УДК 517.937

В. А. Літовченко

ПОВНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ У ПРОСТОРАХ ТИПУ $\mathbb{S}$

V. A. Litovchenko. *Total solvability of a Cauchy problem for a pseudo-differential equation in $\mathbb{S}$-type spaces*, Matematychni Studii, **17** (2002) 189–198.

We establish a criterion of a multiplicator in some $\mathbb{S}$-type spaces. Due to this criterion the correct solvability of a Cauchy problem for a pseudo-differential equation in these spaces is obtained.

В. А. Литовченко. *Полная разрешимость задачи Коши для одного псевдодифференциального уравнения в пространствах типа* $\mathbb{S}$ // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.189–198.

Установлен критерий мультипликатора в пространствах типа $\mathbb{S}$, благодаря которому получена корректная разрешимость в этих пространствах одной задачи Коши для псевдодифференциального уравнения

Вступ. При розв'язуванні природних задач з метою отримання вичерпних характеристи процесів, які ними описуються, істотною є інформація про простори початкових даних, які забезпечують не лише коректну розв'язність відповідних модельних задач, але й збереження деяких властивостей їхніх розв'язків.

У статті досліджується питання відшукання всіх початкових даних задачі Коші для одного псевдодиференційного рівняння, за яких вона є коректно розв'язною, а її розв'язок має тіж властивості гладкості і поводження при наближенні просторової змінної до нескінченності, що й фундаментальний розв'язок.

1. Простори типу $\mathbb{S}$. Нехай $C^\infty(\mathbb{R})$ — простір всіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}$. Для довільних $\alpha > 0,\ \beta > 0$ означимо

$$S_\alpha = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists\ A>0\ \forall\ k\in\mathbb{Z}_+\ \exists\ c_k>0\ \forall\ q\in\mathbb{Z}_+\ \forall\ x\in\mathbb{R}: \\ |x^q D_x^k \varphi(x)| \le c_k A^q q^{\alpha q}\};$$
$$S^\beta = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists\ B>0\ \forall\ q\in\mathbb{Z}_+\ \exists\ c_q>0\ \forall\ k\in\mathbb{Z}_+\ \forall\ x\in\mathbb{R}: \\ |x^q D_x^k \varphi(x)| \le c_q B^k k^{\beta k}\};$$
$$S_\alpha^\beta = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists\ c>0\ \exists\ A>0\ \exists\ B>0\ \forall\ \{k;q\}\subset\mathbb{Z}_+\ \forall\ x\in\mathbb{R}: \\ |x^q D_x^k \varphi(x)| \le c A^q B^k k^{\beta k} q^{\alpha q}\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K99.

Відзначимо, що $S_\alpha^\beta \subset S_\alpha$ для $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Ці простори введені І. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловим в [1] і названі ними просторами типу $\mathbb{S}$, де $\mathbb{S}$ — відомий простір Л. Шварца [2].

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha+\beta \geq 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$ і складаються з тих і тільки тих $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, для яких виконується нерівність

$$|D_x^k \varphi(x)| \leq cA^k k^{\beta k} e^{-\delta |x|^{1/\alpha}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими $c,\ A$ і δ, що залежать лише від функції φ, а $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\overset{S_\alpha^\beta}{\to}} \varphi$, де $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_\alpha^\beta$, тоді і тільки тоді, коли [1]:

1) $\forall k \in \mathbb{Z}_+ : D_x^k \varphi_\nu(x) \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} D_x^k \varphi(x)$, де $\mathbb{K}$ — довільна компактна множина з $\mathbb{R}$ (тобто, $D_x^k\varphi_\nu(x)$ прямує до $D_x^k\varphi(x)$ рівномірно за x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$, при $\nu \to \infty$);

2) $\exists\ c > 0\ \exists A > 0\ \exists B > 0\ \forall\{q; k\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in \mathbb{R}:\ |x^q D_x^k \varphi_\nu(x)| \leq cA^q B^k k^{\beta k} q^{\alpha q}$.

Означення 1. Функція $\Omega\colon (0; +\infty) \to [0; +\infty)$ належить до класу $\mathcal{G}_\alpha,\ \alpha > 0$, якщо:

1) $\Omega(\cdot) \in C^\infty((0; +\infty))$;
2) $\exists\ c_0 > 0\ \exists\, c_0' > 0\ \forall\, x \in (0; +\infty) : c_0 x^\alpha \leq \Omega(x) \leq c_0' x^\alpha$;
3) $\exists\ c_\alpha > 0\ \exists A_\alpha > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in (0; +\infty):\ |D_x^k \Omega(x)| \leq c_\alpha A_\alpha^k k! x^{\alpha - k}$.

Нехай $m \in \mathbb{N},\ \gamma_j > 0,\ a_j \geq 0,\ j \in \{1, 2, \ldots, m\};\ \gamma_l = \max\limits_{1\leq j\leq m}\{\gamma_j\},\ \gamma_s = \min\limits_{1\leq j\leq m}\{\gamma_j\}$, $a_i \neq 0$, $i \in \{l; s\}$, $\gamma \equiv \gamma_l$, $a_0 = \min\{a_s, a_l\}$ і $P(\xi) := \sum_{j=1}^m a_j \xi^{\gamma_j}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Правильне наступне твердження.

Лема 1. *Якщо $\alpha > 0$ и $\Omega \in \mathcal{G}_\alpha$, то для кожного фіксованого $\delta > 0$ і $a > 0$, $\Theta_\delta(\cdot) \equiv \exp\Big(-\delta\Omega\Big(P\big((a + (\cdot)^2)^{\frac{1}{2}}\big)\Big)\Big) \in S^1_{\frac{1}{\alpha\gamma}}$.*

Доведення. Враховуючи нескінченну диференційовність функції $\Theta_\delta,\ \delta > 0$, для доведення леми досить перевірити, чи

$$\exists\ \delta_1 > 0\ \exists\ c > 0\ \exists\ A > 0\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$|D_x^k \Theta_\delta(x)| \leq cA^k k! \exp\left(-\delta_1 \left(P\left((a + x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^\alpha\right).$$

Використовуючи відому формулу Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_x^k f(\varphi(x)) = \sum_p^k \frac{k!}{i!j!...h!} \frac{d^p f(\varphi)}{d\varphi^p} \left(\frac{d\varphi(x)}{1!dx}\right)^i \left(\frac{d^2\varphi(x)}{2!dx^2}\right)^j \cdots \left(\frac{d^L\varphi(x)}{L!dx^L}\right)^h, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

(тут знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $k = i + 2j + ... + Lh$, а число $p = i + j + ... + h$), отримаємо, що

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+:\ |D_x^k \Theta_\delta(x)| \leq \sum_p^k \frac{k!}{i!j!...h!} \delta^p \Theta_\delta(x) \left|\frac{d\Omega(P((a + x^2)^{\frac{1}{2}}))}{1!dx}\right|^i \cdots \left|\frac{d^L\Omega(P((a + x^2)^{\frac{1}{2}}))}{L!dx^L}\right|^h,$$

де $\delta > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Далі, за тією ж формулою Фаа де Бруно, а також за умовою 3) означення 1 і нерівностями

$$\left|\frac{d^n P((a+x^2)^{\frac{1}{2}})}{n!dx^n}\right| \leq (4(\gamma+2)e)^n P(1)(a+x^2)^{\frac{\hat{\gamma}-n}{2}},\ n\in\mathbb{Z}_+,\ x\in\mathbb{R}$$

$\left(\text{тут } \hat{\gamma} = \begin{cases} \gamma,\ (a+x^2)\geq 1, \\ \gamma_s,\ (a+x^2)<1 \end{cases}\right)$, при отриманні яких істотно використовується те, що

$$\frac{p!}{i!j!\cdots h!} \leq 2^k; \quad \sum_p^k 1 \leq (2e)^k,$$

де $p = i+j+...+h$, а знак суми поширюється на всі цілі невід'ємні розв'язки рівняння $k = i+2j+...+Lh$, отримуємо, що

$$\left|\frac{d^q\Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))}{q!dx^q}\right| \leq c_\alpha \left(\bar{A}_\alpha 2^4(\gamma+2)e^2\right)^q \left(\bar{P}(1)\right)^{\alpha+q} a_0^{\beta(q)}(a+x^2)^{\frac{\hat{\gamma}\alpha-q}{2}}, \quad q\in\mathbb{Z}_+, \quad x\in\mathbb{R},$$

де $\bar{V} \equiv \begin{cases} V, & V>1, \\ 1, & V\leq 1, \end{cases}$ а $\beta(q) \equiv \begin{cases} -q, & a_l<1, \\ 0, & a_l\geq 1. \end{cases}$

Звідси, оскільки $\sup\limits_{t>0}\{t^p e^{-t}\} \leq p!$, маємо

$$\forall\, k\in\mathbb{Z}_+\ \forall x\in\mathbb{R}: \left|D_x^k\Theta_\delta(x)\right| \leq k!\Theta_\delta(x)\left(\bar{c}_\alpha\bar{A}_\alpha 2^4(\gamma+2)e^2(\bar{P}(1))^{\alpha+1}\right)^k a_0^{\beta(k)} \times$$
$$\times\sum_p^k \frac{\delta^p}{i!j!...h!}(a+x^2)^{\frac{\hat{\gamma}\alpha p}{2}} \leq k!e^{-\delta(c_0-\delta_1)P^\alpha((a+x^2)^{1/2})}\left(\bar{c}_\alpha\bar{A}_\alpha 2^4(\gamma+2)e^2(\bar{P}(1))^{\alpha+1}\right)^k a_0^{\beta(k)} \times$$
$$\times\sum_p^k \frac{\delta^p(a+x^2)^{\frac{\hat{\gamma}\alpha p}{2}}}{i!j!...h!} e^{-\delta_1\delta a_0^\alpha (a+x^2)^{\alpha\hat{\gamma}/2}} \leq$$
$$\leq k!e^{-\delta(c_0-\delta_1)P^\alpha((a+x^2)^{1/2})}\left(\bar{c}_\alpha\bar{A}_\alpha 2^4(\gamma+2)e^2(\bar{P}(1))^{\alpha+1}\right)^k a_0^{\beta(k)}\sum_p^k \frac{\sup\limits_{t>0}\{e^{-t}t^p\}}{i!j!...h!}(\delta_1 a_0^\alpha)^{-p} \leq$$
$$\leq k!e^{-\delta(c_0-\delta_1)P^\alpha((a+x^2)^{1/2})}\left(\bar{c}_\alpha\bar{A}_\alpha 2^6(\gamma+2)e^3(\bar{P}(1))^{\alpha+1}\right)^k a_0^{\beta(k)}(\delta_1 a_0^\alpha)^{\beta_1}$$

$\left(\text{тут } 0<\delta_1<c_0, \text{ а } \beta_1 \equiv \begin{cases} -k, & \delta_1 a_0^\alpha < 1, \\ 0, & \delta_1 a_0^\alpha \geq 1 \end{cases}\right)$. Що і потрібно було довести. $\square$

Далі нам буде потрібне наступне твердження.

Лема 2. *Нехай* $\Omega\in\mathcal{G}_\alpha,\ \alpha>0,\ 0<\eta\leq\dfrac{1}{\alpha\gamma}$ *і* $\beta\geq 1$, *а* $\Phi\in\left\{S_\eta, S_\eta^\beta\right\}$. *Тоді*

$$\forall\,\varphi\in\Phi\ \exists\,\delta_1>0\ :\ e^{\delta_1\Omega\left(P((a+(\cdot)^2)^{\frac{1}{2}})\right)}\varphi(\cdot)\in\Phi,\ a>0.$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $\Phi = S_\eta^\beta$. Тоді, якщо $\varphi\in\Phi$, то досить довести, що

$$\exists\,\delta>0\ \exists\,\delta_1>0\ \exists\,c>0\ \exists\,A>0\ \forall\,l\in\mathbb{Z}_+\ \forall\,x\in\mathbb{R}\ :$$

$$\left| D_x^l \left(e^{\delta_1 \Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))} \varphi(x) \right) \right| \le c A^l l^{l\beta} e^{-\delta |x|^{\frac{1}{\eta}}}.$$

Для довільного $l \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left| D_x^l \left(e^{\delta_1 \Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))} \varphi(x) \right) \right| \le \sum_{k=0}^{l} C_l^k \left| D_x^k e^{\delta_1 \Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))} \right| \cdot \left| D_x^{l-k} \varphi(x) \right|, \quad \delta_1 > 0, x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

і оскільки $\varphi \in \Phi$, то

$$\exists \delta_0 \in (0;1)\ \exists\, b > 0\ \exists\, B > 0\ \forall\, r \in \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ : |D_x^r \varphi(x)| \le b B^r r^{\beta r} e^{-\delta_0 |x|^{\frac{1}{\eta}}}.$$

Тому звідси і з (2), а також з нерівності (1) (при $\delta = -\delta_1$) отримуємо, що

$$\forall\, \varphi \in \Phi\ :\ \left| D_x^r \left(e^{\delta_1 \Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))} \varphi(x) \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{r} C_r^k k! \Theta_{-\delta_1}(x) (\bar{c}_\alpha \bar{A}_\alpha 2^4 (\gamma+2) e^2 (\bar{P}(1))^{\alpha+1})^k a_0^{\beta(k)} \times$$

$$\times \left(\sum_{p}^{k} \frac{\delta_1^p}{i! j! \ldots h!} (a+x^2)^{\frac{\hat{\gamma}\alpha p}{2}} \right) b B^{r-k} (r-k)^{\beta(r-k)} e^{-\delta_0 |x|^{1/\eta}} \le$$

$$\le b (\bar{c}_\alpha \bar{a}^{\frac{1}{2\eta}} \bar{A}_\alpha \bar{B} 2^{5+\frac{1}{2\eta}} (\gamma+2) e^2 (\bar{P}(1))^{\alpha+1})^r a_0^{\beta(r)} e^{c_0' \delta_1 P^\alpha(1)(2\bar{a})^{\frac{1}{2\eta}} + \frac{\delta_0}{2}} \times$$

$$\times e^{-(\frac{\delta_0}{2} - \delta_1 c_0' P^\alpha(1)(2\bar{a})^{\frac{1}{2\eta}}) |x|^{\frac{1}{\eta}}} \sum_{k=0}^{r} k^{\beta k} (r-k)^{\beta(r-k)} \left(\sum_{p}^{k} \frac{\delta_1^p}{i! j! \ldots h!} (1+|x|^{1/\eta})^p e^{-\frac{\delta_0}{2}(1+|x|^{\frac{1}{\eta}})} \right) \le$$

$$\le b (\bar{c}_\alpha \bar{a}^{\frac{1}{2\eta}} \bar{A}_\alpha \overline{\bar{B} \left(\frac{\delta_1}{\delta_0} \right)} 2^{6+\frac{1}{2\eta}} (\gamma+2) e^2 (\bar{P}(1))^{\alpha+1})^r a_0^{\beta(r)} e^{c_0' \delta_1 P^\alpha(1)(2\bar{a})^{\frac{1}{2\eta}} + \frac{\delta_0}{2}} \times$$

$$\times e^{-(\frac{\delta_0}{2} - \delta_1 c_0' P^\alpha(1)(2\bar{a})^{\frac{1}{2\eta}}) |x|^{\frac{1}{\eta}}} \sum_{k=0}^{r} r^{\beta k} r^{\beta(r-k)} \left(\sum_{p}^{k} \frac{p!}{i! j! \ldots h!} \right) \le b e^{\delta_1 c_0' P^\alpha(1)(2\bar{a})^{\frac{1}{2\eta}} + \frac{\delta_0}{2}} \times$$

$$\times (\bar{c}_\alpha \bar{a}^{\frac{1}{2\eta}} \bar{A}_\alpha \overline{\bar{B} \left(\frac{\delta_1}{\delta_0} \right)} 2^{9+\frac{1}{2\eta}} (\gamma+2) e^3 (\bar{P}(1))^{\alpha+1})^r a_0^{\beta(r)} r^{\beta r} e^{-(\frac{\delta_0}{2} - \delta_1 c_0' P^\alpha(1)(2\bar{a})^{\frac{1}{2\eta}}) |x|^{\frac{1}{\eta}}}, \quad (3)$$

де $0 < \eta \le \frac{1}{\alpha\gamma}$, $x \in \mathbb{R}$, а $r \in \mathbb{Z}_+$, якщо $0 < \delta_1 < \delta_0 / (2^{\frac{1}{2\eta}+1} c_0' P^\alpha(1) \bar{a}^{\frac{1}{2\eta}})$.

Легко переконатись в тому, що дане твердження залишиться правильним і у випадку, коли $\Phi = S_\eta,\ 0 < \eta \le \dfrac{1}{\alpha\gamma}$. $\square$

Теорема 1. *Нехай $a > 0$, $\Omega \in \mathcal{G}_\alpha$, $\alpha > 0$, $0 < \eta \le \dfrac{1}{\alpha\gamma}$ і $\beta \ge 1$, а $\Phi \in \left\{ S_\eta, S_\eta^\beta \right\}$. Тоді для того, щоб функція $c(\cdot)$ була мультиплікатором у просторі Φ, необхідно і достатньо, щоб для кожного фіксованого $\delta > 0$, $c(\cdot) e^{-\delta \Omega(P((a+(\cdot)^2)^{\frac{1}{2}}))} \in \Phi$.*

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Для цього переконаємось у виконанні наступних умов:

1) $\forall \varphi \in \Phi : c(\cdot)\varphi(\cdot) \in \Phi$;

2) для кожної послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset \Phi$ такої, що $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\overset{\Phi}{\to}} 0$, відповідна послідовність $\{c(\cdot)\varphi_\nu(\cdot),\ \nu \in \mathbb{N}\}$ прямує до нуля в Φ, при $\nu \to \infty$.

За лемою 2

$$\forall \varphi \in \Phi\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : c(\cdot)\varphi(\cdot) = (c(\cdot)e^{-\delta\Omega(P((a+(\cdot)^2)^{\frac{1}{2}}))})(e^{\delta\Omega(P((a+(\cdot)^2)^{\frac{1}{2}}))}\varphi(\cdot)) \in \Phi,$$

як добуток функцій з Φ. Отже, умова 1) виконується.

Для доведення 2) у випадку, коли $\Phi = S_\eta^\beta$, досить перевірити, чи:

I) $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ :\ \left|D_x^k(c(x)\varphi_\nu(x))\right| \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0;$

II) $\exists \delta_1 > 0\ \exists b > 0\ \exists B > 0\ \forall \nu \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ \left|D_x^k\left(c(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| \ \le bB^k k^{\beta k} e^{-\delta_1|x|^{\frac{1}{\eta}}}.$

Оскільки $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\overset{\Phi}{\to}} 0$, то

а) $\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ :\ \left|D_x^k\varphi_\nu(x)\right| \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0;$

б) $\forall \nu \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \left|D_x^k\varphi_\nu(x)\right| \ \le c_0 A_0^k k^{\beta k} e^{-\delta_0|x|^{\frac{1}{\eta}}},\ x \in \mathbb{R},$

де $c_0,\ A_0,\ \delta_0$ — додатні сталі, не залежні від x, k і ν.

Умова I) виконується. Справді, за умовою а)

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \ :\ \left|D_x^k\left(c(x)\varphi_\nu(x)\right)\right| \ \le\ \sum_{l=0}^{k} C_k^l \sup_{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}} \left(\left|D_x^l c(x)\right|\right)\ \left|D_x^{k-l}\varphi_\nu(x)\right| \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0.$$

Доведемо справедливість II). За умовою б), міркуючи, як і при доведенні нерівностей (3), прийдемо до нерівності

$$\left|D_x^l\left(e^{\delta_2\Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))}\varphi_\nu(x)\right)\right| \le b_1 B_1^l l^{\beta l} e^{-\delta_3|x|^{\frac{1}{\eta}}},$$

тут $b_1,\ B_1,\ \delta_3$ — додатні сталі, які не залежать від $l \in \mathbb{Z}_+,\ \nu \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}$, якщо $0 < \delta_2 < \delta_0/\left(2^{\frac{1}{2\eta}+1} c_0' P^\alpha(1)\bar{a}^{\frac{1}{2\eta}}\right).$

Звідси, приймаючи до уваги те, що $c(x)e^{-\delta_2\Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))} \in \Phi,\ x \in \mathbb{R},\ \delta_2 > 0$, отримуємо

$$\forall\ \nu \in \mathbb{N}\ \forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ \left|D_x^k(c(x)\varphi_\nu(x))\right| \le$$
$$\le \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left|D_x^{k-l}\left(c(x)e^{-\delta_2\Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))}\right)\right| \left|D_x^l\left(e^{\delta_2\Omega(P((a+x^2)^{\frac{1}{2}}))}\varphi_\nu(x)\right)\right| \le$$
$$\le b_1 b_2 e^{-\delta_3|x|^{\frac{1}{\eta}}} \sum_{l=0}^{k} C_k^l B_1^l l^{\beta l} B_2^{k-l}(k-l)^{\beta(k-l)} e^{-\delta_1|x|^{\frac{1}{\eta}}} \le b_3 B_3^k k^{\beta k} e^{-\delta_5|x|^{\frac{1}{\eta}}},$$

де b_3, B_3, δ_5 — додатні сталі, не залежні від ν, k і x. Отже, вправедливість умови II) доведена.

У випадку, коли $\Phi = S_\eta,\ 0 < \eta \le 1/(\alpha\gamma)$, справедливість умови II) перевіряється подібно. $\square$

Нехай $\eta > 0,\ \beta > 0$ і $\Phi \in \{S_\eta, S_\eta^\beta\}$, а $F[\Phi] \equiv \tilde{\Phi}$ — простір Фур'є-образів:

$$F[\Phi] = \left\{F[\varphi](\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{ix\sigma}dx,\ \varphi \in \Phi,\ \sigma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Через Φ' позначимо сукупність всіх лінійних неперервних функціоналів з слабкою збіжністю, визначених на Φ.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ означимо за допомогою співвідношення [1]

$$\langle F[f], F[\varphi]\rangle = 2\pi\langle f, \varphi\rangle,\ \varphi \in \Phi.$$

2. Псевдодиференціювання і задача Коші. Розглянемо функцію $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, яка розкладається в ряд Тейлора в околі точки $x = 1$, при цьому:

1) $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{g^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i,\ x \in \mathbb{R};$

2) $\exists\ \alpha > 0:\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} |g^{(i)}(1)|(2(i+1))^{2(i+1)\alpha} < +\infty;$

3) $\exists\ c > 0\ \exists \delta > 0\ \exists \beta > 0\ \exists l < \dfrac{2}{\beta}\ \ \forall x \in \mathbb{R}:\ |g(x)| < ce^{\delta|1-x|^l}.$

Нехай $g(E - D_x^2)$ — оператор узагальненого диференціювання за Е. Постом, породжений диференційним оператором $E - D_x^2$ (тут E — одиничний оператор), що визначається на функціях $f \in S_\alpha^\beta$ за допомогою рівності [4]

$$g(E - D_x^2)f = \lim_{h\to 0} g\left(E - \left(\frac{E-\tau_h}{h}\right)^2\right) f,$$

де

$$g\left(E - \left(\frac{E-\tau_h}{h}\right)^2\right) f = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, \frac{g^{(k)}(1)}{k!} \left(\frac{E-\tau_h}{h}\right)^{2k} f,$$

а τ_h — звичайний оператор зсуву на крок h.

У [5] доведено, що

$$\forall f \in S_\alpha^\beta\ \forall\ x \in \mathbb{R}:\ (g(E - D_x^2)f)(x) = F^{-1}[g(1+\xi^2)F[f](\xi)](x). \tag{4}$$

Рівність (4), як і у класичному означенні дробового диференціювання, покладемо в основу означення псевдодиференціювання за Постом.

Означення 2. Оператор $\Omega\left((aE - D_x^2)^{\frac{r}{2}}\right),\ r > 0,\ a > 0$, дія якого на функціях $f \in \mathbb{S}$ визначається рівністю

$$\Omega\left((aE - D_x^2)^{\frac{r}{2}}\right) f = F^{-1}\left[\Omega\left((a+\xi^2)^{\frac{r}{2}}\right) F[f]\right], \tag{5}$$

називатимемо *псевдодиференційним оператором Поста* з символом Ω, породженим псевдодиференційним оператором Бесселя з додатним параметром a, порядку r у просторі $\mathbb{S}$.

Зауважимо, що для того, щоб означення 2 мало зміст, достатньо вимагати від функції Ω, щоб вона забезпечувала існування правої частини рівності (5).

Далі розглянемо рівняння

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + \Omega\left(P\left((aE - D_x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right) U(t,x) = 0,\ (t,x) \in (0;+\infty)\times\mathbb{R}, \tag{6}$$

де $\Omega\left(P\left((aE-D_x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right)$ — псевдодиференційний оператор Поста з символом $\Omega(P)$, породжений псевдодиференційним оператором Бесселя I-го порядку з додатним параметром a; $\Omega\in\mathcal{G}_\alpha,\ \alpha>0$.

Якщо для рівняння (6) задати початкову умову

$$U(t,\cdot)\Big|_{t=0}=f, f\in\tilde{\Phi}', \tag{7}$$

то під розв'язком задачі Коші (6)-(7) розумітимемо гладку функцію U, яка задовольняє рівняння (6) і початкову умову (7) у тому розумінні, що $U(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\overset{\tilde{\Phi}'}{\to}}f$.

Нехай

$$G_t(x)=F^{-1}\left[\exp\left(-t\Omega\left(P\left((a+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right)\right](t,x),\ (t,x)\in(0;+\infty)\times\mathbb{R}.$$

За лемою 1 $G_t(\cdot)\in S_1^{\frac{1}{\alpha\gamma}}$, де $t>0$.

Теорема 2. *Для того, щоб задача Коші (6)–(7) була коректно розв'язною (тобто мала єдиний розв'язок, який неперервно залежить від початкових даних) і:*

1) її розв'язок $U(t,\cdot)$ для кожного фиксованого $t>0$ належав до простору $\tilde{\Phi}\in\{S^\eta,S^\eta_\beta\},\ \eta=\dfrac{1}{\alpha\gamma},\ \beta\geq 1$;

2) $\dfrac{\partial}{\partial t}F[U]=F\left[\dfrac{\partial U}{\partial t}\right],\ t>0$;

3) $U(t,x)=f*G_t(x),\ (t,x)\in(0;+\infty)\times\mathbb{R}$,

необхідно і досить, щоб $F[f]$ було мультиплікатором у просторі Φ.

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки рівняння (6), які при кожному фіксованому $t>0$ є елементами простору $\tilde{\Phi}$ і за t задовольняють умову 2) цієї теореми, то враховуючи, що відображення

$$F(F^{-1})\colon S^\eta_\beta\to S^\beta_\eta,\ F(F^{-1})\colon S_\beta\to S^\beta,\quad \eta>0,\beta>0,$$

взаємнодозначні і неперервні [2], отримуємо рівносильність рівняння (6) і рівняння

$$\frac{\partial\tilde{U}(t,\xi)}{\partial t}+\Omega\left(P\left((a+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\tilde{U}(t,\xi)=0,\quad (t,\xi)\in(0;+\infty)\times\mathbb{R} \tag{8}$$

(тут і надалі $\tilde{V}\equiv F[V]$), при цьому початкова умова (7) буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{U}(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\overset{\Phi'}{\to}}\tilde{f}. \tag{9}$$

Справді,

$$\forall\varphi\in\tilde{\Phi}:\ 2\pi\langle\tilde{U}(t,\cdot),\tilde{\varphi}\rangle=\langle U(t,\cdot),\varphi\rangle\underset{t\to+0}{\to}\langle f,\varphi\rangle=2\pi\langle\tilde{f},\tilde{\varphi}\rangle.$$

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (6)–(7) і питання про коректну розв'язність задачі Коші (8)–(9) є рівносильними.

Доведемо необхідність. Для цього достатньо довести, що якщо задача Коші (8)-(9) коректно розв'язна, то $\tilde{f}$ — мультиплікатор в Φ.

Відзначимо, що рівняння (8) — звичайне диференційне рівняння першого порядку з розділюваними змінними, загальний розв'язок якого

$$\tilde{U}(t,\xi)=c(\xi)e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)},\ (t,\xi)\in(0;+\infty)\times\mathbb{R}. \tag{10}$$

Оскільки $\tilde{U}(t,\xi)\in\Phi$ при кожному фіксованому $t>0$, то за теоремою 1, функція $c(\cdot)$ є мультиплікатором у просторі Φ .

Враховуючи, що

$$\forall\varphi\in\Phi:\ e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\varphi(\xi)\underset{t\to+0}{\overset{\Phi}{\to}}\varphi(\xi),$$

з умови (9) і з рівності (10) отримаємо

$$\left\langle\tilde{U}(t,\xi),\varphi(\xi)\right\rangle=\left\langle c(\xi)e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)},\varphi(\xi)\right\rangle=$$

$$=\left\langle c(\xi),e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\varphi(\xi)\right\rangle\underset{t\to0}{\to}\langle c(\xi),\varphi(\xi)\rangle=\left\langle\tilde{f},\varphi(\xi)\right\rangle,\quad\xi\in\mathbb{R},\ \varphi\in\Phi.$$

Звідси, на основі того, що задача Коші (8)–(9) має єдиний розв'язок, отримуємо, що $\tilde{f}$ — регулярний функціонал, породжений мультиплікатором у просторі Φ.

Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Нехай $F[f]$ — мультиплікатор в Φ, тоді за лемою 1 функція

$$\tilde{U}(t,\xi)=\tilde{f}(\xi)e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)},\quad(t,x)\in(0;+\infty)\times\mathbb{R},$$

є елементом простору Φ при кожному $t>0$, при цьому вона — розв'язок задачі Коші (8)–(9). Доведемо, що цей розв'язок єдиний в Φ. Для цього припустимо, щто існує у цьому просторі ще один розв'язок $\tilde{U}_1$ цієї задачі.

Враховуючи структуру загального розв'язку (10) рівняння (8),

$$\tilde{U}_1(t,\xi)=c_1(\xi)e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)},\quad(t,\xi)\in(0;+\infty)\times\mathbb{R},$$

а також, що $\tilde{U}_1(t,\cdot)\in\Phi,\ t>0$, отримуємо, що функція $c_1(\cdot)$ — мультиплікатор в Φ (теорема 1).

Розглянемо функцію $V(t,\cdot)=\tilde{U}(t,\cdot)-\tilde{U}_1(t,\cdot)$, $t>0$, яка також є розв'язком рівняння (8). Вона задовольняє умову $V(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\overset{\Phi'}{\to}}0$, з якої, позаяк різниця мультиплікаторів у просторі Φ є мультиплікатором у цьому просторі, отримаємо

$$\langle V(t,\xi),\varphi(\xi)\rangle=\left\langle(\tilde{f}(\xi)-c_1(\xi))e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)},\varphi(\xi)\right\rangle=$$

$$=\left\langle\tilde{f}(\xi)-c_1(\xi),e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\varphi(\xi)\right\rangle\underset{t\to0}{\to}\left\langle\tilde{f}(\xi)-c_1(\xi),\varphi(\xi)\right\rangle=$$

$$=\langle0,\varphi(\xi)\rangle,\ \xi\in\mathbb{R},\ \varphi\in\Phi.$$

Отже $\forall\varphi \in \Phi: \ \left\langle \tilde{f}(\cdot) - c_1(\cdot), \varphi(\cdot) \right\rangle = 0$. Якщо прийняти в останній рівності

$$\varphi(\xi) = \overline{\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi)}\; e^{-\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)} \in \Phi, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

то прийдемо до рівності

$$\left\langle \tilde{f}(\xi) - c_1(\xi), \overline{(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi))} e^{-\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)} \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{(\tilde{f}(\xi) - c_1(\xi))^2} e^{-\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)} d\xi = 0.$$

Звідси $\tilde{f}(\xi) = c_1(\xi)$, майже скрізь на $\mathbb{R}$. Але оскільки $\tilde{f}(\cdot)$ і $c_1(\cdot)$ — нескінченно диференційовні функції, то ця рівність правильна всюди на $\mathbb{R}$, тобто $\tilde{U}(t,\xi) \equiv \tilde{U}_1(t,\xi)$, $(t,\xi) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}$.

Тому задача Коші (8)–(9) має єдиний розв'язок у просторі Φ.

Далі встановимо виконання умови 2) цієї теореми для розв'язку рівняння (8).

Оскільки

$$F\left[\frac{\partial}{\partial t} U\right] = F\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi) e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\right]\right)\right], \ t > 0$$

то досить довести рівність

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi) e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\right]\right) = F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi) e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\right)\right], \ t > 0, \quad (11)$$

тобто, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi) e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\right]\right) =$$

$$= -F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi) e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)} \Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right], \ t > 0.$$

Для цього зафіксуємо довільне $t = t_0 > 0$ і виберемо $\delta > 0$ таке, що $t_0 > \delta$. Тоді

$$\forall t \geq \delta: \ \left| F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi) e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\right)\right] \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(\xi)\right| e^{-\delta\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)} \Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) d\xi < +\infty,$$

тобто інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\xi) e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\right) e^{-ix\xi} d\xi$$

рівномірно збіжний за $t \geq \delta$ і $x \in \mathbb{R}$. Оскільки в останньому інтегралі підінтегральна функція неперервна за сукупністю змінних $x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$ и $t \geq \delta$, то за відомою теоремою з математичного аналізу, отримуємо справедливість рівності (11) для кожного $t \geq \delta$, а отже і для $t = t_0$. Довільність вибору $t = t_0$ і доводить виконання умови 2) даної теореми для розв'язку рівняння (8).

Нарешті, приймаючи до уваги, що

$$U(t,\cdot) = F^{-1}[\tilde{U}(t,\xi)] = F^{-1}\left[\tilde{f}(\xi)e^{-t\Omega\left(P\left(\left(a+\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)}\right],\ t > 0,$$

і враховуючи твердження теореми 1 з [3], отримуємо, що $U(t,\cdot) = f * G_t(\cdot), \quad t > 0$.

Розв'язок U задачі Коші (6)–(7) неперервно залежить від початкових даних задачі, позаяк відповідний розв'язок $\tilde{U}$ має таку властивість, а F^{-1} неперервний оператор з Φ в $\tilde{\Phi}$. $\square$

На завершення відзначимо, що всі доведені тут твердження правильні і у випадку n-вимірного евклідового простору, якщо замість D_x^2 у рівнянні (6) розглянути оператор Лапласа.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
2. Schwartz L. Théorie des distributions. — Act. Sc. en industr, №1091 (T.1), 1950. Paris: Hermann et C-ie.
3. Борок В. М. *Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных* // ДАН СССР. – 1954. – T.XCVII, №6. – С.949–952.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
5. Літовченко В. А. *Зображення узагальненого диференціювання за Е. Постом у класичній формі дробового диференціювання* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Матем. – 2000. – Вип.76. – С.54–58.

кафедра математичного моделювання
Чернівецького національного університету ім. Ю.Федьковича
vladlit@chdu.cv.ua

Надійшло 19.01.2002