УДК 517.53

О. Б. Скасків*, О. М. Тракало

ТОЧНА ОЦІНКА ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ У СПІВВІДНОШЕННІ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

O. B. Skaskiv, O. M. Trakalo. *Sharp estimate of exceptional set in Borel's relation for entire functions of several complex variables*, Matematychni Studii, **18** (2002) 53–56.

A sharp estimate of an exceptional set in Borel's relation for entire functions of several complex variables is established.

О. Б. Скаскив, О. М. Тракало. *Точная оценка исключительного множества в соотношении Бореля для целых функций многих комплексных переменных* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №1. – С.53–56.

Найдена точная оценка величины исключительного множества в соотношении Бореля для целых функций многих комплексных переменных.

Вживаємо стандартні позначення (див. [1]).

Нехай ціла функція f має вигляд

$$f(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{1}$$

$z = (z_1, ..., z_p) \in \mathbb{C}^p$ $(p \geq 1)$; $n = (n_1, ..., n_p)$, $\|n\| = n_1 + ... + n_p$, і для $r = (r_1, ..., r_p) \in \mathbb{R}^p$ визначимо $M_f(r) = \sup\{|f(z)| : |z_1| = r_1, ..., |z_p| = r_p\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$.

Нехай L — клас неперервних, додатних, строго зростаючих до $+\infty$ на $[1, +\infty)$ функцій $l(x)$; через $\rho[l]$ позначимо порядок функції $l \in L$, тобто

$$\rho[l] = \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln l(x)}{\ln x}.$$

У випадку $p = 1$ в [2] доведено, що за умови $\rho[l] < +\infty$, $l \in L$, для кожної цілої функції f співвідношення

$$\ln M_f(r_1) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(r_1)$$

виконується при $r_1 \to +\infty$ зовні деякої множини $E = E(f)$ такої, що

$$m_l(E) = \int_{E \cap [1, +\infty)} l(x)dx < +\infty,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 32A05, 32A15.

* Дослідження О. Б. Скасківа частково підтримані грантом INTAS, 99-00089.

а також, що для кожної функції $l \in L$ з $\rho[l] = +\infty$ існує ціла функція f така, що для деякого $d > 0$

$$\int_{E_1 \cap [1,+\infty)} l(x)dx = +\infty, \quad E_1 = E_1(f) = \{x > 1 : \ln M_f(x) > (1+d)\ln \mu_f(x)\}.$$

У цьому повідомленні доводимо подібні твердження й у випадку $p > 1$. Власне, правильна наступна теорема.

Теорема. *Нехай $l \in L, p \in \mathbb{N}$. Для того, щоб для кожної цілої функції f вигляду (1) існувала множина $E(f)$ така, що одночасно виконуються співвідношення*

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(r) \tag{2}$$

при $\|r\| \to +\infty$ $(r \in K \backslash E(f))$ та

$$\int_{E(f) \cap \mathbb{R}^p_+} l(\|r\|)dr < +\infty, \tag{3}$$

необхідно і досить, щоб $\rho[l] < +\infty$, де K — довільна необмежена множина в $\mathbb{R}^p_+$ така, що $\overline{K} \subset \left\{ r \in \mathbb{R}^p_+ : \lim\limits_{t \to +\infty} t^{-1} \ln M\left(r_1^t, ..., r_p^t\right) = +\infty \right\}$.

Достатність в теоремі отримаємо, використовуючи міркування, подібні до тих, що застосовувались в [3, 4], і в основі яких лежить нерівність Чебишова. Необхідність одержуємо безпосередньо з теореми 2 [2].

Доведення теореми. Припустимо спочатку, що $l \in L$ і $\rho[l] = +\infty$. Тоді за теоремою 2 [2] існує ціла функція від однієї змінної

$$f_1(z_1) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z_1^k, \quad b_k \geq 0, \ k \geq 0,$$

така, що для множини $E_1 = \{x > 2 : \ln M_{f_1}(x) > (1+d)\ln \mu_{f_1}(x)\}$ з деяким $d > 0$ виконується $m_l(E_1) = +\infty$.

Для $r = (r_1, ..., r_p) \in \mathbb{R}^p_+$ виберемо тепер $f(r) = f_1(r_1) \cdots f_1(r_p)$. Очевидно, що $\mu_f(r) = \mu_{f_1}(r_1) \cdots \mu_{f_1}(r_p)$ і для $E = \{r = (r_1, ..., r_p) : r_1 \in E_1, 1 \leq r_2 \leq r_1, ..., 1 \leq r_p \leq r_1\}$ за нерівністю Коші $f_1(x) \geq \mu_{f_1}(x)$ $(x \geq 0)$ отримуємо

$$\ln f(r) \geq (1+d) \ln \mu_{f_1}(r_1) + \sum_{j=2}^{p} \ln \mu_{f_1}(r_j) \geq$$

$$\geq (1 + d/p) \sum_{j=1}^{p} \ln \mu_{f_1}(r_j) \geq (1 + d/p) \ln \mu_f(r).$$

Крім цього,

$$\int_E l(\|r\|)dr = \int_{E_1} dr_1 \int_1^{r_1} dr_2 \cdots \int_1^{r_1} l(\|r\|)dr_p \geq$$

$$\geq \int_{E_1} (r_1 - 1)^{p-1} l(r_1) dr_1 \geq \int_{E_1} l(x)dx = +\infty.$$

Необхідність умови $\rho[l] < +\infty$ доведено.

Доведемо достатність. Для цього нам зручно замість функції f розглянути ряд Діріхле

$$F(z) = f(e^z) = f(e^{z_1}, ...e^{z_p}) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{\langle z,n\rangle},$$

де $\langle z,n\rangle = z_1 n_1 + ... + z_p n_p$, $z = (z_1, ..., z_p)$, $n = (n_1, ..., n_p)$. Припустимо, що $l(x) \le a(1+x^b)$ $(x \ge 0)$, де $a, b \in (1, +\infty)$. Позаяк для кожної вимірної обмеженої множини $A \subset \mathbb{R}^p_+$

$$\int_A l(r)dr \le a \int_A (1 + \|r\|^b)dr \le ap^b \int_{A_1} (1 + e^{|\sigma|})^{b+1} d\sigma,$$

де $A_1 \subset \mathbb{R}^p$ — прообраз множини A при відображенні $r_1 = e^{\sigma_1}, ..., r_p = e^{\sigma_p}$, $|\sigma| = (|\sigma_1|^2 + ... + |\sigma_p|^2)^{\frac{1}{2}}$, то досить довести, що співвідношення

$$\ln M_f(e^{\sigma_1}, ..., e^{\sigma_p}) = (1 + o(1)) \ln \mu_f(e^{\sigma_1}, ..., e^{\sigma_p}) \tag{4}$$

виконується при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K_1 \cap E_0)$, де множина $E_0 \subset \mathbb{R}^p$ така, що

$$\int_{E_0} (1 + e^{|\sigma|})^{b+1} d\sigma < +\infty, \tag{5}$$

а K_1 — довільний конус в $\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат такий, що

$$\overline{K}_1 \subset \left\{ r \in \mathbb{R}^p_+ : \lim_{t\to+\infty} t^{-1} \ln M_f\left(e^{t\sigma_1}, ..., e^{t\sigma_p}\right) = +\infty \right\}.$$

Позначимо $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial \sigma_1} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial \sigma_p}$, $u(\sigma) = \ln g(\sigma)$, $g(\sigma) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| e^{\langle \sigma,n\rangle}$,

$$E_0 = \Big\{ \sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_p) \in \mathbb{R}^p : \nabla u(\sigma) \ge (1 + |u(\sigma)|)^2 (1 + e^{|\sigma|})^{b+1} \prod_{j=1}^{p} (1 + |\sigma_j|)^2 \Big\}.$$

Зауважимо, що

$$I = \int_{E_0} (1 + e^{|\sigma|})^{b+1} d\sigma \le \int_{E_0} \frac{\nabla u(\sigma)}{(1 + |u(\sigma)|)^2 \prod_{j=1}^{p} (1 + |\sigma_j|)^2} d\sigma.$$

Розглянемо тепер інтеграли

$$I_k = \int_{E_0} \frac{\partial u/\partial \sigma_k}{(1 + |u(\sigma)|)^2 \prod_{j=1}^{p} (1 + |\sigma_j|)^2} d\sigma, \quad k \in \{1, 2, ..., p\},$$

і зробимо заміну змінних $(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_p) = (\sigma_1, ..., \sigma_{k-1}, u(\sigma), \sigma_{k+1}, ..., \sigma_p)$, тобто $x_k = u(\sigma)$ та $x_j = \sigma_j$ для j, що не дорівнюють k, з якобіаном $J = \partial u/\partial \sigma_k$. Функція $u(\sigma)$ — монотонна за кожною змінною і неперервно диференційовна, тому заміна змінних — коректна. Тоді

$$I_k \le \int_{E_2} \frac{dx}{\prod_{j=1}^{p} (1 + |x_j|)^2} \le \int_{\mathbb{R}^p} \frac{dx}{\prod_{j=1}^{p} (1 + |x_j|)^2} < +\infty,$$

де E_2 — образ множини E_0 при вказаному відображенні. Отже,

$$I_0 = \sum_{k=1}^{p} I_k \le p \int_{\mathbb{R}^p} \frac{dx}{\prod_{j=1}^{p} (1+|x_j|)^2} < +\infty.$$

Тобто отримали оцінку (5), а з нею і оцінку (3).

Для всіх $\sigma \in \mathbb{R}^p \cap E_0$ отримуємо нерівність

$$\nabla u(\sigma) < (1+|u(\sigma)|)^2 (1+e^{|\sigma|})^{b+1} \prod_{j=1}^{p} (1+|\sigma_j|)^2 \tag{6}$$

Зауважимо тепер, що для $B = \nabla u(\sigma)$

$$g(\sigma) - \sum_{\|n\| \le 2B} |a_n| e^{\langle \sigma, n\rangle} = \sum_{\|n\| > 2B} \frac{\|n\|}{\|n\|} |a_n| e^{<\sigma,n>} \le$$

$$\le \frac{1}{2B} \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| |a_n| e^{\langle \sigma, n\rangle} = \frac{1}{2B} \nabla u(\sigma) = \frac{1}{2} g(\sigma),$$

звідки

$$g(\sigma) \le 2 \sum_{\|n\| \le 2B} |a_n| e^{\langle \sigma, n>} \le 2(2B+1)^p \mu_f(e^{\sigma_1}, ..., e^{\sigma_p}).$$

Залишається скористатись нерівністю (6) і врахувати, що ([5]) $|\sigma| = o(\ln g(\sigma))$ при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K_1)$. Отже, при $|\sigma| \to +\infty$ $(\sigma \in K_1 \cap E_0)$ отримуємо

$$\ln g(\sigma) = (1+o(1)) \ln \mu_f(e^{\sigma_1}, ..., e^{\sigma_p}).$$

Доведення співвідношення (4), а отже і співвідношення (2), завершує застосування очевидної нерівності $g(\sigma) \ge M_f(e^{\sigma_1}, ..., e^{\sigma_p})$. Теорему доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Ронкин Л. И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* – М.: Наука, 1971. – 432 с.
2. Філевич П. В. *Точна оцінка величини виняткової множини у співвідношенні Бореля для цілих функцій* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №2. – С.286–288.
3. Скасків О. Б.,Тракало О. М. *Про класичну нерівність Вімана для цілих кратних рядів Діріхле* // Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – Т.43, №3. – С.34–39.
4. Скасків О. Б.,Тракало О. М. *Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле* // Матем. студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.163–172.
5. Скасків О. Б., Луцишин М. Р. *Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле* // Укр. мат. журн. – 1992. – Т.44, №9. – С.1296–1298.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 21.03.2002