УДК 513.7

В. М. Кузаконь

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СЕЧЕНИЙ СУБМЕРСИЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ

V. M. Kuzakon'. *Tensor invariants of cross-section with additional structures*, Matematychni Studii, **17** (2002) 199–210.

Tensor invariants of generalized cross-section with additional structures (maps of manifold into the space of paths, of affinely connected space into the space of paths, of immersions into a Finsler space) are calculated.

В. М. Кузаконь. *Тензорные инварианты сечений субмерсий с дополнительными структурами* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.199–210.

Вычислены тензорные инварианты обобщенных сечений субмерсий с дополнительными структурами: отображения многообразия в пространство путей, пространства аффинной связности в пространство путей, иммерсии в финслерово пространство.

1. Введение. Для каждого гладкого отображения $f\colon M \to N$ касательному отображению $Tf\colon TM \to TN$ соответствует сечение f^* расслоения $T^*M \otimes f^*TN$ над M, являющееся важным инвариантом отображения f. Автором был предложен метод построения аналогичных инвариантов гладкого отображения (точнее, сечений f^k тензорного расслоения $T^*M \otimes S^kM \otimes f^*TN$ над M), когда задана связность на расслоениях струй $J^k(M,N) \to J^{k-1}(M,N)$. Все обозначения, связанные с расслоениями и струями можно найти в книгах [2], [3] и [1] . В этой статье мы приводим вид этих тензорных инвариантов для обобщенных сечений субмерсий с дополнительными геометрическими структурами.

Пусть $p\colon E \to B$ — субмерсия с инфинитезимальной связностью, $VE = V(p)$ — вертикальное подрасслоение в TE, $\sigma\colon TE \to VE$ обозначает VE-значную 1-форму связности на p. Для сечения ∇s композиции гомоморфизмов $TB \xrightarrow{Ts} s^*(TE) \xrightarrow{\sigma} s^*(VE)$ соответствует сечение ∇s векторного расслоения $T^*B \otimes s^*(VE)$ над B, которое называется ковариантной производной сечения s.

Если $p\colon E \to B$ — аффинное расслоение, ассоциированное с векторным расслоением $E_0 \to B$ (т. е. на каждом слое $E_x = p^{-1}(x)$, просто транзитивно действует аддитивная группа векторного пространства $(E_0)_x$), то VE канонически изоморфно векторному расслоению p^*E_0. Следовательно, в этом случае ковариантная производная ∇s сечения $s\colon B \to E$ является сечением векторного расслоения $T^*B \otimes E_0 \to B$, не зависящего от сечения.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 53C15.

Нам понадобится определение ковариантной производной от более общих отображений, чем сечения. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "s_0"'] & B \end{tikzcd},$$

где p — субмерсия с ифинитезимальной связностью. Обобщенному сечению s соответствует сечение s' субмерсии $s_0^*E \to M$ с соответствующей связностью, причем $s'^*(V(s_0^*E))$ канонически отождествляется с $s^*(VE)$. Получаем обобщенную ковариантную производную $\nabla(s/s_0) = \nabla s'$, которая является сечением тензорного расслоения $T^*M \otimes s^*(VE)$ над M.

Пусть M, N — гладкие многообразия и на расслоении струй $\pi^k_{k-1}\colon J^k(M,N) \to J^{k-1}(M,N)$ задана инфинитезимальная связность. Если $\pi_1\colon J^{k-1}(M,N) \to M$ и $\pi_2\colon J^{k-1}(M,N) \to N$ — канонические проекции, то вертикальное касательное расслоение к π^k_{k-1} имеет вид $V(\pi^k_{k-1}) \cong \pi_1^*(S^kM) \otimes \pi_2^*(TN)$, где S^kM обозначает k-ую симметрическую тензорную степень кокасательного расслоения T^*M. Действительно, поскольку на π^k_{k-1} есть каноническая структура аффинного расслоения, ассоциированного с $\pi_1^*(S^kM) \otimes \pi_2^*(TN)$, для отображения $f\colon M \to N$ имеем изоморфизм векторных расслоений

$$(j^{k-1}f)^*V(\pi^k_{k-1}) \cong S^kM \otimes f^*TN$$

и, следовательно, ковариантная производная $f^k = \nabla(j^kf/j^{k-1})$ будет сечением расслоения $T^*M \otimes S^kM \otimes f^*TN$ над M, т. е. является тензорным инвариантом отображения f и связности на π^k_{k-1}.

Аналогично получаются тензорные инварианты обобщенных сечений субмерсии. Пусть $f\colon E \to B$ — субмерсия, $J^k(E) = J^k(f)$ — пространство k-струй сечений субмерсии f и на расслоении $\pi^k_{k-1}\colon J^kE \to J^{k-1}E$ задана инфинитезимальная связность. Тогда

$$V(\pi^k_{k-1}) \cong \pi^*(S^kB) \otimes \pi'^*(VE),$$

где $\pi\colon J^kE \to B$, $\pi'\colon J^kE \to E$ — проекции. Следовательно, для сечения $s\colon B \to M$ имеем $(j^{k-1}s)^*V(\pi^k_{k-1}) \cong S^kB \otimes s^*(VE)$ и ковариантная производная $s^k = \nabla(j^ks/j^{k-1}s)$ является сечением расслоения $T^*B \otimes S^kB \otimes s^*(VE)$ над B.

Пусть на многообразиях M и N заданы аффинные связности порядка k, т. е. заданы связности на главных расслоениях реперов k-ого порядка $R^kM \to M$ и $R^kN \to N$. Тогда определена связность и на главном расслоении

$$R^k_e(M,N) \cong \pi_1^*(R^kM) \times \pi_2^*(R^kN) \to J^{l-1}(M,N)$$

с $l \in \{1, ..., k\}$. Поскольку расслоение $\pi^l_{l-1}\colon J^l(M,N) \to J^{l-1}(M,N)$ ассоциировано с главным расслоением реперов $R^k_l(M,N)$, получаем связность на π^l_{l-1} и, следовательно, можно применить нашу конструкцию относительной ковариантной производной, в результате для каждого отображения $f\colon M \to N$ многообразий с аффинными связностями порядка k получаем k тензорных инвариантов $f^l\colon M \to T^*M \otimes S^lM \otimes f^*(TN)$, $l \in \{1, ..., k\}$.

Все они являются тензорными инвариантами отображения f и указанных связностей k-ого порядка на M и N.

В работах [4]–[6] найдены инварианты субмерсий локально-эвклидовых пространств, в [7] описаны их контактные симметрии.

2. Тензорные инварианты отображений.

Начнем с более аккуратной формулировки приведенных выше утверждений.

Предложение 1. *Если $\pi\colon E \to B$ — векторное расслоение, то:*

(1) Расслоение VE над E канонически отождествляется с π^*E.

(2) В приведенных выше обозначениях, $s^*(VE)$ канонически отождествляется с $s_0^*(E)$.

(3) Относительная ковариантная производная $\nabla(s/s_0)$ является сечением векторного расслоения

$$T^*M \otimes s_o^*(E) \to M. \tag{1}$$

Если на многообразии M задана аффинная связность, а связность на векторном расслоении $E \to M$ линейна, то легко строится связность в расслоении (1) и, следовательно, можно ковариантно продифференцировать сечение $\nabla(s/s_0)$ и получить сечение $\nabla^2(s/s_0)$ векторного расслоения

$$T^*M \otimes T^*M \otimes s_0^*(E) \to M, \tag{2}$$

на котором также имеется связность. Этот процесс можно продолжить до бесконечности и получить последовательность тензорных инвариантов

$$\nabla(s/s_0),\ \nabla^2(s/s_0),\ \nabla^3(s/s_0),\ \ldots \tag{3}$$

— сечений расслоений вида $T^*M \otimes T^*M \otimes \ldots \otimes T^*M \otimes s_0^*(E)$. Эта простая схема является достаточно гибкой и имеет много различных применений и обобщений. Кроме того, перед дифференцированием иногда удобно изменить расслоение (например, перейти к подрасслоениям) или сначала изменить расслоение, а потом уже ввести новую связность.

Теперь мы вычислим тензорные инварианты гладких отображений многообразия в пространство путей (п. 4), пространства путей в пространство путей (п. 5), пространства аффинной связности в пространство путей (п. 6), и многообразия в финслерово пространство (п. 7).

3. Связность в пространстве путей. Общее пространство путей M (см. [8], с. 104), являющееся прямым обобщением финслеровых пространств, определяется как многообразие с заданной системой дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2H^i\Big(x, \frac{dx}{dt}\Big) = 0, \tag{4}$$

где функции $H^i(x,\xi)$ определены на касательном раслоении TM, положительно однородные второй степени по переменным ξ^j и с соответствующим законом преобразования при замене координат.

Пространства аффинной связности являются пространствами путей, т.к. (4) совпадают с уравнениями геодезических, если положить

$$H^i\Big(x, \frac{dx}{dt}\Big) = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}.$$

Из предположения об однородности функций H^i следуют тождества (теорема Эйлера)

$$H^i(x,\xi) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H^i(x,\xi)}{\partial\xi^j\partial\xi^k}\xi^j\xi^k,$$

показывающие, что функции H^i полностью определяются функциями

$$H^i_{jk}(x,\xi) = \frac{\partial^2 H^i(x,\xi)}{\partial\xi^j\partial\xi^k}, \tag{5}$$

которые, как легко видеть, являются однородными функциями нулевой степени по переменным ξ и симметричны по своим нижним индексам.

Известно ([8], с. 109), что функции (5) задают связность в векторном расслоении $\pi'\colon \pi^*(TM) \to TM$, где $\pi\colon TM \to M$ — касательное расслоение. Если базисные сечения векторного расслоения $\pi^*(TM)$ обозначить $\frac{\partial}{\partial x^i}$, т.е. так же как и соответствующие им сечения расслоения TM, то ковариантный дифференциал этих базисных сечений имеет вид ([8], с.109 формула (4.1))

$$\overset{0}{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = -H^i_{jk}(x,\xi)dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6}$$

Для ковариантного дифференциала выбрано обозначение $\overset{0}{\nabla}$, т.к. в дальнейшем появятся другие связности и соответствующие им ковариантные производные.

Тождественное отображение $\mathrm{id}\colon TM \to TM$ определяет каноническое сечение id' расслоения π'. Имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\pi^*(TM) \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, bend left, "\pi'"] & TM \arrow[d, "\pi"] \\
TM \arrow[u, bend left, "\mathrm{id}'"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\pi"] & M
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма будет использована в дальнейшем для получения треугольных диаграмм, позволяющих вычислять относительную ковариантную производную.

В качестве простейшего примера установим связь относительных ковариантных производных с системой дифференциальных уравнений (5).

Для каждой гладкой кривой $f\colon (a,b) \to M$ в многообразии M получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^*(TM) \arrow[d, "\pi'"] \\
(a,b) \arrow[ur, "\mathrm{id}'\circ\dot f"] \arrow[r, "\dot f"] & TM
\end{tikzcd}$$

Предложение 2. *Соответствующая этой диаграмме относительная ковариантная производная имеет вид*

$$\nabla(\mathrm{id}'\circ f/f) = \left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + H^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)dt \otimes \frac{\partial}{\partial\eta^i},$$

т. е. совпадает с левой частью уравнения (5).

Доказательство. Отображения $\dot f$ и $\mathrm{id}'\circ\dot f$ в очевидных локальных координатах имеют следующий вид

$$\dot f\colon t\mapsto\left(x^i(t),\frac{dx^i}{dt}\right),\quad \mathrm{id}'\circ\dot f\colon t\mapsto\left(x^i(t),\frac{dx^i}{dt},\frac{dx^i}{dt}\right).$$

Осталось воспользоваться формулой для относительной ковариантной производной. □

4. Тензорный инвариант отображения многообразия в пространство путей. Тензорный инвариант можно получить для любого гладкого отображения $f\colon N\to M$, воспользовавшись следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^*(TM) \arrow[d, "\pi'"] \\
TN \arrow[ur, "\mathrm{id}'\circ Tf"] \arrow[r, "Tf"] \arrow[d] & TM \arrow[d, "\pi"] \\
N \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

Предложение 3. *Относительная ковариантная производная $\nabla(\mathrm{id}'\circ Tf/Tf)$ имеет следующий вид*

$$\nabla(\mathrm{id}'\circ Tf/Tf)=F^i_\beta du^\beta\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}+G^i_\alpha d\zeta^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}\ ,\tag{7}$$

где

$$F^i_\beta(u,\zeta)=\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}\zeta^\alpha+H^i_{jk}\Big(f(u),\frac{\partial f}{\partial u}\zeta\Big)\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial u^\beta}\zeta^\alpha,\tag{8}$$

$$G^i_\beta(u)=\frac{\partial f^i}{\partial u^\beta}.\tag{9}$$

Здесь коэффициенты F^i_β, G^i_α образуют смешанный тензор — сечение тензорного расслоения

$$T^*(TN)\otimes_{TN}(\pi\circ Tf)^*TM\tag{10}$$

над TN.

Доказательство. Пусть x^i — локальные координаты в M, u^α — в N. Отображение f задается функциями $f^j(u)=f^j(u^1,u^2,\dots,u^m)$. Координаты в TN — (u^α,ζ^α), а в TM — (x^i,ξ^i). Тогда отображение Tf имеет вид

$$Tf\colon(u^\alpha,\zeta^\alpha)\mapsto\Big(f^j(u),\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\zeta^\alpha\Big)$$

и

$$\mathrm{id}'\circ Tf\colon(u^\alpha,\zeta^\alpha)\mapsto\Big(f^j(u),\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\zeta^\alpha,\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\zeta^\alpha\Big).$$

Подставляя последние выражения в формулу для относительной ковариантной производной, получим соотношение

$$\nabla(\mathrm{id}' \circ Tf/Tf) = \Big[d\Big(\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\zeta^\alpha\Big) + H^i_{jk}\Big(f(u), \frac{\partial f}{\partial u}\Big)\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha}\zeta^\alpha df^k(u)\Big] \otimes \frac{\partial}{\partial \eta^i},$$

которое после дифференцирования первого слагаемого и разложения по базису

$$du^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial \eta^i}/, /d\zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial \eta^i}$$

записывается в виде (7) с коэффициентами (8) и (9). В формуле (8) и в дальнейшем аргумент функции H^i_{jk} обозначен сокращенно $\frac{\partial f}{\partial u}\zeta$ вместо более подробной записи $\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\zeta^\alpha$. □

5. Тензорные инварианты отображения пространства путей в пространство путей. Пусть $f\colon N \to M$ — гладкое отображение пространства путей N в пространство путей M. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\rho^*(TN) \arrow[r, "(Tf)'"] \arrow[d] & \pi^*(TM) \arrow[d, "\pi'"] \\
TN \arrow[r, "Tf"] \arrow[d] & TM \arrow[d, "\pi"] \\
N \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd},$$

где отображение $(Tf)'$ верхних расслоений является обратным образом отображения Tf. Отображению $(Tf)'$ соответствует сечение, обозначаемое $(Tf)''$, тензорного произведения расслоений $\rho^*(T^*N) \otimes_{TN} (Tf)^*(\pi^*(TM))$ над TN, причем это расслоение имеет связность, как тензорное произведение расслоений со связностью (дуальным к расслоению $\rho^*(TN)$ будет расслоение $\rho^*(T^*N)$). Ковариантный дифференциал относительно этой связности получается из формулы (6) и имеет следующий вид

$$\nabla\Big(du^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = H^\alpha_{\beta\gamma}(u,\zeta)du^\gamma \otimes du^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - H^j_{ik}(x,\xi)dx^k \otimes du^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{11}$$

где $H^\alpha_{\beta\gamma}$ — коэффициенты связности (6) в N, а H^j_{ik} — в M.

Предложение 4. *При сделанных выше предположениях:*

(1) сечение $(Tf)''$ имеет вид $\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}du^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$;

(2) ковариантный дифференциал $\nabla(Tf)''$ имеет вид

$$\nabla((Tf)'') = \Big[\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} + H^\gamma_{\alpha\beta}(u,\zeta)\frac{\partial f^i}{\partial u^\gamma} - H^i_{jk}\Big(f(u), \frac{\partial f}{\partial u}\zeta\Big)\frac{\partial f^k}{\partial u^\beta}\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha}\Big] du^\beta \otimes du^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$$

и является сечением расслоения

$$T^*(TN) \otimes \rho^*(T^*N) \otimes (Tf)^*(\pi^*TM) \to TN.$$

Доказательство. В обозначениях, приведенных в доказательстве предложения 3, имеем

$$(Tf)\Big(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Big) = \frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}\ ,$$

откуда немедленно следует утверждение (1). Утверждение (2) получается непосредственно дифференцированием

$$\nabla((Tf)'') = \nabla\Big(\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = d\Big(\frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\Big)du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\nabla\Big(du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) =$$
$$= \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^\beta\partial u^\alpha}du^\beta\otimes du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\Big[H^\alpha_{\beta\gamma}du^\gamma\otimes du^\beta\otimes\frac{\partial}{\partial x^i} - H^j_{ik}df^k(u)\otimes du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\Big] =$$
$$= \Big[\frac{\partial^2 f^i}{\partial u^\beta\partial u^\alpha} + H^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^i}{\partial u^\gamma} - H^i_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial u^\beta}\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha}\Big]du^\beta\otimes du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

□

Заметим, что появление множителя $T^*(TN)$ не позволяет повторить ковариантное дифференцирование. Множитель $T(TN)$ не помешал бы, т. к. есть каноническая проекция $T(TN)\to\rho^*(TN)$. Следовательно, метрика на TN, позволяющая отождествить $T^*(TN)$ с $T(TN)$, позволила бы получить бесконечную последовательность тензорных инвариантов.

6. Тензорные инварианты отображения пространства аффинной связности в пространство путей. Если на многообразии N задана аффинная связность, то вычисления п. можно продолжить и получить бесконечную последовательность тензорных инвариантов высшего порядка, которые в отличие от (3) определены на многообразии TN. Аффинная связность на N не только определяет связность в появляющемся при дифференцировании множителе $T^*(TN)$, но и позволяет уменьшить этот множитель, благодаря разложению (13).

Рассмотрим сначала аффинную связность на TN, определяемую аффинной связностью на N.

Предложение 5. *Аффинная связность на N канонически определяет аффинную связность на TN со следующим ковариантным дифференциалом $\overset{1}{\nabla}$ (обозначение ∇ сохраняется для ковариантной производной относительно аффинной связности на N):*

$$\overset{1}{\nabla}\Big(\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Big) = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}du^\gamma\otimes\frac{\partial}{\partial u^\alpha} - \big[d(\Gamma^\varepsilon_{\delta\beta}\zeta^\delta) - \Gamma^\gamma_{\delta\beta}\zeta^\delta\Gamma^\varepsilon_{\gamma\tau}du^\tau - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\varepsilon_{\sigma\alpha}\zeta^\sigma du^\gamma\big]\otimes\frac{\partial}{\partial\zeta^\varepsilon}$$
$$\overset{1}{\nabla}\Big(\frac{\partial}{\partial\zeta^\alpha}\Big) = -\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}du^\gamma\otimes\frac{\partial}{\partial\zeta^\beta}.$$

Доказательство. Аффинная связность на N, т. е. (линейная) связность на касательном расслоении $\pi\colon TN\to N$ — это расщепление точной последовательности векторных расслоений над N

$$0\to V(TN)\to T(TN)\to\rho^*(TN)\to 0,$$

или соответствующее ему разложение в прямую сумму

$$T(TN) = V(TN)\oplus\rho^*(TN). \tag{12}$$

Для векторных расслоений $V(TN) = \pi^*(TN)$, поэтому аффинная связность на N канонически определяет разложение

$$T(TN) = \rho^*(TN) \oplus \rho^*(TN). \tag{13}$$

Каждое из расслоений в правой части имеет связность (как обратный образ расслоения со связностью), следовательно, мы получаем линейную связность на расслоении $T(TN) \to TN$. Осталось найти явные формулы для дифференциальных форм этой связности. Для этого рассмотрим разложение (13), т.к. ковариантное дифференцирование в слагаемых правой части очевидно (в слагаемых $\pi^*(TN)$ имеем $\overset{1}{\nabla} = \nabla$). В разложении (13) первое слагаемое вертикально, а второе — горизонтально, поэтому первое слагаемое порождается базисными вертикальными векторами $\frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha}$, а второе — горизонтальными векторами

$$e_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\zeta^\beta \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma}.$$

Действительно, 1-формы связности на TN имеют вид $\hat{\omega}^\alpha = d\zeta^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\zeta^\beta du^\gamma$ и, предположив, что $e_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \Phi^\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma}$, из условия $\forall \alpha, \beta \quad \hat{\omega}^\alpha \perp e_\beta$ однозначно определяем Φ^γ_α $0 = \langle \hat{\omega}^\alpha, e_\beta \rangle = \Phi^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\zeta^\gamma$.

По определению связности в прямой сумме расслоений ковариантный дифференциал этих базисных сечений имеет вид

$$\begin{cases} \overset{1}{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha}\right) = -\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} du^\gamma \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha}, \\ \overset{1}{\nabla} (e_\alpha) = -\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} du^\gamma e_\beta. \end{cases} \tag{14}$$

Выражая $\frac{\partial}{\partial u^\beta}$ через e_β и $\frac{\partial}{\partial \zeta^\gamma}$

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = e_\alpha - \Gamma^\gamma_{\delta\beta}\zeta^\gamma \frac{\partial}{\partial \zeta^\beta}$$

и дифференцируя, получаем

$$\overset{1}{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right) = -\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} du^\gamma \otimes e_\beta - \left[d(\Gamma^\beta_{\gamma\alpha}\zeta^\gamma) - \Gamma^\beta_{\gamma\alpha}\zeta^\gamma \Gamma^\beta_{\gamma\tau} du^\tau\right] \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^\beta}. \tag{15}$$

Теперь избавляясь от e_α, получаем доказываемую формулу. □

Замечание 1. Интересно, что альтернирование коэффициентов в формуле (15) по соответствующим индексам дает кручение и кривизну связности на N. Точнее

$$du^\beta \wedge \nabla\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta}\right) = -\Omega^\alpha \otimes e_\alpha - \Omega^\varepsilon_\delta \zeta^\delta \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^\varepsilon} - \Gamma^\varepsilon_{\delta\beta} du^\beta \wedge \zeta^\delta \otimes \frac{\partial}{\partial \zeta^\varepsilon},$$

где $\Omega^\alpha, \Omega^\varepsilon_\delta$ — 2-формы кручения и кривизны аффинной связности на N.

Замечание 2. Приведенные в предложении 5 формулы слишком громоздки и вместо них лучше пользоваться формулами (14), предварительно выразив все через базис $\frac{\partial}{\partial \zeta^\beta}, e_\beta$ или дуальный к нему базис $\hat{\omega}^\alpha, du^\alpha$.

Теперь продолжим вычисления п. 4 с учетом аффинной связности на N.

Прежде всего разложим $\nabla(\mathrm{id}'\circ Tf/Tf)$ по новому базису $du^\alpha, \hat\omega^\alpha$. Получаем

$$\nabla(\mathrm{id}'\circ Tf/Tf) = P^i_\beta du^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial\eta^i} + G^i_\alpha\hat\omega^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}, \tag{16}$$

где

$$P^i_\beta(u,\zeta) = \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}\zeta^\alpha + H^i_{jk}\Big(f(u), \frac{\partial f}{\partial u}\zeta\Big)\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial u^\beta}\zeta^\alpha - \frac{\partial f^i}{\partial u^\alpha}\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\zeta^\gamma, \tag{17}$$

Интересно, что здесь P^i_β по виду совпадает с соответствующим образом определенной ковариантной производной $G^i_{\alpha;\gamma}$ смешанного тензора G^i_α умноженной на ζ^γ. Кроме того, есть что-то общее и с формулой (2) предложения 2.4.

Оба слагаемых в (16) можно рассматривать как сечения расслоения $\rho^*(T^*N)\otimes_{TN}(\pi\circ Tf)^*TM$ со связностью $\overset{2}{\nabla}$. Вычислим их ковариантные производные

$$\overset{2}{\nabla}\left(G^i_\alpha du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}\right) \equiv \overset{1}{\nabla}\left(G^i_\alpha\hat\omega^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}\right) = \left[dG^i_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}G^i_\beta du^\gamma + H^i_{jk}G^j_\alpha df^k\right]\hat\otimes\omega^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}.$$

Выполняя в квадратных скобках дифференцирование, получаем соответствующий тензорный инвариант (здесь $d\zeta^\alpha$ не появляется и, следовательно, разложение двойственное разложению (13) не используется)

$$G^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f^i}{\partial u^\gamma} + H^i_{jk}\frac{\partial f^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f^k}{\partial u^\beta} \tag{18}$$

который после умножения на ζ^α, совпадает с P^i_β, т. е.

$$P^i_\beta = \zeta^\alpha G^i_{\alpha\beta}. \tag{19}$$

Аналогично вычисляем

$$\overset{2}{\nabla}\left(F^i_\alpha du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}\right) \equiv \overset{1}{\nabla}\left(F^i_\alpha du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}\right) = \left[dF^i_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}F^i_\beta du^\gamma + H^i_{jk}F^j_\alpha df^k\right]\otimes du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}.$$

Здесь F^i_α зависит не только от u^α, но и от ζ^α, поэтому с учетом разложения, двойственного разложению (13), получим

$$\begin{aligned} dF^i_\alpha &= \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta + \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial\zeta^\beta}d\zeta^\beta = \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta + \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial\zeta^\beta}(\hat\omega^\beta - \Gamma^\beta_{\gamma\delta}\zeta^\gamma du^\delta) = \\ &= \left(\frac{\partial F^i_\alpha}{\partial u^\beta} - \Gamma^\delta_{\gamma\beta}\frac{\partial F^i_\alpha}{\partial\zeta^\delta}\zeta^\gamma\right)du^\beta + \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial\zeta^\beta}\hat\omega^\beta. \end{aligned}$$

Следовательно, получается два тензорных инварианта, соответствующих разложению (13)

$$\overset{1}{F}{}^i_{\alpha\gamma} = \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial u^\gamma} - \Gamma^\varepsilon_{\delta\gamma}\frac{\partial F^i_\alpha}{\partial\zeta^\varepsilon}\zeta^\delta - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}F^i_\beta + H^i_{jk}F^j_\alpha\frac{\partial f^k}{\partial u^\gamma} \tag{20}$$

— коэффициент при $du^\gamma\otimes du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}$ и

$$\overset{2}{F}{}^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial\zeta^\beta} \tag{21}$$

— коэффициент при $\hat\omega^\beta\otimes du^\alpha\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение

Предложение 6. *При ковариантном дифференцировании сечения $\nabla(\mathrm{id}'\circ Tf/Tf)$ получаем три новых тензорных инварианта $G^i_{\alpha\beta}$, $\overset{1}{F}{}^{\,i}_{\alpha\beta}$ и $\overset{2}{F}{}^{\,i}_{\alpha\beta}$. Инвариант $G^i_{\alpha\beta}$ простым соотношением (19) связан с прежним инвариантом P^i_β.*

Процесс дифференцирования получаемых инвариантов может быть продолжен до бесконечности. Все получаемые инварианты являются сечениями расслоения со связностью $\overset{2}{\nabla}$

$$\rho^*T^*N\otimes\rho^*T^*N\otimes\dots\otimes\rho^*T^*N\otimes(\pi\circ Tf)^*TM\to TN. \tag{22}$$

Опишем теперь результат дифференцирования тензорного инварианта общего вида.

$$\overset{2}{\nabla}\Big(F^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}du^{\alpha_1}\otimes\dots\otimes du^{\alpha_k}\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}\Big)=$$
$$=\left[dF^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}-\sum_{s=1}^{k}\Gamma^\beta_{\alpha_s\gamma}F^i_{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}\beta\alpha_{s+1}\dots\alpha_k}du^\gamma+H^i_{jk}F^j_{\alpha_1\dots\alpha_k}df^k\right]\otimes du^{\alpha_1}\otimes\dots\otimes du^{\alpha_k}\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}=$$
$$=\overset{1}{F}{}^{\,i}_{\alpha_1\dots\alpha_k\beta}du^\beta\otimes du^{\alpha_1}\otimes\dots\otimes du^{\alpha_k}\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i}+\overset{2}{F}{}^{\,i}_{\alpha_1\dots\alpha_k\beta}\hat\omega^\beta\otimes du^{\alpha_1}\otimes\dots\otimes du^{\alpha_k}\otimes\frac{\partial}{\partial\eta^i},$$

где

$$\overset{1}{F}{}^{\,i}_{\alpha_1\dots\alpha_k\beta}=\frac{\partial F^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial u^\beta}-\Gamma^\varepsilon_{\delta\beta}\frac{\partial F^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial\eta^\varepsilon}\zeta^\delta-\sum_{s=1}^{k}\Gamma^\gamma_{\alpha_s\beta}F^i_{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}\gamma\alpha_{s+1}\dots\alpha_k}+H^i_{jk}F^j_{\alpha_1\dots\alpha_k}\frac{\partial f^k}{\partial u^\beta}, \tag{23}$$
$$\overset{2}{F}{}^{\,i}_{\alpha_1\dots\alpha_k\beta}=\frac{\partial F^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}}{\partial\zeta^\beta}.$$

Сформулируем полученные результаты о методах получения новых тензорных инвариантов в виде следующего предложения.

Предложение 7. *Каждому сечению $F^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ расслоения (22) соответствует сечение (23) расслоения такого же вида (это в некотором смысле ковариантная производная). Дифференцирование $F^i_{\alpha_1\dots\alpha_k}$ по переменной ζ^β дает сечение расслоения такого же вида.*

7. Тензорные инварианты иммерсии в финслерово пространство. Структура финслерова пространства на многообразии M задается функцией F на TM, удовлетворяющей трем условиям (см. [8], с.21–24):

(1) Функция $F(x,\xi)$ положительно однородна степени 1 по ξ, т.е. $F(x,t\xi)=tF(x,\xi)$ для всех $t>0$.

(2) Функция $F(x,\xi)$ положительна, если не все ξ^i обращаются в нуль одновременно, т.е. из $\sum_i(\xi^i)^2\neq0$ следует $F(x,\xi)>0$.

(3) (Условие Лежандра) Квадратичная форма от переменных η^i

$$\Phi(x,\xi;\eta)\equiv\frac{\partial^2F^2(x,\xi)}{\partial\xi^i\partial\xi^j}\eta^i\eta^j$$

положительно определена для всех $(x, \xi) \in TM$.

В векторном расслоении $\pi^*(TM) \to TM$ функции

$$g_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, \xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$$

задают положительно определенную метрику. Из однородности функции $F(x, \xi)$ по ξ следует тождество $F^2(x, \xi) = g_{ij}(x, \xi)\xi^i \xi^j$. Эта метрика, в отличие от метрики на касательном расслоении, не определяет однозначно связность в расслоении $\pi^*(TM) \to TM$. Э. Картану удалось по финслеровой функции F определить так называемую "эвклидову связность" в расслоении $\tau^*(TM) \to \mathcal{P}M$ над пространством линейных элементов $\mathcal{P}M$ многообразия M (определение τ см. ниже).

Точками многообразия $\mathcal{P}M$ являются одномерные подпространства касательных пространств многообразия M, так что расслоение $\tau \colon \mathcal{P}M \to M$ получается из касательного расслоения $TM \to M$ заменой каждого слоя T_xM соответствующим проективным пространством $P(T_xM)$. Для более явного описания $\mathcal{P}M$ рассмотрим действие мультипликативной группы R^* на многообразии $TM \setminus 0$ (полученном из TM выбрасыванием образа нулевого сечения)

$$R^* \times (TM \setminus 0) \to (TM \setminus 0) : (t, (x, \xi)) \mapsto (x, t\xi).$$

Тогда $\mathcal{P}M$ совпадает с фактор-многообразием $TM \setminus 0$ по этому действию группы R^*, т. е. $\mathcal{P}M = (TM \setminus 0)/R^*$. Точки многообразия $\mathcal{P}M$ мы будем обозначать так же, как точки TM через (x, ξ), но ξ^i мы будем считать однородными координатами в соответствующих проективных пространствах, являющихся слоями субмерсии τ. Проекция имеет вид

$$\tau \colon \mathcal{P}M \to M : \quad (x, \xi) \mapsto (x).$$

Обратный образ $\tau^*(TM)$ входит в следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tau^*(TM) \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "\pi'"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{P}M \arrow[r, "\tau"] & M \end{tikzcd}$$

Точки многообразия $\tau^*(TM)$ определяются тремя наборами координат (x, ξ, η), где $x = (x^1, \dots, x^n)$ — координаты в M, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ — проективные координаты в слоях τ, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$ — координаты в слоях π'. Базисные сечения векторного расслоения π' будем обозначать e_i.

Предложение 8 ([8], с.91). *Пусть M — финслерово пространство. В расслоении $\tau(TM) \to \mathcal{P}M$ существует единственная связность, сохраняющая метрику $g_{ij}(x, \xi)\eta^i\eta^j$ и имеющая формы связности*

$$\nabla e_i = \omega^j_{.i} \otimes e_j, \quad \omega^j_{.i} = C^j_{.ik}(x, \xi) d\xi^k + \Gamma^j_{.ik}(x, \xi) dx^k,$$

где

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k}, \quad \Gamma_{kij} = \gamma_{kij} - C_{jih} \frac{\partial G^h}{\partial \xi^k} + C_{kjh} \frac{\partial G^h}{\partial \xi^i},$$

$$2G^i(x,\xi) = \gamma^{\;i}_{h.k}(x,\xi)\xi^h\xi^k,$$

а γ_{kij} *выражаются через производные* $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ *как обычные символы Кристоффеля первого рода в римановой геометрии.*

По этой связности тензорные инварианты иммерсии $f\colon N \to M$ строятся почти так же, как и в п. , но теперь сечение id' определено на $TM \setminus 0$.

Получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \tau^*(TM) \arrow[d, "\pi'"] \\
TN \setminus 0 \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\rho"'] & TM \setminus 0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[ur, "\mathrm{id}'"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{P}M \arrow[d, "\tau"] \\
N \arrow[rr, "f"] & & M
\end{tikzcd}$$

где π_0 — каноническая проекция на фактор-многообразие.

Предложение 8. *"Эвклидова связность" Э. Картана на* π' *позволяет для каждой иммерсии* f *построить тензорный инвариант* $\nabla(\mathrm{id}' \circ Tf/\pi_0 \circ Tf)$*, являющийся сечением векторного расслоения*

$$T^*(TN \setminus 0) \otimes (f \circ \rho)^* TM \to TN \setminus 0.$$

Многие из рассмотренных в пп. 3–7 конструкций могут быть также применены к исследованию связностей, зависящих от направления (см. [8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 28. – М.: ВИНИТИ, 1988.
2. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. — М.: Мир, 1975.
3. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
4. Кузконь В. М., Рахула М. О. *Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности* // Укр. геометр. сб. – 1978. – Вып. 21. – С.44–50.
5. Кузаконь В. М. *Інваріантні сім'ї поверхонь в евклідовому просторі* // Вісник Київ. ун-ту. Мат. і мех. - 1979. – Вип. 21. – С.58–61.
6. Кузаконь В. М., Москалюк С. С. *Тензорные инварианты отображений многообразий со связностями* – Киев, 1993. – 25 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т теорет. Физики; No. 93-20P).
7. Кузаконь В. М., Москалюк С. С. *Контактные симметрии дифференциальных инвариантов субмерсий локально-евклидовых многообразий.* – Киев, 1993. – 20 с. - (Препр./АН Украины. Ин-т теорет. физики; No. 93-22P).
8. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. – М.:Наука, 1981.

Одесская академия пищевых технологий

Поступило *22.01.2001*
После переработки *15.03.2002*