УДК 512.538

Р. А. Заторський

ПРО ОДИН АЛГОРИТМ ПІДРАХУНКУ ЧИСЛА m-ПЕРЕСТАНОВОК НА ДОВІЛЬНИХ МУЛЬТИМНОЖИНАХ

R. A. Zatorskyi. *On an algorithm for calculation of the number of m-permutations on multisets*, Matematychni Studii, **17** (2002) 215–219.

Using a generating function of the number of m-permutations on a multiset, a recurrent equality expressing i-permutations $\left[\begin{array}{l} k_1,\ldots,k_r \\ i \end{array}\right]$, $i\in\{0,\ldots,\sum_{s=1}^{r}k_s\}$, via j-permutations $\left[\begin{array}{l} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{array}\right]$, $j\in\{0,\ldots,\sum_{s=1}^{r-1}k_s\}$, is established. Using this equality, an algorithm for calculation of the number of m-permutations on a multiset is described.

Р. А. Заторский. *Об одном алгоритме подсчета числа m-перестановок на произвольных мультимножествах* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.215–219.

Используя генератриссу числа m-перестановок на мультимножестве, выводится рекурентное равенство, выражающее i-перестановки $\left[\begin{array}{l} k_1,\ldots,k_r \\ i \end{array}\right]$, $i\in\{0,\ldots,\sum_{s=1}^{r}k_s\}$, через j-перестановки $\left[\begin{array}{l} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{array}\right]$, $j\in\{0,\ldots,\sum_{s=1}^{r-1}k_s\}$. На его основании описывается алгоритм вычисления числа m-перестановок на мультимножестве.

Поняття мультимножини, яке узагальнює поняття множини, слід віднести до основних понять дискретної математики. Тому комбінаторний аналіз мультимножин належить до фундаментальних задач комбінаторного аналізу. Однак, алгоритмам обчислення комбінаторних чисел на мультимножинах, заданих у загальному вигляді, в літературі відводиться мало місця. У цій статті обгрунтовується ефективний алгоритм обчислення m-перестановок на мультимножинах.

Нехай задана деяка мультимножина

$$A=\left\{x_1^{k_1};\ldots;x_n^{k_n}\right\}, \tag{1}$$

де $1\le k_1\le k_2\le\ldots\le k_n$ — кратності її елементів. *Базою* мультимножини (1) є множина $S(A)=\{x_1;\ldots;x_n\}$, а її *потужністю* $|A|$ — сума кратностей всіх її елементів, тобто $|A|=\sum_{i=1}^{n}k_i$ (див. [1], або [2, с. 11–12]). *m-перестановкою* на мультимножині (1) називають впорядковану m-вибірку з цієї мультимножини.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 05A05.

У [4] отримано наступну формулу для обчислення числа m-перестановок на мультимножині (1)

$$P^m(A) = \sum_{\lambda\in\Lambda^m(A)} \frac{m!}{(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(s!)^{\lambda_s}} \prod_{j=1}^{s} \begin{pmatrix} \alpha(j) - \sum\limits_{i=j+1}^{s}\lambda_j \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $\Lambda^m(A)$ є множиною всіх цілих невід'ємних розв'язків $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ рівняння

$$\sum_{i=1}^{s} i\lambda_i = m, \tag{3}$$

що задовольняють нерівності $\sum_{i=j}^{s}\lambda_i \le \alpha(j)$, де $j\in\{1,\ldots,s\}$; $s=\min(m,k_n)$, а $\alpha = (\alpha(1),\ldots,\alpha(s))$ — розбиття числа $|A|$, спряжене до розбиття $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $k=|A|$ (див. [5, с. 230]; [6, с. 230]).

Рівняння (3) може бути зведене до рівняння вигляду $\sum_{i=1}^{s} a_i = m$, а число розв'язків останнього надмірно швидко зростає із зростанням m і s. Так, вже при $m=s=20$ рівняння (3) має 627 розв'язків. Тому формула (2) не завжди зручна для практичного використання, бо вимагає великого об'єму обчислень. Нижче пропонується алгоритм обчислення m-перестановок на мультимножині (1), який значною мірою усуває ці недоліки.

Позначимо число m-перестановок на мультимножині (1) за аналогією до числа m-сполучень, через $P^m(A) = \begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ m \end{bmatrix}$. Якщо $k_1=k_2=\ldots=k_n=1$, то мультимножина (1) збігається зі своєю базою, тобто є множиною. У цьому випадку маємо $\begin{bmatrix} \underbrace{11\ldots1}_{n} \\ m \end{bmatrix} = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, $0\le m\le n$. Якщо ж $A=\{\underbrace{x_1;x_1;\ldots;x_1}_{k_1}\}$, то $\begin{bmatrix} k_1 \\ m\end{bmatrix}=1$, $0\le m\le k_1$.

Теорема. *Правильна рекурентна рівність*

$$\begin{bmatrix} k_1,\ldots k_r \\ i \end{bmatrix} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{\min(i,k_1+\ldots+k_{r-1})} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}, & i\le k_r \\ \sum\limits_{j=i-k_r}^{\min(i,k_1+\ldots+k_{r-1})} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_{r-1} \\ j \end{bmatrix}, & k_r < i \le k_1+\ldots+k_r \end{cases}, \tag{4}$$

де $0\le i\le k=|A|$, $r\in\{2,\ldots,n\}$.

Доведення. У [3], на основі нумераторної алгебри (див. с. 38) виводиться експоненціальна твірна функція для r-перестановок типу $(\Lambda_1,\ldots\Lambda_n)$ з n елементів (див с. 44), яка має вигляд $\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda_i} t^\lambda/\lambda!\right)$. У термінології мультимножин ця функція матиме, очевидно, вигляд $\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k_i} t^j/j!$, тобто

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k_i}\frac{t^j}{j!} = \sum_{i=0}^{k_1+\ldots+k_n} \begin{bmatrix} k_1,\ldots,k_n \\ i \end{bmatrix}\frac{t^i}{i!}. \tag{5}$$

Вище зазначалося, що $\left[\begin{matrix} k_1 \\ i \end{matrix}\right] = 1$, $i \in \{0, 1, \ldots, k_1\}$. Нехай елементи послідовності $\left\{\left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_{r-1} \\ i \end{matrix}\right]\right\}$, $i \in \{0, \ldots, k_1 + \ldots + k_{r-1}\}$, відомі, тоді, враховуючи (5), матимемо

$$\left(\sum_{j=0}^{k_1+\ldots+k_{r-1}} \left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_{r-1} \\ j \end{matrix}\right] \frac{t^j}{j!}\right) \cdot \sum_{s=0}^{k_r} \frac{t^s}{s!} = \sum_{i=0}^{k_1+\ldots+k_r} \left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_r \\ i \end{matrix}\right] \frac{t^i}{i!}.$$

Але позаяк

$$\left(\sum_{j=0}^{k_1+\ldots+k_{r-1}} \left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_{r-1} \\ j \end{matrix}\right] \frac{t^j}{j!}\right) \sum_{s=0}^{k_r} \frac{t^s}{s!} = \sum_{i=0}^{k_1+\ldots+k_r} \left(\sum_{j+s=i} \left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_{r-1} \\ j \end{matrix}\right] \frac{t^i}{j!s!}\right),$$

то

$$\left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_r \\ i \end{matrix}\right] = \sum_{j+s=i} \frac{i!}{j!s!} \left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_{r-1} \\ j \end{matrix}\right] = \sum_{j+s=i} \left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right) \left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_{r-1} \\ j \end{matrix}\right].$$

Для того, щоб обидва вирази $\left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right)$ і $\left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_{r-1} \\ j \end{matrix}\right]$, що знаходяться під знаком останньої суми, мали зміст, необхідно, щоб виконувалися нерівності $j \le i$ і $j \le k_1 + \ldots + k_{r-1}$, тобто щоб виконувалася нерівність $j \le \min(i, k_1 + \ldots + k_{r-1})$. Якщо $i \le k_r$, то, враховуючи нерівність $0 \le s \le k_r$, робимо висновок, що найменшим значенням j у рівності $j + s = i$ є $j = 0$. Міркуючи подібно, робимо висновок, що при $i > k_r$ найменшим значенням j у рівності є $j = i - k_r$. Отже, рівність (4) істинна. □

За допомогою рекурентної рівності (4) можна обчислити кількість всіх m-перестановок $m \in \{0, \ldots, |A|\}$ мультимножини (1), але для цього, перш за все, необхідно обчислити всі числа $\left[\begin{matrix} k_1, \ldots, k_r \\ i \end{matrix}\right]$, $r \in \{2, \ldots, n-1\}$; $i \in \{0, \ldots, \sum_{j=1}^{r} k_j\}$. Опишемо алгоритм обчислення кількості m-перестановок мультимножини (1), який раціонально організовує всі необхідні обчислення.

1. Записуємо рядок із $k_1 + 1$ одиниць, що є числами i-розміщень $\left[\begin{matrix} k_1 \\ i \end{matrix}\right]$ на мультимножині $A = \left\{x_1^{k_1}\right\}$, $i \in \{0, \ldots, k_1\}$. Підкреслюємо отриманий рядок і переходимо до наступного рядка, який вважаємо нульовим.
2. Нумеруємо рядки від нульового до $k_1 + k_2$ включно так, щоб утворилася таблиця, що матиме $k_1 + 1$ стовпців і $k_1 + k_2 + 1$ рядків.

3 а). Заповнюємо правий верхній і лівий нижній кути таблиці нулями так, щоб утворилися рівнобедрені трикутники із стороною k_1 нулів.

3 б). Заповнюємо решту клітинок як фрагмент трикутника Паскаля.

4. Обчислюємо суму добутків елементів i-того ($i \in \{0, \ldots, k_1 + k_2\}$) рядка таблиці на відповідні елементи підкресленого рядка. Отримаємо число розміщень $\left[\begin{matrix} k_1, k_2 \\ i \end{matrix}\right]$, $i \in \{0, \ldots, k_1 + k_2\}$ і запишемо його в цьому ж рядку справа.

5. Якщо кількість рядків останньої таблиці більша від потужності мультимножини на одиницю, то обчислення зупиняємо. Результатом алгоритму є результати обчислень пункту 4. У протилежному випадку переходимо до побудови нової таблиці чисел, тобто переходимо до п.1, збільшуючи при цьому всі числа що зустрічаються в пунктах 1–3 на величину кратності наступного елемента мультимножини. (В пункті 1 записуємо рядок із $k_1 + k_2 + 1$ чисел з пункту 4, що є числами розміщень $\begin{bmatrix} k_1, k_2 \\ i \end{bmatrix}$, $i \in \{0, \dots, k_1 + k_2\}$; в пункті 2 рядки нумеруємо до $k_1 + k_2 + k_3$-го включно і т.д.).

Приклад 1. Розглянемо мультимножину $A = \{x_1^2; x_2^4; x_3^5\}$. Обчислимо кількість всіх її m-перестановок ($m \in \{0, \dots, 11\}$). Спочатку будуємо таблицю

	1	1	1	
0	1	0	0	1
1	1	1	0	2
2	1	2	1	4
3	1	3	3	7
4	1	4	6	11
5	0	5	10	15
6	0	0	15	15

	1	2	4	7	11	15	15	
0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	3
2	1	2	1	0	0	0	0	9
3	1	3	3	1	0	0	0	26
4	1	4	6	4	1	0	0	72
5	1	5	10	10	5	1	0	191
6	0	6	15	20	15	6	1	482
7	0	0	21	35	35	21	7	1134
8	0	0	0	56	70	56	28	2422
9	0	0	0	0	126	126	34	4536
10	0	0	0	0	0	252	210	6930
11	0	0	0	0	0	0	462	6930

Отже, $P^0(A) = 1$, $P^1(A) = 3$, $P^2(A) = 9$, $P^3(A) = 26$, $P^4(A) = 72$, $P^5(A) = 191$, $P^6(A) = 482$, $P^7(A) = 1134$, $P^8(A) = 2422$, $P^9(A) = 4536$, $P^{10}(A) = 6930$, $P^{11}(A) = 6930$.

З наведеного вище алгоритму видно, що якщо мультимножина (1) має базу потужності n, то виконання алгоритму вимагатиме складання $(n-1)$-ї таблиці. Тому алгоритм ефективний для мультимножин великої потужності, але, з невеликою базою. Наприклад, для обчислення числа 20-перестановок на мультимножині $A = \{x_1^3, x_2^9, x_3^{13}\}$ даний алгоритм вимагає обчислень в двох таблицях розмірами 4×13 і 13×26, в той час як обчислення за формулою (2) вимагатиме аналізу множини 627 розв'язків рівняння (3) та значних обчислень над елементами виділеної із неї підмножини. Слід відзначити, що при обчисленні числа m-перестановок мультимножини (1) в усіх таблицях достатньо проводити обчислення тільки у рядках із номерами не більшими за m.

Приклад 2. Для мультимножини $A = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^2, x_5^2, x_6^2, x_7^2, x_8^3, x_9^3, x_{10}^5\}$, працюючи за наведеним вище алгоритмом, отримуємо: $P(0) = 1$, $P(1) = 10$, $P(2) = 97$, $P(3) = 912$, $P(4) = 8299$, $P(5) = 72946$, $P(6) = 617874$, $P(7) = 5029948$, $P(8) = 39237380$, $P(9) = 292327224$, $P(10) = 2072330400$, $P(11) = 13920355680$, $P(12) = 88179787080$, $P(13) = 523856052720$, $P(14) = 2899520704080$, $P(15) = 14831963546400$, $P(16) = 69386957640000$, $P(17) = 292608485769600$, $P(18) = 1088829613872000$, $P(19) = 3456466684070400$, $P(20) = 8834757003072000$, $P(21) = 16261584603264000$0, $P(22) = 162615846032640000$.

1. Стечкин Б. С. *Наборы и их использование в комбинаторных схемах (Об одной комбинаторной формализации)* // Комбинаторный и асимптотический анализ. – Красноярск: Изд-во КГУ, 1977, С.44–54.
2. Айгнер М. Комбинаторная теория: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982.
3. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ / 2-е изд. – Изд-во Моск. Ун-та, 1985. – 308 с.
4. Заторский Р. А. *Подсчет m-подмультимножеств через их вторичные спецификации* // Комбинаторный анализ. Вып. 7 / Под ред. К.А.Рыбникова.- М.: МГУ, 1986, С.136–145.
5. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982.
6. Эндрюс Г. Теория разбиений. Пер. с англ. — М.: Наука, 1982. – 256 с.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло 3.12.2000
Після переробки 22.05.2001