УДК 517.9

Ю. М. Сидоренко, Ю. Ю. Беркела

ІНТЕГРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОСТОРОВО-ДВОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Yu. M. Sydorenko, Yu. Yu. Berkela. *Integration of nonlinear space-twodimensional Heisenberg equations*, Matematychni Studii, **18** (2002) 57–68.

We investigate the model of Ishimori I (nonlinear (2+1)-dimensional generalizations of Heisenberg equations) and its modification. For these systems the method of constructing of a wide class of exact solutions in explicit form is proposed by using of "dressing" transformations of Zakharov-Shabat type. As particular cases we present solutions which are essentially different from already known.

Ю. Н. Сидоренко, Ю. Ю. Беркела. *Интегрирование нелинейных пространственно-двумерных уравнений Гейзенберга* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №1. – С.57–68.

Исследуются нелинейные (2+1)–обобщения уравнений Гейзенберга — модель Ишимори-I и ее модификацию. Предложен метод построения широкого класса точных решений в явной форме с помощью "одевающих" преобразований Захарова-Шабата. Существенно отличные от известных ранее решения представлены как частный случай полученных нами общих формул.

Просторово-двовимірні узагальнення нелінійної моделі феромагнетика Гейзенберга, відомі також як рівняння Ішиморі I, II [1], досліджувалися різними методами (Хіроти, оберненої задачі розсіяння, $\bar{\partial}$-метод) [1,2]. Предметом дослідження у цій статті є нелінійна модель Ішиморі-I і отримана нами її модифікація [3], для яких каліброчна еквівалентність з відповідними моделями Деві-Стюартсона-II на даний час не досліджено (на відміну від систем Ішиморі-II та Деві-Стюартсона-II [2]). Для системи Ішиморі-I методом бінарних перетворень Дарбу [4] отримані широкі класи точних розв'язків. Наш підхід до інтегрування цих рівнянь базується на "одягаючих" перетвореннях Захарова–Шабата. Серед отриманих класів розв'язків досліджуваних моделей містяться також суттєво відмінні від відомих раніше.

Статтю написано за наступною схемою. У першому розділі ми наводимо основні поняття та факти, необхідні надалі. Основні результати містяться в розділах 2 та 3, де подано в явному вигляді точні розв'язки нелінійної моделі Ішиморі-I (теореми 3 і 4) та її модифікації (теореми 5 і 6). Отримані нами розв'язки (для обох моделей) параметризуються довільною кількістю функціональних параметрів $(\varphi_1(x,y,t), \varphi_2(x,y,t))$, на відміну від відомих робіт [4,5].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 33Q58, 37K10, 37K15.

1.Вихідні положення. Розглянемо над полем $\mathbf{C}$ лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів) вигляду

$$U \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(U)} a_i \mathcal{D}^i : i, n(U) \in \mathbf{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i є матричними $N \times N$–функціями "просторової" змінної $x = t_0$ і еволюційних параметрів $t_1, t_2, \ldots$. Матричні коефіцієнти $a_i(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$, вважаються гладкими функціями векторної змінної $\mathbf{t}$, яка має скінченну кількість компонент, і належать деякому функціональному простору $\mathcal{A}$, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x}$.

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] \colon \zeta \times \zeta \to \zeta, [L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, де композиція $L_1 L_2$ (операторне множення) операторів L_1 та L_2 індукується загальним правилом Лейбніца для композиції оператора $\mathcal{D}^n$ і оператора $f := f\mathcal{D}^0$ – оператор множення на функцію $f \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} \mathcal{D}^{n-j}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad f \in \mathcal{A} \subset \zeta, \quad f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in \mathcal{A} \subset \zeta, \tag{2}$$

$$\mathcal{D}^n \mathcal{D}^m := \mathcal{D}^m \mathcal{D}^n := \mathcal{D}^{n+m}, \quad n, m \in \mathbf{Z}.$$

На відміну від формули (2), через $\mathcal{D}^k(f)$ позначається дія оператора диференціювання $\mathcal{D}^k$ на функцію $f \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{D}^k(f) := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in \mathcal{A}, \quad k \in \mathbf{Z}_+.$$

Строго диференціальна складова $S_{>0}$ МДО $S = \sum\limits_{i=-\infty}^{n(S)} s_i \mathcal{D}^i$ визначається таким чином

$$S = S_{>0} + S_{\leq 0}, \quad S_{>0} = \sum_{i=1}^{n(S)} s_i \mathcal{D}^i, \tag{3}$$

а через $S_{\leq 0}$, відповідно, позначається $S_{\leq 0} = \sum_{i=-\infty}^{0} s_i \mathcal{D}^i$. Формула (3) індукує розклад алгебри ζ в лінійну суму підалгебр операторів $\zeta_{>0}$ (диференціальних операторів без вільного члена) і операторів $\zeta_{\leq 0}$ (інтегральних операторів з вільним членом) $\zeta = \zeta_{>0} \dot{+} \zeta_{\leq 0}$. Задамо на алгебрі Лі ζ систему попарно комутуючих диференціювань $\{\partial_{t_n}\}, n \in \mathbf{N}$; $\partial_{t_n} : (\zeta, [\cdot, \cdot]) \to (\zeta, [\cdot, \cdot])$:

$$\partial_{t_n} U = \partial_{t_n} \left(\sum_j a_j \mathcal{D}^j \right) := \sum_j \frac{\partial a_j}{\partial t_n} \mathcal{D}^j + U \partial_{t_n} \equiv U_{t_n} + U \partial_{t_n},$$

$$[\partial_{t_n}, \partial_{t_m}] = 0, \quad [\mathcal{D}^j, \partial_{t_n}] = 0, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Розглянемо $B_n^0, B_m^0 \in \zeta_{>0} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \mathcal{D}^i \right\}$, $\quad \hat{B}_n^0 := \alpha_n \partial_{t_n} - B_n^0, \quad \hat{B}_m^0 := \alpha_m \partial_{t_m} - B_m^0$, де $\alpha_i \in \mathbf{C}$ такі, що $\left[\hat{B}_n^0, \hat{B}_m^0 \right] = [\alpha_n \partial_{t_n} - B_n^0, \alpha_m \partial_{t_m} - B_m^0] = 0$. Нехай

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \mathcal{D}^{-i} \tag{4}$$

— елемент простору $\zeta_{\leq 0}$, для якого існує обернений W^{-1}, а $B_n := \alpha_n \partial_{t_n} - W\hat{B}_n^0 W^{-1}$.
Твердження [3]. 1) $[\alpha_n \partial_{t_n} - B_n, \alpha_m \partial_{t_m} - B_m] = 0$.
2) $B_n \in \zeta_{>0}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_n W_{t_n} = \left(W B_n^0 W^{-1}\right)_{>0} W - W B_n^0. \tag{5}$$

Наслідок [3]. Нехай $\alpha_0 = 0$, $U_0 := B_1^0 = C_1 \mathcal{D}, B_m^0 = C_m \mathcal{D}^m, C_1, C_m \in \mathcal{I}_N$, де $\mathcal{I}_N$ — деяка комутативна підалгебра $\mathrm{Mat_{N\times N}}(\mathbf{C})$ – алгебри $N \times N$-матриць з комплексними елементами, оператор $U := W U_0 W^{-1}$. Тоді

$$\alpha_m U_{t_m} = [B_m, U],$$

а за умови $C_m = (C_1)^m$ оператор U є розв'язком матричної ієрархії типу КР (Кадомцева-Петвіашвілі [6, 7]):

$$\alpha_m U_{t_m} = [(U^m)_{>0}, U]. \tag{6}$$

Як зазначалось вище, оператори W (4) мають обернені W^{-1}, коефіцієнти яких послідовно знаходяться з означення $WW^{-1} = I$. Безпосередні обчислення дозволяють виписати достатню для наших цілей кількість коефіцієнтів оператора $W^{-1} = w_0^{-1} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i \mathcal{D}^{-i}$:

$$\omega_1 = -w_0^{-1} w_1 w_0^{-1};$$
$$\omega_2 = -w_0^{-1} w_2 w_0^{-1} + w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} - w_0^{-1} w_1 w_0^{-1} w_{0x} w_0^{-1}.$$

Надалі розглядатимемо оператор L вигляду

$$L := \alpha_n \partial_{t_n} - U := \alpha_n \partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i. \tag{7}$$

Операцію транспонування оператора L (7) визначимо рівністю:

$$L^\tau := -\alpha \partial_y - \sum_{i=-\infty}^{n(L)} (-1)^i \mathcal{D}^i a_i^\top.$$

Оператор $L^* := \overline{L^\tau}$ є ермітово спряженим до L.

Оператор L (7) називатимемо $\mathcal{D}$-ермітовим ($\mathcal{D}$-косоермітовим), якщо $L^* = \mathcal{D} L \mathcal{D}^{-1}$ ($L^* = -\mathcal{D} L \mathcal{D}^{-1}$). Інтегральний оператор W будемо називати $\mathcal{D}$-унітарним, якщо $W^{-1} = \mathcal{D}^{-1} W^* \mathcal{D}$.

Лема 1. *Нехай L – $\mathcal{D}$-ермітовий ($\mathcal{D}$-косоермітовий) та W – $\mathcal{D}$-унітарний оператори, тоді $\hat{L} := W L W^{-1}$ буде $\mathcal{D}$-ермітовим ($\mathcal{D}$-косоермітовим) оператором.*

Доведення.

$$\hat{L}^* = (WLW^{-1})^* = (W^{-1})^* L^* W^* = \mathcal{D} W \mathcal{D}^{-1} \mathcal{D} L \mathcal{D}^{-1} W^* = \mathcal{D} W L W^{-1} \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D} \hat{L} \mathcal{D}^{-1}.$$

□

Нехай $\varphi = \varphi(x, y, t)$ — гладка матрична $N \times K$ функція, $\Omega := C + \int_{-\infty}^{x} \varphi^* \varphi_x dx$ — невироджена матричнозначна $K \times K$ функція, така, що інтеграл $\int_{-\infty}^{x} \varphi^* \varphi_x dx$ є абсолютно збіжним. Правильне наступне важливе твердження.

Теорема 1. *1. Нехай* $C^* = -C = const \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbf{C})$ *та* $w_0 := I - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*$, *тоді* $w_0^{-1} = w_0^* = I - \varphi\Omega^{*-1}\varphi^*$ *та* $\Omega^* = \varphi^*\varphi - \Omega$.

2. Оператор W *вигляду*

$$W := w_0 + \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi_x^*, \tag{8}$$

є $\mathcal{D}$*-унітарним і обернений до нього оператор визначається за формулою*

$$W^{-1} := w_0^{-1} + \varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_x. \tag{9}$$

Доведення теореми викладено в статті [8].

2. Основна частина. Розглядатимемо введений простір ζ мікродиференціальних операторів, де коефіцієнти є матричними функціями розмірності 2×2 “просторової” змінної $x = t_0$ і еволюційних параметрів $t_1 = y, t_2 = t$.

Виберемо $B_1^0 = \sigma_3\mathcal{D}$, $B_2^0 = \sigma_3\mathcal{D}^2$, де $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ та обчислимо

$$(W\sigma_3\mathcal{D}W^{-1})_{>0} = w_0\sigma_3 w_0^{-1}\mathcal{D},$$

$$(W\sigma_3\mathcal{D}^2W^{-1})_{>0} = w_0\sigma_3 w_0^{-1}\mathcal{D}^2 + (w_1\sigma_3 w_0^{-1} - w_0\sigma_3 w_0^{-1}w_1 w_0^{-1} - 2w_0\sigma_3 w_0^{-1}w_{0x}w_0^{-1})\mathcal{D}.$$

З доведеного в [3] випливає, що наслідком рівняння (5) для отриманих операторів є система

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2 S_t = \frac{1}{4}[S, S_{xx} + \alpha_1^2 S_{yy}] + a_y S_x + a_x S_y \\ \\ (a_{xx} - \alpha_1^2 a_{yy})I = \frac{\alpha_1^2}{2}S[S_y, S_x] \end{array}\right. , \tag{10}$$

де a - скалярна функція, $S = w_0\sigma_3 w_0^{-1}, S^2 = S^*S = I$. Дана модель відома як система Ішіморі (2d-магнетик Гейзенберга)[1]. Система (10) є інтегровною класичною моделлю, що описує нелінійну спінову систему на площині (x, y). Зображення Захарова–Шабата для неї має вигляд:

$$\left[\alpha_1\partial_y - S\mathcal{D}, \alpha_2\partial_t - S\mathcal{D}^2 - \Big(\frac{1}{2}S_x + \frac{\alpha_1}{2}SS_y + \frac{1}{\alpha_1}a_x S + a_y\Big)\mathcal{D}\right] = 0. \tag{11}$$

Систему (10) можна подати у векторній формі

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2 \vec{S}_t = \frac{i}{2}\vec{S}\times(\vec{S}_{xx} + \alpha_1^2\vec{S}_{yy}) + a_y\vec{S}_x + a_x\vec{S}_y \\ \\ a_{xx} - \alpha_1^2 a_{yy} = i\alpha_1^2\vec{S}(\vec{S}_y\times\vec{S}_x) \end{array}\right. ,$$

де $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3), \vec{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$.

Розглянемо оператори

$$L := \alpha_1\partial_y - \sigma_3\mathcal{D}, \tag{12}$$
$$M := \alpha_2\partial_t - \sigma_3\mathcal{D}^2,$$

де $\alpha_1 \in \mathbf{R}, \alpha_2 \in i\mathbf{R}$. Зауважимо, що при цьому L є $\mathcal{D}$-косоермітовим та M є $\mathcal{D}$-ермітовим операторами. Проведемо для операторів (12) перетворення

$$\hat{L} := WLW^{-1}, \quad \hat{M} := WMW^{-1}, \tag{13}$$

де оператори W та W^{-1} мають вигляд (8)–(9) відповідно.

Теорема 2. *Нехай* $\varphi \in \mathrm{Mat}_{2\times K}(\mathbf{C})$ — *розв'язок системи рівнянь*

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_y = \sigma_3\varphi_x \\ \alpha_2\varphi_t = \sigma_3\varphi_{xx} \end{cases}, \alpha_1 \in \mathbf{R}, \alpha_2 \in i\mathbf{R}, \tag{14}$$

тоді оператори $\hat{L}, \hat{M}$ *(13) — чисто диференціальні, при цьому* $\hat{L} := \alpha_1\partial_y - S\mathcal{D}$ *є* $\mathcal{D}$-*косоермітовим та* $\hat{M} := \alpha_2\partial_t - S\mathcal{D}^2 - P\mathcal{D}$ *є* $\mathcal{D}$-*ермітовим, де* $S = w_0\sigma_3 w_0^{-1}$, $P = w_0\sigma_3 w_{0x}^{-1} + \varphi\Omega^{-1}\varphi_x^*\sigma_3 w_0^{-1} - w_0\sigma_3\varphi_x\Omega^{*-1}\varphi^*$.

Доведення. Розіб'ємо процес на декілька етапів. Наведемо співвідношення, які будуть використанні в доведенні

$$\Omega_y^*\Omega^{*-1} = -\Omega^*(\Omega^{*-1})_y, \tag{15}$$

$$\varphi^*\varphi - \int_{-\infty}^{x} \varphi^*\varphi_x dx = C + \Omega^*, \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi^*\varphi_x dx = \Omega - C, \tag{17}$$

$$\Omega_y^* = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{xy}^*\varphi dx + \int_{-\infty}^{x} \varphi_x^*\varphi_y dx. \tag{18}$$

Розглянемо наступне перетворення

$$W\partial_y W^{-1} = \partial_y + W(W^{-1})_y = \partial_y - [\varphi_y\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} + \varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} -$$
$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\mathcal{D}\varphi_y\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\mathcal{D}\varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D}] =$$
$$= \partial_y - [\varphi_y\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} + \varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} -$$
$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\varphi_{xy}\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\varphi_y\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} -$$
$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\varphi_x\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\varphi(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D}] =$$
$$= \partial_y - [\varphi_y\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} + \varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} -$$
$$-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xy}dx\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} + \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xy}dx\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} -$$
$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\varphi_y\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_x dx\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} +$$
$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_x dx(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\varphi(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D}].$$

Використовуючи (16) та (17), попередній вираз перепишеться у вигляді

$$W\partial_y W^{-1} = \partial_y - [\varphi_y\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} + \varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} -$$
$$-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xy}dx\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_x^*\varphi_y dx\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} - \varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} +$$
$$+\varphi\Omega^{-1}C\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}C(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\Omega^*(\Omega^{*-1}\varphi^*)_y\mathcal{D}].$$

Враховуючи (15), отримаємо

$$W\partial_y W^{-1} = \partial_y - [\varphi_y\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xy}dx\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} -$$

$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_x^*\varphi_y dx\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi_y^*\mathcal{D}+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\Omega_y^*\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}].$$

Підставимо вираз для Ω_y^* (18) в попередню формулу

$$W\partial_y W^{-1}=\partial_y-[\varphi_y\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi_y^*\mathcal{D}-$$

$$-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xy}dx\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_x^*\varphi_y dx\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_{xy}^*\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_x^*\varphi_y dx\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}]=$$

$$=\partial_y-\Big(\varphi_y-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xy}dx\Big)\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\Big(\varphi_y^*-\int_{-\infty}^{x}\varphi_{xy}^*\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*\Big)\mathcal{D}.$$

Використовуючи подібні міркування для перетворень $W\sigma_3\mathcal{D}W^{-1}$ та $W\sigma_3\mathcal{D}^2W^{-1}$ прямими обчисленнями приходимо до наступного результату

$$W\sigma_3\mathcal{D}W^{-1}=w_0\sigma_3w_0^{-1}\mathcal{D}-(\sigma_3\varphi_x-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\sigma_3\varphi_{xx}dx)\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}(\varphi_x^*\sigma_3-\int_{-\infty}^{x}\varphi_{xx}^*\sigma_3\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*)\mathcal{D}.$$

$$W\sigma_3\mathcal{D}^2W^{-1}=w_0\sigma_3w_0^{-1}\mathcal{D}^2+(w_0\sigma_3(w_0^{-1})_x-w_0\sigma_3\varphi_x\Omega^{*-1}\varphi^*+\varphi\Omega^{-1}\varphi_x^*\sigma_3w_0^{-1})\mathcal{D}-$$

$$-(\sigma_3\varphi_{xx}-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\sigma_3\varphi_{xxx}dx)\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}-$$

$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}(\varphi_{xx}^*\sigma_3-\int_{-\infty}^{x}\varphi_{xxx}^*\sigma_3\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*)\mathcal{D}.$$

З попередніх викладок ми також отримуємо явний вигляд комутативної $\hat{L}-\hat{M}$ пари операторів

$$\hat{L}=WLW^{-1}=\big(I+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\mathcal{D}\big)\left(\alpha_1\partial_y-\sigma_3\mathcal{D}\right)\big(I+\varphi\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}\big)=$$

$$=\alpha_1\partial_y-w_0\sigma_3w_0^{-1}\mathcal{D}-[\alpha_1\varphi_y-\sigma_3\varphi_x-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*(\alpha_1\varphi_y-\sigma_3\varphi_x)_x dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\alpha_1\varphi_y^*-\varphi_x^*\sigma_3-\int_{-\infty}^{x}(\alpha_1\varphi_y^*-\varphi_x^*\sigma_3)_x\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}.$$

$$\hat{M}=WMW^{-1}=\big(I+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\mathcal{D}\big)\left(\alpha_2\partial_t-\sigma_3\mathcal{D}^2\right)\big(I+\varphi\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}\big)=$$

$$=\alpha_2\partial_t-w_0\sigma_3w_0^{-1}\mathcal{D}^2-[w_0\sigma_3(w_0^{-1})_x-w_0\sigma_3\varphi_x\Omega^{*-1}\varphi^*+\varphi\Omega^{-1}\varphi_x^*\sigma_3w_0^{-1}]\mathcal{D}-$$

$$-[\alpha_2\varphi_t-\sigma_3\varphi_{xx}-\varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*(\alpha_2\varphi_t-\sigma_3\varphi_{xx})_x dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\alpha_2\varphi_t^*+\varphi_{xx}^*\sigma_3-\int_{-\infty}^{x}(\alpha_2\varphi_t^*+\varphi_{xx}^*\sigma_3)_x\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}.$$

Рівності з системи (14) приводять до занулення передостанніх інтегродиференціальних доданків операторів $\hat{L}$ і $\hat{M}$. Система рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_y^* = \varphi_x^* \sigma_3 \\ \alpha_2 \varphi_t^* = -\varphi_{xx}^* \sigma_3 \end{cases},$$

яка є наслідком системи (14) гарантує ануляцію останніх доданків в операторах $\hat{L}$ і $\hat{M}$. Використовуючи лему 1, отримуємо твердження теореми 2. □

Теорема 3. *Нехай* $\varphi \in \mathrm{Mat}_{2\times \mathrm{K}}(\mathbf{C})$ — *розв'язок системи (14), тоді розв'язки системи (10) мають вигляд*

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S_1 + iS_2 \\ S_1 - iS_2 & -S_3 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$a = -\alpha_1 \ln \frac{A_1 A_2 - B_{12} B_{21}}{(\det \Omega)^2}, \tag{20}$$

де S_1, S_2, S_3 — *дійсні функції,* $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, *та*

$$S_1 = \frac{A_2 B_{21} - A_1 B_{12}}{A_1 A_2 - B_{12} B_{21}}, S_2 = \frac{i(A_1 B_{12} + A_2 B_{21})}{A_1 A_2 - B_{12} B_{21}}, S_3 = \frac{A_1 A_2 + B_{12} B_{21}}{A_1 A_2 - B_{12} B_{21}}, \tag{21}$$

$$A_k = \det \begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{k\cdot}^* \\ \varphi_{k\cdot} & 1 \end{pmatrix}, B_{jk} = \det \begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{k\cdot}^* \\ \varphi_{j\cdot} & 0 \end{pmatrix},$$

а $\varphi_{j\cdot}, \varphi_{k\cdot}^*$ — *відповідно* j*-та стрічка і* k*-тий стовпчик матриць* φ, φ^*; $j, k \in \{1, 2\}$.

Доведення. Виходячи з означення, матриця w_0 матиме вигляд

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 - \varphi_{1\cdot}\Omega^{-1}\varphi_{1\cdot}^* & -\varphi_{1\cdot}\Omega^{-1}\varphi_{2\cdot}^* \\ -\varphi_{2\cdot}\Omega^{-1}\varphi_{1\cdot}^* & 1 - \varphi_{2\cdot}\Omega^{-1}\varphi_{2\cdot}^* \end{pmatrix}.$$

Оскільки $S = w_0 \sigma_3 w_0^{-1}$, то, будуючи w_0^{-1}, з елементарних операцій множення матриць отримуємо вигляд матриці S. Користуючись відомою алгебраїчною рівністю для обрамленого визначника

$$\det \begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{j\cdot}^* \\ \varphi_{i\cdot} & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \det \Omega - \varphi_{i\cdot} \Omega^C \varphi_{j\cdot}^*, \tag{22}$$

де Ω^C — матриця алгебраїчних доповнень, подаємо компоненти S_1, S_2 та S_3 у формі (21). Далі прирівнюємо вираз при $\mathcal{D}$ у другому операторі зображення Захарова-Шабата (11) для системи (10) до виразу P у формулюванні теореми 2. Проводячи перетворення отриманої рівності приходимо до наступного результату

$$a = -\alpha_1 \ln\{\det w_0\},$$

що, в свою чергу, згідно формули (22) зводиться до вигляду (20). □

Лема 2. *Правильна рівність:*

$$\det w_0 = (-1)^K \frac{\det \Omega^*}{\det \Omega}. \tag{23}$$

Доведення. З відомої алгебраїчної рівності $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$, де A і B – довільні відповідно $m \times n$ і $n \times m$-матриці, отримуємо

$$\det w_0 = \det(I_N - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*) = \det(I_K - \varphi^*\varphi\Omega^{-1}) = \det(-\Omega^*\Omega^{-1}) =$$

$$\det(-I_K) \cdot \det\Omega^* \cdot \det\Omega^{-1} = (-1)^K \det\Omega^* \cdot \det\Omega^{-1}.$$

□

Твердження теореми 3 рівносильні до наступної теореми.

Теорема 4. *Розв'язки (19)-(21) системи (10) можна подати у вигляді*

$$S_1 = (-1)^{K+1}\frac{FG + F^*G^*}{|F|^2 + |G|^2}, \quad S_2 = (-1)^K i\frac{FG - F^*G^*}{|F|^2 + |G|^2}, \quad S_3 = \frac{|F|^2 - |G|^2}{|F|^2 + |G|^2}, \tag{24}$$

$$a = -\alpha_1 \ln\left[(-1)^K \frac{|F|^2 + |G|^2}{(\det\Omega)^2}\right],$$

де

$$F = \det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{1\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Використовуючи властивість $w_0^{-1} = w_0^*$ (див. теорему 1) отримуємо

$$w_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \varphi_{1\cdot}\Omega^{*-1}\varphi_{1\cdot}^* & -\varphi_{1\cdot}\Omega^{*-1}\varphi_{2\cdot}^* \\ -\varphi_{2\cdot}\Omega^{*-1}\varphi_{1\cdot}^* & 1 - \varphi_{2\cdot}\Omega^{*-1}\varphi_{2\cdot}^* \end{pmatrix}.$$

Далі з вигляду матриці w_0^{-1} та з формули (23) випливають наступні співвідношення

$$\det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{2\cdot} & 1 \end{pmatrix} = (-1)^K \det\begin{pmatrix} \Omega^* & \varphi_{1\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{1\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 1 \end{pmatrix} = (-1)^K \det\begin{pmatrix} \Omega^* & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{2\cdot} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{K+1} \det\begin{pmatrix} \Omega^* & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{1\cdot}^* \\ \varphi_{2\cdot} & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{K+1} \det\begin{pmatrix} \Omega^* & \varphi_{1\cdot}^* \\ \varphi_{2\cdot} & 0 \end{pmatrix},$$

звідки слідує твердження теореми. □

Зауважимо, що $|F|^2 + |G|^2 = \det\Omega \det\Omega^* = |\det\Omega|^2$.

Отриманий вигляд розв'язків є подібним до розв'язків моделі Ішиморі, які було отримано в [4]. Однак у згаданій статті методом бінарних перетворень Дарбу описано розв'язки лише для парних значень $K = 2M$. Найпростіший випадок непарного $K = 1$ (тоді $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top, C = -\bar{C} = \mathrm{const}$), який не відображений в [4], приводить, згідно загальних формул (24), до таких розв'язків нелінійної моделі (10)

$$S_1 = -\frac{2\mathrm{Re}\{\varphi_1\bar{\varphi}_2(C + \int_{-\infty}^{x}(\bar{\varphi}_1\varphi_{1x} + \bar{\varphi}_2\varphi_{2x})dx - |\varphi_1|^2)\}}{|C + \int_{-\infty}^{x}(\bar{\varphi}_1\varphi_{1x} + \bar{\varphi}_2\varphi_{2x})dx|^2},$$

$$S_2 = -\frac{2\mathrm{Im}\{\varphi_1\bar{\varphi}_2(C+\int_{-\infty}^{x}(\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}+\bar{\varphi}_2\varphi_{2x})dx-|\varphi_1|^2)\}}{|C+\int_{-\infty}^{x}(\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}+\bar{\varphi}_2\varphi_{2x})dx|^2},$$

$$S_3 = 1-\frac{2|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2}{|C+\int_{-\infty}^{x}(\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}+\bar{\varphi}_2\varphi_{2x})dx|^2},$$

$$a = 2i\alpha_1\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\mathrm{Im}\left\{C+\int_{-\infty}^{x}(\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}+\bar{\varphi}_2\varphi_{2x})dx\right\}}{\mathrm{Re}\left\{C+\int_{-\infty}^{x}(\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}+\bar{\varphi}_2\varphi_{2x})dx\right\}}\right),$$

де $\varphi_1=\varphi_1(\alpha_1 x+y,t),\varphi_2=\varphi_2(\alpha_1 x-y,t)$ — розв'язки системи

$$\begin{cases}\alpha_2\varphi_{1t}=\varphi_{1xx}\\ \alpha_2\varphi_{2t}=-\varphi_{2xx}\end{cases}.$$

Виберемо конкретні значення: $\alpha_1=1,\alpha_2=i,C=i$, тоді для $\varphi_1=e^{x+y-it},\varphi_2=e^{x-y+it}$ — компонент вектора φ, отримуємо π-періодичний за часом розв'язок рівняння (10)

$$S_1=\frac{2(\cos(2t)\sinh(2y)-e^{-2x}\sin(2t))}{\cosh^2(2y)+e^{-4x}},\quad S_2=-\frac{2(\sin(2t)\sinh(2y)+e^{-2x}\cos(2t))}{\cosh^2(2y)+e^{-4x}},$$

$$S_3=1-\frac{2}{\cosh^2(2y)+e^{-4x}},\quad a=2i\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{1}{e^{2x}\cosh(2y)}\right).$$

3. Розв'язки нелінійної моделі типу Ішиморі.

Розглянемо систему, яка є наслідком рівняння (7) при $n=2,C_1=\sigma_3$ і була отримана в роботі [3]

$$\begin{cases}\alpha_2 S_t=\frac{\alpha_1}{2}[S,S_{xy}]+2\alpha_1^2\hat{\varphi}_y S_y+2\hat{\varphi}_x S_x\\ \\ \hat{\varphi}_{xx}-\alpha_1^2\hat{\varphi}_{yy}=\frac{\alpha_1}{4}S[S_y,S_x]\end{cases}, \tag{25}$$

де $\hat{\varphi}$ - скалярна функція, $S=w_0\sigma_3 w_0^{-1},S^2=S^*S=I$. Дана модель є модифікацією системи Ішиморі, зображення Захарова–Шабата для неї має наступний запис

$$\left[\alpha_1\partial_y-S\mathcal{D},\alpha_2\partial_t-\mathcal{D}^2-(SS_x+2\alpha_1\hat{\varphi}_y S+2\hat{\varphi}_x)\mathcal{D}\right]=0.$$

У векторній формі система (25) набуває вигляду

$$\begin{cases}\alpha_2\vec{S}_t=i\vec{S}\times\vec{S}_{xy}+2\hat{\varphi}_y\vec{S}_x+2\hat{\varphi}_x\vec{S}_y\\ \\ \hat{\varphi}_{xx}-\alpha_1^2\hat{\varphi}_{yy}=\frac{\alpha_1}{2}i\vec{S}(\vec{S}_y\times\vec{S}_x)\end{cases},$$

де $\vec{S}=(S_1,S_2,S_3),\vec{S}^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2=1$.

Розглянемо оператори

$$L:=\alpha_1\partial_y-\sigma_3\mathcal{D}, \tag{26}$$
$$M:=\alpha_2\partial_t-\mathcal{D}^2,$$

де $\alpha_1\in\mathbf{R},\alpha_2\in i\mathbf{R}$. Бачимо, що при цьому L є $\mathcal{D}$-косоермітовим та M є $\mathcal{D}$-ермітовим операторами. Для операторів (26) проведемо перетворення (13), де оператори W та W^{-1} мають вигляд (8)–(9) відповідно.

Аналогом теореми 2 є наступна теорема.

Теорема 5. *Нехай $\varphi \in \mathrm{Mat}_{2\times K}(\mathbf{C})$ — розв'язок системи рівнянь*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1\varphi_y = \sigma_3\varphi_x \\ \alpha_2\varphi_t = \varphi_{xx} \end{array} \right., \alpha_1 \in \mathbf{R}, \alpha_2 \in i\mathbf{R}, \tag{27}$$

тоді оператори $\hat{L}, \hat{M}$ (13) є чисто диференціальними, при цьому $\hat{L} := \alpha_1\partial_y - S\mathcal{D}$ є $\mathcal{D}$-косоермітовим та $\hat{M} := \alpha_2\partial_t - \mathcal{D}^2 - P\mathcal{D}$ є $\mathcal{D}$-ермітовим, де $S = w_0\sigma_3 w_0^{-1}$, $P = -2w_{0x}w_0^{-1}$.

Доведення. Твердження для оператора $\hat{L}$ доведено в Теоремі 2. Подібно до її доведення проведемо перетворення

$$W\mathcal{D}^2W^{-1} = \mathcal{D}^2 - 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D} - [\varphi_{xx} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xxx}dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} -$$

$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\varphi^*_{xx} - \int_{-\infty}^{x}\varphi^*_{xxx}\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}$$

та

$$\hat{M} = WMW^{-1} = \left(I + \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\mathcal{D}\right)\left(\alpha_2\partial_t - \mathcal{D}^2\right)\left(I + \varphi\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}\right) =$$

$$= \alpha_2\partial_t - \mathcal{D}^2 + 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D} - [\alpha_2\varphi_t - \varphi_{xx} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*(\alpha_2\varphi_t - \varphi_{xx})_x dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} +$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\alpha_2\varphi^*_t + \varphi^*_{xx} - \int_{-\infty}^{x}(\alpha_2\varphi^*_t + \varphi^*_{xx})_x\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}.$$

Аналогічно до теореми 2 рівняння (27) гарантують занулення інтегродиференціальних доданків оператора $\hat{M}$, звідки і слідує твердження теореми. □

Теорема 6. *Нехай $\varphi \in \mathrm{Mat}_{2\times K}(\mathbf{C})$ — розв'язок системи (27), тоді розв'язки системи (25) мають вигляд*

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S_1 + iS_2 \\ S_1 - iS_2 & -S_3 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

де S_1, S_2, S_3 – дійсні функції, задані формулою (21), та

$$\hat{\varphi} = -\frac{1}{2}\ln\frac{A_1A_2 - B_{12}B_{21}}{(\det\Omega)^2} \tag{29}$$

$$A_k = \det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi^*_{k\cdot} \\ \varphi_{k\cdot} & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{jk} = \det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi^*_{k\cdot} \\ \varphi_{j\cdot} & 0 \end{pmatrix},$$

$\varphi_{j\cdot}, \varphi^*_{k\cdot}$ — відповідно j-та стрічка і k-тий стовпчик матриць $\varphi, \varphi^*, j, k \in \{1, 2\}$.

Доведення. Вигляд матриці S отримуємо подібно до теореми 3. Співставляючи вигляд оператора $\hat{M}$ та другого оператора в зображенні Захарова-Шабата для системи (25), приходимо до умови

$$\alpha_1\hat{\varphi}_y + \hat{\varphi}_x\sigma_3 = -\frac{1}{2}(\sigma_3 w_0^{-1}w_{0x} + w_0^{-1}w_{0x}\sigma_3),$$

звідки випливає, що

$$\hat{\varphi} = -\frac{1}{2}\ln\{\det w_0\}.$$

□

Компактніший вигляд розв'язків, як і в теоремі 4, дає нам наступне твердження.

Теорема 7. *Розв'язки (28)-(29) системи (25) можна подати у формі:*

$$S_1 = (-1)^{K+1}\frac{FG+F^*G^*}{|F|^2+|G|^2}, \quad S_2 = (-1)^K i\frac{FG-F^*G^*}{|F|^2+|G|^2}, \quad S_3 = \frac{|F|^2-|G|^2}{|F|^2+|G|^2}, \tag{30}$$

$$\hat{\varphi} = -\frac{1}{2}\ln\left[(-1)^K\frac{|F|^2+|G|^2}{(\det\Omega)^2}\right],$$

де

$$F = \det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{1\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 1 \end{pmatrix}, G = \det\begin{pmatrix} \Omega & \varphi_{2\cdot}^* \\ \varphi_{1\cdot} & 0 \end{pmatrix}.$$

Роглянемо випадок $K = 2$ і $\varphi_{1\cdot} = (\varphi_1, 0), \varphi_{2\cdot} = (0, \varphi_2)$. Візьмемо матрицю $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. З формул (30) слідує наступний запис розв'язків моделі (25)

$$S_1 = \frac{2\mathrm{Re}\left\{\varphi_1\bar{\varphi}_2\left(1+\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx - |\varphi_1|^2\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx\right)\right\}}{|1+\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx|^2}$$

$$S_2 = \frac{2\mathrm{Im}\left\{\varphi_1\bar{\varphi}_2\left(1+\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx - |\varphi_1|^2\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx\right)\right\}}{|1+\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx|^2}$$

$$S_3 = 1 - \frac{2|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2}{|1+\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx|^2},$$

$$\hat{\varphi} = i\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\mathrm{Im}\left\{1+\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx\right\}}{\mathrm{Re}\left\{1+\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^x\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx\right\}}\right),$$

де $\varphi_1 = \varphi_1(\alpha_1 x + y, t), \varphi_2 = \varphi_2(\alpha_1 x - y, t)$ — розв'язки рівняння $\alpha_2\varphi_{jt} = \varphi_{jxx}, j \in \{1, 2\}$.

Аналіз загальніших класів розв'язків ми плануємо провести в окремій статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ishimori Y. *Multi-vortex solutions of a two-dimensional nonlinear wave equation* // Progr. Theor. Rhys.– 1983. – V.72, №1. - C.33-39.
2. Konopelchenko B. G. Solitons in multidimensions. Singapore: WorldScientific, 1993
3. Беркела Ю., Сидоренко Ю. *Нелінійна модель типу Ішиморі як редукція неконолічної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі* // Вісник Львів. унів. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип.59. – С.74–83.
4. Imai K. *Dromion and lump solutions of the Ishimori-I equation* // Progress of Theor. Physics. – 1997. – V. 98, №5. – P. 1013-1023.
5. Imai K., Nozaki K. *(2+1)-Dimensional soliton equations covariant with respect to the binary Darboux transformation* // Journ. of the Phys. Society of Japan. – 1996. – V. 65, №1. – P. 53–57.
6. Konopelchenko B. G., Oevel W. *Matrix Sato theory and integrable equations in 2+1 dimensions* // Proceedings of the 7th Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical systems (NEEDS'91), Biala Verda, Italy, 19-29 June 1991.

7. Сидоренко Ю. М. *Матричне узагальнення ієрархії Кадомцева – Петвіашвілі і нелінійні інтегровні системи* // Нелінійні коливання. – 1999. – Вип.2. – №2. – С.30–39.

8. Sidorenko Yu. *Transformation operators for integrable hierarchies with additional reductions* // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2002.– V.43, Part 1. – P. 352-357.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 15.08.2002