$ $\Lambda_\delta^{2,2B}$*-умову (зі сталими* $c > 0, \delta \in \mathbb{R}$ *і функціями* $\alpha_j,\ j \in \{1,...,n\}$*, такими, що для них виконуються оцінки (4)) та умову* $\mathbf{A_2}$. *Тоді розв'язок* $u : \Pi_2 \to \mathbb{C}_N$ *цієї системи, який задовольняє умову 1) теореми 2, є нульовим.*

**5. Теореми про коректну розв'язність задачі Коші та задачі без початкових умов.** У просторі $\Pi_1$ розглянемо задачу Коші для системи (1) з початковою умовою

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{23}$$

Нехай $E_{p,\eta}$ — простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_N$ таких, що

$$\|\psi\|_{p,\eta} \equiv \|\psi(\cdot)\Phi_\eta(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

**Теорема 6.** *Нехай система (1) задовольняє $\Lambda_\delta^{1,2B}$-умову (зі сталими $c > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ і функціями $\alpha_j, j \in \{1, ..., n\}$, такими, що для них виконуються оцінки (4)) та умову* $\mathbf{A_1}$. *Якщо $\varphi \in E_{p,\eta}$ і функція $f\colon \Pi_1 \to \mathbb{C}_N$ неперервна, задовольняє локальну умову Гельдера за $x$ та умови*

$\forall\ t \in (0, \infty):\ f(t, \cdot) \in E_{p,\eta}$ *і* $\int\limits_0^\infty e^{-\delta t} ||f(t, \cdot)||_{p,\eta} dt < \infty,$

*то формулою*

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi)f(\tau, \xi)d\xi, (t, x) \in \Pi_1, \tag{24}$$

*визначається єдиний розв'язок задачі Коші (1), (23) такий, що $u(t, \cdot) \in E_{p,\eta},\ t > 0$, і справджується оцінка (8), в якій $u(0, \cdot)$ замінено на $\varphi(\cdot)$.*

*Доведення.* Згідно з результатами праці [4] за даних умов на систему та праві частини задачі (1), (23) формула (24) визначає розв'язок цієї задачі в будь-якому шарі $\Pi_{[0,T_0]}, T_0 > 0$, і для цього розв'язку виконується умова 1) з теореми 1. Звідси випливає, що функція (24) є розв'язком задачі (1), (23) в $\Pi_1$ і для нього виконуються всі умови теореми 1. На підставі цієї теореми одержаний розв'язок єдиний і для нього правильна оцінка (8). □

**Теорема 7.** *Нехай система (1) задовольняє $\Lambda_\delta^{2,2B}$-умову (зі сталими $c > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ і функціями $\alpha_j, j \in \{1, ..., n\}$, такими, що для них правильні оцінки (4)) та умову* $\mathbf{A_2}$. *Припустимо, що права частина $f\colon \Pi_2 \to \mathbb{C}_N$ системи (1) неперервна, задовольняє локальну умову Гельдера за $x$ та умову 2) з теореми 2. Тоді формула (14) визначає в $\Pi_2$ єдиний розв'язок системи (1), для якого виконується оцінка (15).*

*Доведення.* Нехай $t_0 < t_1$. Те, що функція (14) є розв'язком системи (1) в довільному шарі $\Pi_{[t_1,T]}, t_1 < T$, випливає з властивостей інтегралу

$$\int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi)f(\tau, \xi)d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{[t_1,T]},$$

аналогічних до відповідних властивостей об'ємного потенціалу з [4], та властивостей інтегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{t_0} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi)f(\tau, \xi)d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{[t_1,T]},$$

який можна диференціювати під знаком інтеграла, позаяк $t - \tau \geq t_1 - t_0 > 0$. Оскільки число $t_1 < T$ довільне, то функція (14) є розв'язком системи (1) в усьому $\Pi_2$. Єдиність цього розв'язку та оцінка (15) випливає з теореми 2. □

## ЛІТЕРАТУРА

1. Балабушенко Т.М. *Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для* $\overrightarrow{2b}$*-параболічних систем* // Мат. студії. – 2002. – Т.17,№2. – С.163–174.

2. Эйдельман С.Д. *Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем* // Мат. сб. – 1958. – Т.44, №4. – С.481–508.

3. Эйдельман С.Д. *Параболические системы.* – М.: Наука, 1964. – 443 с.

4. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\overrightarrow{2b}$*-параболические системы* // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып.1. – С. 3–175.

5. Ивасишен С.Д. *Интегральное представление и начальные значения решений* $\overrightarrow{2b}$*-параболических систем* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, №4. – С.500–506.

Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича

*Надійшло 20.02.2002*