УДК 517.56

И. Г. Николенко*

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

I. G. Nikolenko. *Growth of meromorphic minimal surfaces of infinite order*, Matematychni Studii, **18** (2002) 35–52.

For meromorphic minimal surfaces of infinite lower order we introduce and investigate the magnitude of deviation $b(\mathbf{a}, S)$, which ia a counterpart of the magnitude of deviation of meromorphic function introduced by A. Eremenko in 1997. We obtaine a sharp estimate and a deficiency relation for these values.

И. Г. Николенко. *Рост мероморфных минимальных поверхностей бесконечного порядка* // Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №1. – С.35–52.

Для мероморфных минимальных поверхностей бесконечного нижнего порядка вводится и исследуется величина отклонения $b(\mathbf{a}, S)$, являющаяся аналогом величины отклонения мероморфной функции, введенной в 1997 году А. Еременком. Получена точная оценка, а также соотношение дефектов для этих величин.

В 60–70-х годах прошлого столетия группа американских математиков во главе с Беккенбахом развила и обобщила неванлинновскую теорию распределения значений мероморфных функций на мероморфные минимальные поверхности. Напомним основные определения и сформулируем некоторые результаты этой теории ([1]–[4]).

Под мероморфной гармонической в области D функцией понимается функция вида $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, где $f(z)$ — аналитическая в D функция, которая может быть многозначной и иметь в этой области полюсы и логарифмические особенности.

Мероморфной минимальной поверхностью (м. м. п.) в области D называется поверхность S: $x_i = \operatorname{Re} f_i(z)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, координаты x_i которой являются мероморфными гармоническими в области D функциями, причём должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{df_i(z)}{dz} \right)^2 = 0.$$

Если координаты минимальной поверхности являются гармоническими функциями во всей плоскости $\mathbb{C}$, то такая поверхность называется целой минимальной поверхностью (ц.м.п.).

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D30,30D35,53A10.
* Работа выполнена при поддержке INTAS — грант №99-00089.

Точка z_0 является $\mathbf{a}$-точкой м. м. п. $S := \mathbf{x}(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$ $(z = u + iv)$ кратности k, если $\mathbf{x}(z_0) = \mathbf{a}$ и все частные производные $\mathbf{x}(u, v)$ до порядка $k-1$ включительно обращаются в этой точке в $\mathbf{0}$, а по крайней мере одна из производных k-го порядка не равна $\mathbf{0}$. Точка z_0 называется полюсом м. м. п. S, если хотя бы одна из координат $x_i(z)$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ поверхности S имеет в точке z_0 полюс. Число $l = \max(l_1, l_2, l_3)$, где l_i — кратность полюса $x_i(z)$, называется кратностью полюса м. м. п. S. Известно, что м. м. п. не может иметь чистых логарифмических полюсов [1]. Через $n(r, \mathbf{a}, S)$ и $n(r, \infty, S)$ обозначим число $\mathbf{a}$-точек и полюсов поверхности S, соответственно, над кругом $B(0, r) = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq r^2\}$ с учетом кратностей. В теории Беккенбаха рассматривают функцию приближения

$$m(r, \mathbf{a}, S) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \dfrac{1}{\|\mathbf{x}(re^{i\theta}) - \mathbf{a}\|} d\theta\,, & \mathbf{a} \neq \infty\,, \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+ \|\mathbf{x}(re^{i\theta})\| d\theta\,, & \mathbf{a} = \infty, \end{cases}$$

считающую функцию $\mathbf{a}$-точек

$$N(r, \mathbf{a}, S) := \int_0^r \frac{n(t, \mathbf{a}, S) - n(0, \mathbf{a}, S)}{t} dt + n(0, \mathbf{a}, S) \log r$$

и функцию видимости

$$H(r, \mathbf{a}, S) := \int_0^r \frac{h(t, \mathbf{a}, S)}{t} dt,$$

где

$$h(t, \mathbf{a}, S) := \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{B(0,t)} \Delta \log \|\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{a}\|\, du dv,$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ — оператор Лапласа.

Функция $T(r, S) := m(r, \infty, S) + N(r, \infty, S)$ называется характеристикой м. м. п. S.

Первая основная теорема для м. м. п. утверждает, что для любой м. м. п. S и произвольной точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ выполняется соотношение

$$m(r, \mathbf{a}, S) + N(r, \mathbf{a}, S) + H(r, \mathbf{a}, S) = T(r, S) + O(1) \quad (r \to \infty). \tag{1}$$

Вторая основная теорема для м. м. п. S утверждает, что для любого целого q и любых точек $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^3$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, \mathbf{a}_k, S) \leq 2T(r, S) + O(\log(rT(r, S))), \quad r \to \infty,\ r \notin E, \tag{2}$$

где E — множество конечной меры.

Множество точек, лежащих на поверхности S, имеет нулевую трехмерную меру. Поэтому $N(r, \mathbf{a}, S)$, как функция переменной $\mathbf{a}$, почти всюду в $\mathbb{R}^3$ обращается в нуль. Это утверждение и вторая основная теорема показывают, что для большинства точек

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ главным слагаемым в левой части соотношения (1) является функция видимости $H(r, \mathbf{a}, S)$.

Величина

$$\delta(\mathbf{a}, S) := \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r, \mathbf{a}, S)}{T(r, S)}$$

называется неванлинновским дефектом м. м. п. S. Из соотношения (2) следует, что

$$\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{a}, S) \le 2.$$

По аналогии с теорией В. П. Петренко ([5]) Марченко И. И. в работе [6] рассматривает величины

$$\mathcal{L}(r, \mathbf{a}, S) := \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{||\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}||}, \quad \mathcal{L}(r, \infty, S) := \max_{|z|=r} \ln^+ ||\mathbf{x}(z)||,$$

$$\beta(\mathbf{a}, S) := \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r, \mathbf{a}, S)}{T(r, S)}.$$

Величина $\beta(\mathbf{a}, S)$ называется величиной отклонения поверхности S относительно точки $\mathbf{a}$. В работе [6] получена точная оценка этой величины для м. м. п. конечного нижнего порядка.

Теорема A. *Пусть S — м. м. п. конечного нижнего порядка λ. Тогда для любой точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ справедливо неравенство :*

$$\beta(\mathbf{a}, S) \le \begin{cases} \pi\lambda \sin^{-1} \pi\lambda\,, & \text{если} \quad \lambda \le \frac{1}{2}, \\ \pi\lambda\,, & \text{если} \quad \lambda > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

В работе [7] доказан аналог соотношения дефектов для величин отклонений м. м. п. конечного нижнего порядка.

Теорема B. *Пусть S — м. м. п. конечного нижнего порядка λ. Тогда*

$$\sum_{\mathbf{a}\,\in\,\mathbb{R}^3} \beta(\mathbf{a}, S) \le \begin{cases} 2\pi\lambda \sin^{-1} \pi\lambda\,, & \text{если} \quad \lambda \le \frac{1}{2}\,, \\ 2\pi\lambda\,, & \text{если} \quad \lambda > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

В случае м. м. п. бесконечного нижнего порядка величина $\beta(a, S)$ может равняться ∞. Поэтому в этом случае рассмотрим величину

$$b(\mathbf{a}, S) := \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r, \mathbf{a}, S)}{rT'_{-}(r, S)},$$

где $T'_{-}(r, S)$ — левосторонняя производная характеристики м. м. п. S.

Отметим, что в случае мероморфных функций величина $b(a, f)$ была введена и исследована А. Еременко ([8]).

В настоящей работе получена точная оценка для величины $b(\mathbf{a}, S)$ для м. м. п. бесконечного нижнего порядка и аналог соотношения дефектов для этих величин, при этом в качестве $\mathbf{a}$ может выступать точка из пространства $\mathbb{R}^3$ или ∞.

Теорема 1. *Пусть S — м. м. п. бесконечного нижнего порядка. Тогда для любой точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ справедливо неравенство*

$$b(\mathbf{a}, S) \leq \pi \sqrt{\Delta(\mathbf{a}, S)(2 - \Delta(\mathbf{a}, S))},$$

где $\Delta(\mathbf{a}, S) := \limsup\limits_{r \to \infty} m(r, \mathbf{a}, S)/T(r, S)$ *— дефект Валирона м. м. п. S в точке $\mathbf{a}$.*

Следствие 1. *Для м. м. п. S бесконечного нижнего порядка и любой точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ справедливо неравенство*

$$b(\mathbf{a}, S) \leq \pi.$$

Следствие 2. *Для м. м. п. S бесконечного нижнего порядка справедливо соотношение*

$$\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \ : b(\mathbf{a}, S) > 0\} \subset \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \ : \Delta(\mathbf{a}, S) > 0\}.$$

Отметим, что оценка в следствии 1 может достигаться. Для этого рассмотрим целую минимальную поверхность [6]

$$S_f := \begin{cases} x_1(z) &= \mathrm{Re}\left[3f(z) - f^3(z)\right], \\ x_2(z) &= \mathrm{Re}\left[i(3f(z) + f^3(z))\right], \\ x_3(z) &= \mathrm{Re}\left[3f^2(z)\right], \end{cases}$$

где $f(z)$ — целая функция бесконечного порядка, растущая в полосе $\{z : \ |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$ как $\exp(\exp z)$ ([9, с. 126]). Для поверхности S_f справедливо соотношение : $b(\infty, S) = b(\infty, f) = \pi$.

Теорема 2. *Пусть S — м. м. п. бесконечного нижнего порядка. Тогда*

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3} b(\mathbf{a}, S) \leq 2\pi.$$

Автор выражает признательность И. И. Марченко за постановку задачи и А. Ф. Гришину за внимание к работе.

1. Вспомогательные результаты

В работе [10] были введены последовательности, которые являются обобщениями пиков Пойа для функций бесконечного нижнего порядка. Напомним их определение.

Пусть $T_1(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая на $(1, +\infty)$, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to \infty$ функция бесконечного нижнего порядка. Тогда существуют последовательности $\rho_j \to \infty$, $\mu_j \to \infty$, $\varepsilon_j \to 0$ и $M_j \to \infty$ такие, что для всех r, удовлетворяющих неравенству $|\log(r/\rho_j)| \leq M_j/\mu_j$ выполняется неравенство :

$$T_1(r) \leq (1 + \varepsilon_j) \left(\frac{r}{\rho_j}\right)^{\mu_j} T_1(\rho_j). \tag{3}$$

Последовательности μ_j и M_j можно выбрать так, чтобы:

$$\mu_j = o(\log^{3/2} T_1(\rho_j)), \quad M_j = o(\log T_1(\rho_j)), \quad j \to \infty. \tag{4}$$

В этом случае последовательность ρ_j называется последовательностью обобщенных пиков Пойа.

Положим, следуя [10]

$$P_j = \rho_j e^{-\frac{M_j}{\mu_j}}, \quad Q_j = \rho_j e^{\frac{M_j}{\mu_j}}.$$

Тогда неравенство (3) выполняется для всех $r \in [P_j, Q_j]$.

Рассмотрим множества:

$$A_j = \left\{ r \in [\rho_j, Q_j] : T_1(r) \le \frac{1}{\sqrt{M_j}} \left(\frac{r}{\rho_j}\right)^{\mu_j} T_1(\rho_j) \right\},$$

$$B_j = \left\{ r \in [P_j, \rho_j] : T_1(r) \le \frac{1}{\sqrt{M_j}} \left(\frac{r}{\rho_j}\right)^{\mu_j} T_1(\rho_j) \right\}$$

и последовательности

$$R_j = \begin{cases} \min A_j, & \text{если} \quad A_j \ne \varnothing, \\ Q_j & \text{если} \quad A_j = \varnothing, \end{cases} \qquad t_j = \begin{cases} \max B_j, & \text{если} \quad B_j \ne \varnothing, \\ P_j, & \text{если} \quad B_j = \varnothing, \end{cases}$$

$$F_j = e^{-\frac{1}{\mu_j}} R_j, \quad T_j = e^{-\frac{2}{\mu_j}} R_j. \tag{5}$$

Тогда ([10], [11])

$$t_j < \rho_j < T_j < F_j < R_j, \quad j \to \infty.$$

В работе [10] доказано, что

$$\frac{T_1(R_j)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T_1(t_j)}{t_j^{\mu_j}} = o\left(\mu_j \int_{t_j}^{F_j} \frac{T_1(r)}{r^{\mu_j+1}} dr\right), \quad j \to \infty. \tag{6}$$

Далее в качестве $T_1(r)$ будет выступать характеристика м. м. п. S.

Следующие утверждения являются некоторыми аналогами леммы о логарифмической производной для м. м. п.

Лемма A [2]. *Пусть S — м. м. п. в $\mathbb{C}$. Тогда для каждой точки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ соотношение*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|\mathbf{x}_u(re^{i\theta})\|}{\|\mathbf{x}(re^{i\theta}) - \mathbf{a}\|} d\theta = O(\log(rT(r,S))$$

выполняется для всех $r \to \infty$, исключая, быть может, множество конечной меры.

Лемма 1. *Пусть S — м. м. п. бесконечного нижнего порядка. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ при $j > j_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство :*

$$\int_{t_j}^{T_j} \log^+ \max_{|z|=r} \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|} r^{-\mu_j - 1} dr < \varepsilon \mu_j \int_{t_j}^{T_j} T(r,S) r^{-\mu_j - 1} dr,$$

где последовательности t_j и T_j определены соотношением (5).

Доказательство леммы 1 проводится аналогично доказательству леммы 2 работы [7] с использованием обобщенных пиков Пойа, если в качестве величины λ, которая там рассматривается, взять μ_j.

2. Оценка для величины $\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{S})$

Вначале докажем теорему 1 для $a = \infty$. Пусть $b(\infty, S) > 0$. Рассмотрим функцию $u(z) = \log \|\mathbf{x}(z)\|$. В силу формулы (46) работы [1, с. 28] имеем в точках, не являющихся полюсами поверхности S

$$\Delta \log \|\mathbf{x}(z)\| = \frac{2\left(\mathbf{x}(z) \cdot \mathbf{X}(z)\right)^2 E}{\|\mathbf{x}(z)\|^2} \geq 0,$$

где $\mathbf{X}(z)$ — единичный вектор нормали к поверхности S, $E = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) = \|\mathbf{x}_u\|^2$ — коэффициент первой квадратичной формы S. Следовательно, $u(z)$ является δ-субгармонической функцией в $\mathbb{C}$, причём её отрицательные массы сосредоточены в полюсах поверхности S.

Положим ([12])

$$m^*(re^{i\theta}, S) = \sup_{|U|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int\limits_U \log \|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\| d\varphi,$$

$$T^*(r, \theta, S) = T^*(re^{i\theta}, S) = m^*(re^{i\theta}, S) + N(r, \infty, S),$$

где $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $|U|$ — мера Лебега множества U.

Для каждого t, $-\infty \leq t \leq +\infty$, рассмотрим

$$F_t = \{re^{i\varphi} : \log \|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\| > t\}, \quad \widetilde{u}(re^{i\varphi}) = \widetilde{u}(r, \varphi) = \sup\{t : re^{i\varphi} \in \widetilde{F}_t\},$$

где $\widetilde{F}_t$ — симметрическая перестройка множества F_t, определение которой можно найти в [13].

Функция $\widetilde{u}(re^{i\varphi})$ — невозрастающая на $[0, \pi]$ четная функция от φ, равноизмеримая при каждом фиксированном r с $\log \|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|$, и выполнены следующие соотношения

$$\widetilde{u}(r, 0) = \max_{|z|=r} \log \|\mathbf{x}(z)\|, \quad m^*(re^{i\theta}, S) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\theta \widetilde{u}(re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Поскольку $b(\infty, S) > 0$, то существует r_0 такое, что при $r \geq r_0$ выполняется неравенство

$$\mathcal{L}(r, \infty, S) = \max_{|z|=r} \log \|\mathbf{x}(z)\| = \widetilde{u}(r, 0).$$

По теореме Бернстейна ([12]) функция $T^*(re^{i\varphi}, S)$ — субгармоническая функция в области $K = \{re^{i\varphi} : 0 < r < \infty,\ 0 < \varphi < \pi\}$, непрерывная в $K \cup (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, логарифмически выпуклая по r при каждом фиксированном $\varphi \in [0, \pi]$ и, кроме того,

$$T^*(r, 0, S) = N(r, \infty, S), \quad T^*(r, \pi, S) = T(r, S)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} T^*(r, \theta, S) = \frac{\widetilde{u}(r, \theta)}{\pi} \ (0 < \theta < \pi), \tag{7}$$

где $T(r, S)$ — характеристика м. м. п. S.

Рассмотрим функцию ([14],[15])

$$\sigma(r) = \int\limits_0^\alpha T^*(re^{i\varphi}, S) \cos \mu_j(\varphi + \psi) d\varphi,$$

где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2\mu_j}$, $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2\mu_j} - \alpha$, μ_j — та последовательность, которая участвует в определении пиков Пойа.

Далее будем считать, что $T^*(z,S)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от u,v $(z = u + iv)$. В случае, если это не так, то приближаем её последовательностью дважды непрерывно дифференцируемых субгармонических функций и делаем предельные переходы как в работе [16].

Применим оператор $L = r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}$ к функции $\sigma(r)$ и воспользуемся субгармоничностью $T^*(z,S)$

$$L\sigma(r) = r\frac{d}{dr}(r\sigma'(r)) = \int\limits_0^\alpha LT^*(re^{i\varphi},S)\cos\mu_j(\varphi+\psi)d\varphi \ge$$

$$\ge -\int\limits_0^\alpha \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}T^*(re^{i\varphi},S)\cos\mu_j(\varphi+\psi)d\varphi =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\varphi}\,T^*(re^{i\varphi},S)\cos\mu_j(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha - \mu_j\,T^*(re^{i\varphi},S)\sin\mu_j(\varphi+\psi)\Big|_0^\alpha + {\mu_j}^2\sigma(r).$$

Разделим последнее неравенство на r^{μ_j+1} и проинтегрируем его по r от t_j до T_j (последовательности t_j и T_j определены в соотношении (5))

$$\int\limits_{t_j}^{T_j}\Big\{\frac{\partial}{\partial\varphi}T^*(r,S)\cos\mu_j\psi - \frac{\partial}{\partial\varphi}T^*(re^{i\alpha},S)\cos\mu_j(\alpha+\psi) -$$

$$-\mu_jT^*(re^{i\alpha},S)\sin\mu_j(\alpha+\psi) + \mu_jT^*(r,S)\sin\mu_j\psi\Big\}\,\frac{dr}{r^{\mu_j+1}} \le$$

$$\le \left.\frac{r\sigma'(r)}{r^{\mu_j}}\right|_{t_j}^{T_j} + \mu_j\,\left.\frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j}}\right|_{t_j}^{T_j}. \tag{8}$$

Из определений функций $m^*(re^{i\theta},S)$ и $m(r,\infty,S)$ следует, что

$$m^*(re^{i\theta},S) \le m(r,\infty,S),$$

поэтому

$$T^*(r,\theta,S) \le T(r,S). \tag{9}$$

Из (9) и определения функции $\sigma(r)$ получаем, что для всех $r > 0$ выполнено неравенство

$$\sigma(r) \le \frac{1}{\mu_j}T(r,S).$$

Так как $r\sigma'_-(r)$ монотонно возрастает на отрезке $[t_j, T_j]$, то

$$\sigma(F_j) \ge \sigma(F_j) - \sigma(T_j) = \int\limits_{T_j}^{F_j}\sigma'_-(r)dr \ge T_j\sigma'_-(T_j)\log\frac{F_j}{T_j} = \frac{1}{\mu_j}T_j\sigma'_-(T_j).$$

Таким образом

$$T_j\sigma'_-(T_j) \le \mu_j\sigma(F_j) \le T(F_j,S).$$

Кроме того, для всех $r \geq 1$ выполняется неравенство $r\sigma'_-(r) \geq \sigma'_-(1)$. Поэтому

$$\frac{r\sigma'(r)}{r^{\mu_j}}\bigg|_{t_j}^{T_j} + \mu_j\,\frac{\sigma(r)}{r^{\mu_j}}\bigg|_{t_j}^{T_j} \leq \frac{T(F_j,S)}{T_j^{\mu_j}} + \frac{T(T_j,S)}{T_j^{\mu_j}} - \frac{\sigma'_-(1)}{t_j^{\mu_j}} <$$

$$\frac{2T(F_j,S)}{T_j^{\mu_j}} - \frac{\sigma'_-(1)}{t_j^{\mu_j}} < 2e^2\frac{T(R_j,S)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T(t_j,S)}{t_j^{\mu_j}}. \tag{10}$$

В силу неравенств (6), (8) и (10) имеем:

$$\int_{t_j}^{T_j}\Big\{\frac{\partial}{\partial\varphi}T^*(r,S)\cos\mu_j\psi - \frac{\partial}{\partial\varphi}T^*(re^{i\alpha},S)\cos\mu_j(\alpha+\psi) -$$

$$-\mu_j T^*(re^{i\alpha},S)\sin\mu_j(\alpha+\psi) + \mu_j T^*(r,S)\sin\mu_j\psi\Big\}\frac{dr}{r^{\mu_j+1}} < \varepsilon\mu_j\int_{t_j}^{T_j}\frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr, \quad j\to\infty.$$

Положив в последнем неравенстве $\psi = \frac{\pi}{2\mu_j} - \alpha$ и использовав соотношение (7) , получим

$$\int_{t_j}^{T_j}\left\{\frac{1}{\pi}\mathcal{L}(r,\infty,S)\sin\mu_j\alpha - \mu_j T^*(re^{i\alpha},S) + \mu_j N(r,\infty,S)\cos\mu_j\alpha\right\}\frac{dr}{r^{\mu_j+1}} <$$

$$< \varepsilon\mu_j\int_{t_j}^{T_j}\frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr, \quad j\to\infty.$$

Из определения дефекта Валирона следует, что при $r \geq r_0$

$$N(r,\infty,S) > (1-\Delta(\infty,S)-\varepsilon)T(r,S).$$

Тогда в силу последнего неравенства и (9)

$$\int_{t_j}^{T_j}\frac{\mathcal{L}(r,\infty,S)}{r^{\mu_j+1}}dr < \frac{\pi\mu_j}{\sin\mu_j\alpha}(1+\varepsilon-(1-\Delta(\infty,S)-\varepsilon)\cos\mu_j\alpha)\int_{t_j}^{T_j}\frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr.$$

Используем формулу интегрирования по частям и соотношение (6)

$$\mu_j\int_{t_j}^{T_j}\frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr = \frac{T(t_j,S)}{t_j^{\mu_j}} - \frac{T(T_j,S)}{T_j^{\mu_j}} + \int_{t_j}^{T_j}\frac{rT'_-(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr <$$

$$< \varepsilon\mu_j\int_{t_j}^{T_j}\frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr + \int_{t_j}^{T_j}\frac{rT'_-(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr, \quad j\to\infty.$$

Следовательно,

$$(1-\varepsilon)\mu_j \int\limits_{t_j}^{T_j} \frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr < \int\limits_{t_j}^{T_j} \frac{rT'_-(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr, \quad j\to\infty. \tag{11}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{t_j}^{T_j} \frac{\mathcal{L}(r,\infty,S)}{r^{\mu_j+1}}dr <$$

$$< \frac{\pi}{(1-\varepsilon)\sin\mu_j\alpha}(1+\varepsilon-(1-\Delta(\infty,S)-\varepsilon)\cos\mu_j\alpha) \int\limits_{t_j}^{T_j} \frac{rT'_-(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr, \quad j\to\infty.$$

Поэтому существует последовательность $r_j\in[t_j,T_j]$ такая, что

$$\mathcal{L}(r_j,\infty,S) < \frac{\pi}{(1-\varepsilon)\sin\mu_j\alpha}(1+\varepsilon-(1-\Delta(\infty,S)-\varepsilon)\cos\mu_j\alpha)r_jT'_-(r_j,S).$$

Разделим полученное неравенство на $r_jT'_-(r_j,S)$ и выберем $\alpha=\alpha_j$ из условия $\cos\mu_j\alpha = 1-\Delta(\infty,S)-\varepsilon$

$$\frac{\mathcal{L}(r_j,\infty,S)}{r_jT'_-(r_j,S)} < \frac{\pi}{(1-\varepsilon)}\frac{(1+\varepsilon-(1-\Delta(\infty,S)-\varepsilon)^2)}{\sqrt{1-(1-\Delta(\infty,S)-\varepsilon)^2}}.$$

Переходя к пределу при $j\to\infty$, а затем $\varepsilon\to 0$, получаем

$$b(\infty,S)\le \pi\sqrt{\Delta(\infty,S)(2-\Delta(\infty,S))}.$$

Теорема 1 доказана для случая $\mathbf{a}=\infty$. В случае $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3$ теорема 1 доказывается аналогично, только в качестве функций m^*, T^* следует рассмотреть функции

$$m^*(re^{i\theta},\mathbf{a},S) = \sup_{|E|=2\theta}\frac{1}{2\pi}\int\limits_E \log\frac{1}{\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})-\mathbf{a}\|}d\varphi,$$

$$T^*(re^{i\theta},\mathbf{a},S) = m^*(re^{i\theta},\mathbf{a},S)+N(r,\mathbf{a},S)+H(r,\mathbf{a},S).$$

3. Соотношение дефектов для величин $\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{S})$.

Докажем теорему 2. Пусть $S: x_i=\operatorname{Re} f_i(z)$, $i\in\{1,2,3\}$ — м. м. п. бесконечного нижнего порядка, $\{\mathbf{a}_k\}_{k=1}^q$ — набор различных векторов в $\mathbb{R}^3$ такой, что

$$\mathbf{a}_k=(a_k^1,a_k^2,a_k^3),\ a_k^i\in\mathbb{R},\quad b(\mathbf{a}_k,S)>0,\quad k\in\{1,2,\dots,q\};\ q\ge 2;$$

$$c=\min\{\|\mathbf{a}_l-\mathbf{a}_k\| : l\ne k\}.$$

Положим ([17], [18])

$$G_j=\Big\{z: t_j\le|z|\le T_j, \|\mathbf{x}_u\| < \frac{1}{2}\exp\Big(-\sqrt{T(\rho_j,S)}\Big)\Big\},$$

где последовательности t_j, T_j и ρ_j определены соотношениями (3) и (5). Функции $f_i(z)$ $(i \in \{1,2,3\})$ являются голоморфными функциями в G_j.

Через G_{jk} обозначим множество, образованное теми связными компонентами G_j, в каждой из которых найдется точка z_1 такая, что $\|\mathbf{x}(z_1) - \mathbf{a}_k\| < \frac{c}{6}$.

Покажем, что при $j \geq j_0$ множества G_{jk} попарно не пересекаются. Для этого воспользуемся приёмом Вейцмана ([17]).

Рассмотрим функцию $f_1(z)$. Производная $f_1'(z)$ этой функции — мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Из теоремы Картана ([9]) и соотношения $F_j = e^{1/\mu_j}T_j$ следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} n\left(T_j, \frac{1}{f_1' - te^{i\varphi}}\right) d\varphi \leq \mu_j \int\limits_0^{2\pi} N\left(F_j, \frac{1}{f_1' - te^{i\varphi}}\right) d\varphi =$$

$$= \mu_j \int\limits_0^{2\pi} N\left(F_j, e^{i\varphi}, \frac{f_1'}{t}\right) d\varphi = \mu_j \left(2\pi T\left(F_j, \frac{f_1'}{t}\right) + O(1)\right), \quad j \to \infty. \tag{12}$$

Легко видеть, что для функции $f_1(z) = x_1(z) + iy_1(z) \quad (z = u + iv)$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right| \leq \|\mathbf{x}_u\|, \quad \left|\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\right| \leq \|\mathbf{x}_v\| = \|\mathbf{x}_u\|.$$

Последнее соотношение следует из изотермичности параметров u, v ([1]). Отсюда $|f_1'(z)| = \left|\frac{\partial x_1}{\partial u} + i\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| \leq 2\|\mathbf{x}_u\|$. Поэтому

$$m(r, \infty, f_1') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f_1'(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log^+ \|\mathbf{x}_u(re^{i\varphi})\| d\varphi + \log 2 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|\mathbf{x}_u(re^{i\varphi})\|}{\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|} d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\| d\varphi + \log 2.$$

Отсюда и из леммы А имеем

$$m(r, \infty, f_1') \leq m(r, \infty, S) + O(\log T(r, S)).$$

Отметим, что полюсы функции $f_1'(z)$ совпадают с полюсами поверхности S. Очевидно, $n(r, \infty, f_1') \leq 2n(r, \infty, S)$. Поэтому $N(r, \infty, f_1') \leq 2N(r, \infty, S)$. Следовательно,

$$T(r, f_1') = m(r, \infty, f_1') + N(r, \infty, f_1') \leq 2T(r, S) + O(\log T(r, S)).$$

Подставим полученные оценки в (12)

$$\int\limits_0^{2\pi} n\left(T_j, \frac{1}{f_1' - te^{i\varphi}}\right) d\varphi \leq \mu_j \left(4\pi T(F_j, S)) + \log^+ 2\pi \frac{1}{t} + O(\log T(F_j, S))\right) \leq$$

$$\leq \log^2 T(F_j, S) \left(5\pi T(F_j, S) + 2\pi \log^+ \frac{1}{t}\right) <$$

$$< \log^2 T(R_j, S)\left(5\pi T(R_j, S) + \log^+ 2\pi\frac{1}{t}\right), \quad j \to \infty,$$

где последовательности T_j,R_j,S_j определены в соотношении (5). Далее обозначим через $l_1(t)$ суммарную длину линий уровня $|f_1'(z)| = t$ в круге $|z| \le T_j$. Положим

$$\gamma_{11} = \frac{1}{2}\exp\Big(-\sqrt{T(\rho_j, S)}\Big), \quad \gamma_{12} = 2\gamma_{11}.$$

Согласно принципа длины и площади ([13]) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\gamma_{11}}^{\gamma_{12}} \frac{l_1^2(t)}{t}dt \le \pi T_j^2 \log^2 T(R_j, S)\left(5\pi T(R_j, S) + 2\pi\log^+\frac{1}{\gamma_{11}}\right) \le$$

$$\le \pi R_j^2 \log^2 T(R_j, S)\left(5\pi T(R_j, S) + \pi T(\rho_j, S)\right). \qquad (13)$$

В силу соотношений (3) и (4)

$$T(R_j, S) \le T(Q_j, S) = T(\rho_j e^{\frac{M_j}{\mu_j}}, S) \le (1 + \varepsilon_j)e^{M_j}T(\rho_j, S) < T^2(\rho_j, S).$$

Тогда из неравенства (13) и учитывая то, что поверхность S имеет бесконечный порядок, получаем

$$\int\limits_{\gamma_{11}}^{\gamma_{12}} \frac{l_1^2(t)}{t}dt = \int\limits_{\log\gamma_{11}}^{\log\gamma_{12}} l_1^2(e^x)dx = \int\limits_{-\log\gamma_{12}}^{-\log\gamma_{11}} l_1^2(e^{-\alpha})d\alpha < \frac{1}{2}T^3(\rho_j, S).$$

Так как $\gamma_{12} = 2\gamma_{11} = \exp(-\sqrt{T(\rho_j, S)})$, то существует число $\alpha_{1j} \in [\sqrt{T(\rho_j, S)} - \log 2, \sqrt{T(\rho_j, S)}]$ такое, что

$$l_1(e^{-\alpha_{1j}}) \le T^{\frac{3}{2}}(\rho_j, S), \quad j \to \infty.$$

Применяя те же рассуждения к функциям $f_2(z)$ и $f_3(z)$, получаем, что для $k \in \{2, 3\}$ существуют числа $\alpha_{kj} \in [\sqrt{T(\rho_j, S)} - \log 2, \sqrt{T(\rho_j, S)}]$ такие, что

$$l_k(e^{-\alpha_{kj}}) \le T^{\frac{3}{2}}(\rho_j, S), \quad j \to +\infty,$$

где $l_k(t)$ — суммарная длина линий уровня $|f_k'(z)| = t$ в круге $|z| \le T_j$.

Пусть $\alpha_j = \max(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{3j})$. Положим далее

$$G_j' = \Big\{z : t_j \le |z| \le T_j, \|\mathbf{x}_u(z)\| \le \frac{1}{2}\exp(-\alpha_j)\Big\}.$$

Функции f_i являются голоморфными и в G_j'. Очевидно, что $G_{jk} \subset G_j \subset G_j'$, $k \in \{1, \ldots, q\}$. Рассмотрим множества

$$\widetilde{G}_j^i = \{z : t_j \le |z| \le T_j, |f_i'(z)| < \exp(-\alpha_{ij})\}, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

$$\widetilde{G_j} = \bigcap_{i=1}^{3} \widetilde{G}_j^i.$$

Мы показали, что длины границ множеств $\widetilde{G}_j^i$ $(i \in \{1,2,3\})$ в круге $\{z : |z| \le T_j\}$ не превосходят $T^{\frac{3}{2}}(\rho_j, S)$. Поэтому длина границы множества $\widetilde{G}_j$ не превосходит $3T^{\frac{3}{2}}(\rho_j, S)$. Покажем, что $G'_j \subset \widetilde{G}_j$.

Пусть $z \in G'_j$. Тогда $\|\mathbf{x}_u(z)\| \le \frac{1}{2}\exp(-\alpha_j)$. Поэтому в силу уравнения Даламбера-Эйлера (Коши-Римана) для аналитической в G'_j функции $f_1(z) = \frac{\partial x_1}{\partial u} + i\frac{\partial y_1}{\partial u}$ имеем $\frac{\partial y_1}{\partial u} = -\frac{\partial x_1}{\partial v}$. Так как параметры u и v — изотермические, то $E = \|\mathbf{x}_u\|^2 = G = \|\mathbf{x}_v\|^2$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right| \le \|\mathbf{x}_u\| < \frac{1}{2}\exp(-\alpha_j) \le \frac{1}{2}\exp(-\alpha_{1j}),$$

$$\left|\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\right| \le \|\mathbf{x}_v\| = \|\mathbf{x}_u\| < \frac{1}{2}\exp(-\alpha_{1j}),$$

$$|f'_1(z)| = \left|\frac{\partial x_1}{\partial u} + i\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| \le \left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| < \exp(-\alpha_{1j}).$$

Аналогично

$$|f'_2(z)| < \exp(-\alpha_{2j}), \quad |f'_3(z)| < \exp(-\alpha_{3j}).$$

Следовательно, $z \in \widetilde{G_j^i}$ $(i \in \{1,2,3\})$. Таким образом, $G'_j \subset \widetilde{G}_j$ и $G_{jk} \subset G_j \subset G'_j \subset \widetilde{G}_j$.

Пусть $z \in G_{jk}$. Тогда существует связная компонента $\mathcal{M}$ множества G_j такая, что $z \in \mathcal{M}$ и существует точка $z_1 \in \mathcal{M} : \|\mathbf{x}(z_1) - \mathbf{a}_k\| < \frac{c}{6}$. Соединим точки z и z_1, принадлежащие $\mathcal{M} \subset \widetilde{G}_j$ кривой Γ, лежащей в $\widetilde{G}_j$, длина которой не превосходит длины границы множества $\widetilde{G}_j$. Тогда

$$|f_1(z) - f_1(z_1)| = \left|\int\limits_\Gamma |f'_1(z)| dz\right| \le \int\limits_\Gamma |f'_1(z)||dz| = \int\limits_\Gamma \left|\frac{\partial x_1}{\partial u} + i\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| |dz|.$$

Так как

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right| \le \|\mathbf{x}_u\| < \frac{1}{2}\exp\Big(-\sqrt{T(\rho_j, S)}\Big),$$

$$\left|\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\right| \le \|\mathbf{x}_v\| = \|\mathbf{x}_u\| < \frac{1}{2}\exp\Big(-\sqrt{T(\rho_j, S)}\Big),$$

то

$$\left|\frac{\partial x_1}{\partial u} + i\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| \le \left|\frac{\partial x_1}{\partial u}\right| + \left|\frac{\partial y_1}{\partial u}\right| < \exp\Big(-\sqrt{T(\rho_j, S)}\Big).$$

Тогда

$$|f_1(z) - f_1(z_1)| < \exp\Big(-\sqrt{T(\rho_j, S)}\Big)\int\limits_\Gamma |dz| <$$

$$< \exp\Big(-\sqrt{T(\rho_j, S)}\Big) T^{\frac{3}{2}}(\rho_j, S) < \frac{c}{16}, \quad j \to \infty.$$

Поэтому

$$|x_1(z) - x_1(z_1)| = |\operatorname{Re}[f_1(z) - f_1(z_1)]| \le |f_1(z) - f_1(z_1)| < \frac{c}{16}.$$

Аналогично для функций $x_2(z)$, $x_3(z)$ получаем

$$|x_2(z) - x_2(z_1)| < \frac{c}{16}, \quad |x_3(z) - x_3(z_1)| < \frac{c}{16}, \quad j \to \infty.$$

Таким образом для всех $z \in G_{jk}$ и $j \ge j_0$:

$$|x_1(z) - a_k^1| \le |x_1(z) - x_1(z_1)| + |x_1(z_1) - a_k| < \frac{c}{16} + \frac{c}{6} < \frac{c}{4}.$$

Аналогично

$$|x_2(z) - a_k^2| < \frac{c}{4}, \quad |x_3(z) - a_k^3| < \frac{c}{4}.$$

Тогда

$$\|\mathbf{x}(z) - \mathbf{a}_k\| < \sqrt{\frac{3c^2}{16}} < \frac{c}{2}.$$

Отсюда следует, что множества G_{jk} при $j \ge j_0$ попарно не пересекаются.

Далее рассмотрим функции ([16])

$$w_{jk}(z) = \begin{cases} -\log \|\mathbf{x}_u(z)\|, & z \in G_{jk}, \\ \sqrt{T(\rho_j, S)} + \log 2, & z \notin G_{jk}. \end{cases}$$

Покажем, что функции $w_{jk}(z)$ являются δ-субгармоническими в кольце $R(t_j, T_j)$, причем отрицательные массы сосредоточены в нулях функции $\|\mathbf{x}_u(z)\|$.

Пусть $\{b_\nu\}$ — полюсы поверхности $S_u = \left\{\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}\right\}$. Построим целую функцию $q(z)$ с нулями в точках $\{b_\nu\}$ (с соответствующими кратностями). Рассмотрим функцию

$$Q_1(z) = \log(\|\mathbf{x}_u(z)\| \cdot |q(z)|) = \log \|\mathbf{x}_u(z)\| + \log |q(z)|.$$

У этой функции уже нет полюсов и кроме того [1]

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : \Delta \log \|\mathbf{x}_u(z)\| = \frac{1}{2}\Delta \log E = -EK \ge 0,$$

где K — гауссова кривизна поверхности S. Таким образом, $Q_1(z)$ — субгармоническая функция. Поэтому функция

$$Q(z) = \log \|\mathbf{x}_u(z)\| = Q_1(z) - \log |q(z)| = Q_1(z) - Q_2(z)$$

является δ-субгармонической функцией.

Положим ([12])

$$m^*_{jk}(r, \theta, S) = \sup_{|U|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int\limits_U w_{jk}(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

$$N(r, w_{jk}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} w_{jk,2}(re^{i\varphi}) d\varphi = N_{jk}(r, S),$$

$$T^*_{jk}(re^{i\theta}, w_{jk}) = m^*_{jk}(r, \theta, S) + N_{jk}(r, S),$$

где $w_{jk}(z) = w_{kj,1}(z) - w_{kj,2}(z)$.

Из теоремы Бернстейна ([12]) следует, что функция $T^*_{jk}(re^{i\theta}, w_{jk})$ является субгармонической в кольце $R(t_j, T_j)$. Рассмотрим, следуя [16]

$$T^*_0(re^{i\theta}, S) = \sum_{k=1}^q T^*_{jk}(re^{i\theta}, w_{jk}) = \sum_{k=1}^q m^*_{jk}(r, \theta, S) + \sum_{k=1}^q N_{jk}(r, S).$$

Далее нам понадобится неванлинновская характеристика δ-субгармонической функции $u(z)$

$$T(r,u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u^+(re^{i\varphi})d\varphi+N(r,u),$$

где

$$N(r,u)=\int\limits_1^r\frac{\mu_-(|z|<t)}{t}dt,$$

μ_- — отрицательная часть риссовской меры μ функции $u(z)$.

Функция $T_0^*(re^{i\theta},S)$ есть сумма конечного числа субгармонических в кольце $R(t_j,T_j)$ функций, поэтому сама субгармоническая. Для неё выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}T_0^*(re^{i\theta},S)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^q\widetilde{w}_{jk}(re^{i\theta}),\quad 0<\theta<\pi,$$

где $\widetilde{w}_{jk}(z)$ — круговая перестройка функции $w_{jk}(z)$ [16],

$$\max_{0\le\theta\le\pi}T_0^*(re^{i\theta},S)\le T\left(r,\frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}\right)+q(\sqrt{T(\rho_j,S)}+\log 2),\tag{14}$$

где $T\left(r,\frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}\right)$ — неванлинновская характеристика δ-субгармонической функции $\log\frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}$.

Для каждого $\alpha: 0<\alpha\le\frac{\pi}{2\mu_j}$ положим (cite13,[14])

$$\sigma_0(r)=\int\limits_0^\alpha T_0^*(re^{i\theta},S)\sin\mu_j(\alpha-\theta)d\theta.$$

Будем считать, что $T_0^*(z,S)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция от u,v $(z=u+iv)$. В случае, если это не так, следует приблизить её дважды непрерывно дифференцируемыми субгармоническими функциями и сделать предельные переходы как в работе [16].

Применим оператор $L=r\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}$ к функции $\sigma_0(r)$ и воспользуемся субгармоничностью функции $T_0^*(re^{i\theta},S)$:

$$L\sigma_0(r)=r\frac{d}{dr}(r\sigma_0'(r))=\int\limits_0^\alpha LT_0^*(re^{i\theta},S)\sin\mu_j(\alpha-\theta)d\theta\ge$$

$$\ge-\int\limits_0^\alpha\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}T_0^*(re^{i\theta},S)\sin\mu_j(\alpha-\theta)d\theta=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\theta}\,T_0^*(re^{i\theta},S)\sin\mu_j(\alpha-\theta)\Big|_0^\alpha-\mu_j\,T_0^*(re^{i\theta},S)\cos\mu_j(\alpha-\theta)\Big|_0^\alpha+\mu_j^2\sigma_0(r)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\theta}T_0^*(r,S)\sin\mu_j\alpha-\mu_jT_0^*(re^{i\alpha},S)+\mu_jT_0^*(r,S)\cos\mu_j\alpha+\mu_j^2\sigma_0(r)=$$

$$= h(r) + \mu_j^2 \sigma_0(r).$$

Таким образом, для $r \in [t_j, T_j]$ имеем

$$r \frac{d}{dr}(r\sigma_0'(r)) \geq h(r) + \mu_j^2 \sigma_0(r).$$

Разделим полученное неравенство на r^{μ_j+1} и проинтегрируем его по r от t_j до T_j

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{1}{r^{\mu_j}} \frac{d}{dr} r\sigma_0'(r) dr \geq \int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r)}{r^{\mu_j+1}} dr + \mu_j^2 \int_{t_j}^{T_j} \frac{\sigma_0(r)}{r^{\mu_j+1}} dr.$$

Применение формулы интегрирования по частям к левой части неравенства и использование монотонности функции $r\sigma_0'(r)$ дает

$$\int_{t_j}^{T_j} \frac{h(r)}{r^{\mu_j+1}} dr \leq \left. \frac{r\sigma_0'(r)}{r^{\mu_j}} \right|_{t_j}^{T_j} + \mu_j \left. \frac{\sigma_0(r)}{r^{\mu_j}} \right|_{t_j}^{T_j} . \tag{15}$$

В работе [7] было доказано, что

$$T\left(r, \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}\right) \leq 2\left(T(r,S) + m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|}\right)\right), \tag{16}$$

где

$$m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|\mathbf{x}_u(re^{i\varphi})\|}{\|\mathbf{x}(re^{i\varphi})\|} d\varphi.$$

Из определения $\sigma_0(r)$, неравенств (14), (16) и леммы 1 следует, что

$$\sigma_0(r) \leq \frac{1}{\mu_j}\left(T\left(r, \frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}\right) + q(\sqrt{T(\rho_j, S)} + \log 2)\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mu_j}\left(2T(r,S) + m\left(r, \frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)\|}\right) + q(\sqrt{T(\rho_j, S)} + \log 2)\right) \leq \frac{3}{\mu_j} T(r,S).$$

Так как $r\sigma_0'(r)$ монотонно возрастает на отрезке $[t_j, T_j]$, то

$$\sigma_0(F_j) \geq \sigma_0(F_j) - \sigma_0(T_j) = \int_{T_j}^{F_j} \sigma_0'(r) dr \geq T_j \sigma_0'(T_j) \log \frac{F_j}{T_j} = \frac{1}{\mu_j} T_j \sigma_0'(T_j).$$

Таким образом из полученных неравенств и (6) следует, что

$$\left. \frac{r\sigma_0'(r)}{r^{\mu_j}} \right|_{t_j}^{T_j} + \mu_j \left. \frac{\sigma_0(r)}{r^{\mu_j}} \right|_{t_j}^{T_j} = o\left(\mu_j \int_{t_j}^{T_j} \frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}} dr\right), \quad j \to \infty.$$

Подставим последнее соотношение в (15)

$$\int\limits_{t_j}^{T_j}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{q}\widetilde{w}_{jk}(r,0)\sin\mu_j\alpha-\mu_jT_0^*(re^{i\alpha},S)+\mu_j\sum_{k=1}^{q}N_{jk}(r,S)\cos\mu_j\alpha\right\}\frac{dr}{r^{\mu_j+1}}<$$

$$<o\left(\mu_j\int\limits_{t_j}^{T_j}\frac{T(r,S)}{r^{\mu_j+1}}dr\right),\quad j\to\infty.$$

Из (14), (16) и леммы 1 следует, что

$$\int\limits_{t_j}^{T_j}T_0^*(re^{i\alpha},S)r^{-\mu_j-1}dr\le\int\limits_{t_j}^{T_j}T\left(r,\frac{1}{\|\mathbf{x}_u(z)\|}\right)r^{-\mu_j-1}dr+q\int\limits_{t_j}^{T_j}(\sqrt{T(\rho_j,S)}+\log 2)r^{-\mu_j-1}\le$$

$$\le 2\int\limits_{t_j}^{T_j}\left(T(r,S)+m\left(r,\frac{\mathbf{x}_u(z)}{\|\mathbf{x}(z)\|}\right)\right)r^{-\mu_j-1}dr+o\left(\int\limits_{t_j}^{T_j}T(r,S)r^{-\mu_j-1}dr\right)=$$

$$=(2+o(1))\int\limits_{t_j}^{T_j}T(r,S)r^{-\mu_j-1}dr,\quad j\to\infty.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{t_j}^{T_j}\sum_{k=1}^{q}\widetilde{w}_{jk}(r,0)r^{-\mu_j-1}dr<2\frac{\pi\mu_j}{\sin\mu_j\alpha}(1+o(1))\int\limits_{t_j}^{T_j}T(r,S)r^{-\mu_j-1}dr\,,j\to\infty. \tag{17}$$

Легко видеть, что

$$\max_{|z|=r}\log^+\frac{1}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}_k\|}=\log^+\frac{1}{\|\mathbf{x}(re^{i\theta_k(r)})-\mathbf{a}_k\|}\le\max_{|z|=r}\log^+\frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}_k\|}+$$

$$+\max_{re^{i\theta}\in G_{jk}}\log^+\frac{1}{\|\mathbf{x}_u(re^{i\theta})\|}+\sqrt{T(\rho_j,S)}+\log 2,\quad \mathbf{a}_k\in\mathbb{R}^3.$$

Из неравенства (19) работы [10] следует, что $T(\rho_j,S)\le T^{3/2}(t_j,S)$.

Отметим,что

$$\widetilde{w}_{jk}(r,0)=\max_{re^{i\theta}\in G_{jk}}\log^+\frac{1}{\|\mathbf{x}_u(re^{i\theta})\|}.$$

Следовательно, для всех $r\in[t_j,T_j]$ получаем

$$\mathcal{L}(r,\mathbf{a}_k,S)\le\max_{|z|=r}\log^+\frac{\|\mathbf{x}_u(z)\|}{\|\mathbf{x}(z)-\mathbf{a}_k\|}+\widetilde{w}_{jk}(r,0)+T^{3/4}(r,S),\quad j\to\infty.$$

Поэтому, используя (17), (11) и лемму 2, имеем

$$\int\limits_{t_j}^{T_j}\sum_{k=1}^{q}\mathcal{L}(r,\mathbf{a}_k,S)r^{-\mu_j-1}dr<$$

$$< 2\frac{\pi}{\sin \mu_j \alpha}(1 + o(1)) \int\limits_{t_j}^{T_j} rT'_-(r, S)r^{-\mu_j - 1}dr, \quad j \to \infty.$$

Отсюда, существует последовательность $r_j \in [t_j, T_j]$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r_j, \mathbf{a}_k, S) = 2\frac{\pi}{\sin \mu_j \alpha}(1 + o(1))r_j T'_-(r_j, S), \quad j \to \infty.$$

Далее выберем $\alpha = \frac{\pi}{2\mu_j}$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r_j, \mathbf{a}_k, S)}{r_j T'_-(r_j, S)} \leq 2\pi(1 + o(1)), \quad j \to \infty.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{q} b(\mathbf{a}_k, S) \leq 2\pi.$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beckenbach E.F., Hutchison G.A. *Meromorphic minimal surfaces* // Pac. Journ. of Math. – 1969. – V.28,№1. – P.17–47.
2. Beckenbach E.F., Cootz. *The second fundamental theorem for meromorphic minimal surfaces* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1970. – V.76,№4. – P.711–716.
3. Beckenbach E. F., Hutchison G. A.*Meromorphic minimal surfaces*// Bull. Amer. Math. Soc.– 1962. – V.68,№5.– P.519–522.
4. Beckenbach E. F., Eng E. H., Tafel R. E. *Global properties of rational and logarithmico-rational minimal surfaces*// Pac. Journ. Math. Soc.– 1974. – V.50, №2. – P.355–381.
5. Петренко В. П. *Рост мероморфных функций.* – Харкiв: Вища школа, 1978.
6. Марченко И. И. *Рост мероморфных минимальных поверхностей*// Сб."Теория функций, функциональный анализ и их приложение".– 1979. – Вып.31. – С.95–98.
7. Марченко И. И., Николенко И. Г. *О величинах отклонений мероморфных минимальных поверхностей* // Вiсник Харкiвського унiверситету. Сер. матем., прикл. матем. i механiка. – 1999. – №444. – С.71 –88.
8. Eremenko A. *An analogue of the defect relation for the uniform metric* // Complexe Variables Theory Appl. – 1997. – V.34. – P.83 –97.
9. Хейман У. К.*Мероморфные функции.* – М.: Мир, 1966.
10. Bergweiler W., Bock H. *On the growth of meromorphic functions of infinite order* // J. Analyse Math. – 1994. – V.64. – P.327–336.
11. Марченко И.И., Николенко И.Г. *Рост мероморфных в круге функций бесконечного порядка* // Вiсник Харкiвського унiверситету. Сер. матем., прикл. матем. i механiка. – 2000. – №475. – С.113–125.
12. Baernstein A. *Integral means, univalent functions and circular symmetrization* // Acta.Math. – 1974. – V.133. – P.139–169.

13. Хейман У. К. *Многолистные функции.* – М.: ИЛ, 1960.

14. Essen M., Shea D. F. *Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions*// Proc. Poyal Irish. Acad. – 1982. – V.A82, №2. – P.201–216.

15. Gariepy R., Lewis J. L. *Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions*// Arkive Math. – 1975. – V.13. №1. – P.91–105.

16. Марченко И. И., Щерба А. И. *О величинах отклонений мероморфных функций* // Мат. сб. – 1990. – Т.181. №1. – С.3–24.

17. Weitsman A. *A theorem on Nevanlinna deficiencies*// Acta.Math. – 1972. – V.128. №1–2. – P.41–52.

18. Марченко И. И. *О росте целых и мероморфных функций* // Мат. сб. – 1998. – Т.189, №6. – С.59 –84.

Харьковский национальный университет им. И. Каразина

Поступило 29.07.2002