УДК 517.956.4

Т. М. Балабушенко

ПРО ОЦІНКИ В НЕОБМЕЖЕНИХ ВІДНОСНО ЧАСОВОЇ ЗМІННОЇ ОБЛАСТЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

T. M. Balabushenko. *On estimates in unbounded on time variable domains for fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems*, Matematychni Studii, **17** (2002) 163–174.

We introduce $\Lambda_d^{m,r}$-conditions which distinguish special classes of $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems. The fundamental matrices of solutions of the Cauchy problem for these systems are defined in unbounded with respect to the time variable t domains. They satisfy the $\Lambda_d^{m,r}$-estimates, in which the estimated functions have a qualified behavior as t tends to infinity. Examples of the systems satisfying the introduced conditions are presented. The $\Lambda_d^{m,r}$-estimates are important for studying properties of solutions in unbounded on t domains.

Т. М. Балабушенко. *Об оценках в неограниченных относительно временной переменной областях фундаментальной матрицы решений задачи Коши для $\overrightarrow{2b}$-параболических систем* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.163–174.

Введены $\Lambda_d^{m,r}$-условия, которые выделяют специальные классы $\overrightarrow{2b}$-параболических систем. Фундаментальные матрицы решений для этих систем определены в неограниченных по временной переменной t областях и для них справедливы $\Lambda_d^{m,r}$-оценки, оценочные функции из которых ведут себя квалифицированно при стремлении t к бесконечности. Приведены примеры систем, удовлетворяющих введённым условиям. $\Lambda_d^{m,r}$-оценки важны для изучения свойств решений в неограниченных по t областях.

При дослідженні властивостей розв'язків параболічних систем у необмежених відносно часової змінної t областях важливу роль відіграють оцінки в цих областях фундаментальних матриць розв'язків (ФМР) задачі Коші. Ще в 1953 р. С. Д. Ейдельманом [1] при дослідженні параболічних за Петровським систем першого порядку за t були введені так звані Л-умови. Вони полягали в тому, що для ФМР задачі Коші справджувались оцінки в необмежених інтервалах зміни t, оцінні функції з яких прямують до нуля при прямуванні t до нескінченності. Цим же автором виділені класи систем, для яких виконуються введені умови, та наведені результати різноманітних застосувань відповідних оцінок ФМР. Дослідження в цьому напрямку продовжувались у працях [2–4], де Л-умови вже називаються умовами $\Lambda_1^{\pm}$ і $\Lambda_2^{\pm}$. Такого типу умови введені в [5, 6] для параболічних за Петровським систем довільних порядків за t.

У 1960 р. С.Д. Ейдельман [7] виділив і розпочав досліджувати новий клас систем — клас $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем. У цих системах кожна просторова змінна може мати

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K45.

свою вагу стосовно змінної t. Теорії $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем присвячена фундаментальна праця [8], але в ній дослідження властивостей розв'язків у необмежених відносно t областях не проводилось. Деякі оцінки ФМР задачі Коші в необмежених відносно t областях одержані в [9,10]. Ці оцінки застосовані до встановлення зв'язку між ФМР $\overrightarrow{2b}$-параболічних і відповідних $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем. У праці [11] зроблена спроба одержати Λ_1^--оцінку для ФМР задачі Коші та застосувати її до дослідження розв'язності задач без початкових умов для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем.

У даній статті для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем першого порядку за t вводяться умови $\Lambda_d^{m,r}$, які є певним аналогом $\Lambda_m^{\pm}$-умов С.Д. Ейдельмана. Ці умови виділяють значно ширші класи систем, ніж ті, що розглядались раніше. ФМР задачі Коші для таких систем можуть бути не нескінченно диференційовними, а оцінні функції з відповідних оцінок не завжди є нескінченно малими при прямуванні t до нескінченності. Наведені приклади систем, які задовольняють $\Lambda_d^{m,r}$-умови. Властивостям розв'язків таких $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем (стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку задачі Коші, теореми типу Ліувілля, інтегральні зображення розв'язків, визначених як функції t на інтервалі $(-\infty, T)$, та ін.), а також одержанню формул і оцінок ФМР $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$-параболічними, будуть присвячені наступні публікації. Ці результати частково анонсовані в [12].

1. Використовуватимемо такі позначення: $n, N, b_1, ..., b_n$ — задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, ..., 2b_n)$; B — найменше спільне кратне чисел $b_1, ..., b_n$; $m_j \equiv B/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, ..., n\}$; $\mathbb{Z}_+^n$ — сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів; i — уявна одиниця; I — одинична матриця порядку N; $\partial_t u \equiv \partial u/\partial t$; $\|k\| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, $D_x^k \equiv (-i\partial_{x_1})^{k_1} ... (-i\partial_{x_n})^{k_n}$ і $x^k \equiv x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$, якщо $k \equiv (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ і $x \equiv (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\Pi_H \equiv \{(t,x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $H_1 \equiv (0, \infty)$, $H_2 \equiv (-\infty, T]$, де T — задане число з $\mathbb{R}$; $\Pi_m \equiv \Pi_{H_m}$, $m \in \{1, 2\}$; $|\sigma|_B \equiv \left(\sum_{j=1}^n |\sigma_j|^{2/m_j}\right)^{1/2}$, якщо $\sigma \equiv (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему N рівнянь

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{\|k\| \le 2B} a_k(t,x) D_x^k u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \quad m \in \{1,2\}. \tag{1}$$

Як відомо [4,7], під ФМР задачі Коші для системи (1) розуміється квадратна матриця $Z(t, x; \tau, \xi)$, $\tau < t$, $\{t, \tau\} \subset H_m$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, така, що функція

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_m,$$

є розв'язком системи (1), який задовольняє умову

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in H_m$ та довільної гладкої і фінітної функції φ.

Нехай в кожному шарі $\Pi_{m,[\gamma,s]} \equiv \Pi_m \cap \{\gamma \le t \le s\}$, $\gamma < s$, $\{\gamma, s\} \subset \overline{H}_m$, система (1) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна, її коефіцієнти неперервні за t, обмежені й задовольняють рівномірну умову Гельдера за x, причому неперервність за t коефіцієнтів a_k, $\|k\| = 2B$, рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді із результатів праць [7,8] випливає, що для системи (1) існує в $\Pi_{m,[\gamma,s]}$ ФМР Z задачі Коші, для якої правильні оцінки

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_k \prod_{j=1}^{n} (t-\tau)^{-(1+k_j)/(2b_j)} \exp\left\{-c\sum_{j=1}^{n}(t-\tau)^{1-q_j}|x_j-\xi_j|^{q_j}\right\},$$

$$\{t,\tau\}\subset[\gamma,s], \quad \tau<t, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \ \|k\|\le 2B.$$

Нас цікавлять оцінки Z в усій області Π_m.

Означення. Система (1) задовольняє умову $\Lambda_d^{m,r}$, $d\in\mathbb{R}$, $m\in\{1,2\}$, $r\in\mathbb{Z}_+^1\cup\{\infty\}$, якщо існує ФМР $Z(t,x;\tau,\xi), \{t,\tau\}\subset H_m, \tau<t, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, задачі Коші для системи (1), яка має похідні $D_x^k Z$, $\|k\|\le r$, і справджуються оцінки

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_k \prod_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-1-k_j} \exp\left\{d(t-\tau) - c\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j(t-\tau))^{-q_j}|x_j-\xi_j|^{q_j}\right\},$$

$$\{t,\tau\}\subset H_m, \quad \tau<t, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \ \|k\|\le r, \tag{2}$$

де $C_k>0, c>0, \alpha_j, j\in\{1,...,n\}$, — невід'ємні неспадні функції такі, що $\alpha_j(0)=0$ і $\alpha_j(t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

2. Наведемо деякі приклади класів систем, які задовольняють введені $\Lambda_d^{m,r}$-умови. Більшість з цих класів є узагальненням відповідних класів параболічних за Петровським систем, що наведені в [4, с.116–128].

Твердження 1. *Нехай коефіцієнти системи*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{||k||=2B} a_k(t) D_x^k u(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_m, \tag{3}$$

є неперервними й обмеженими функціями в H_m та існує стала $\delta>0$ така, що для довільних $t\in H_m$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$ і $\eta\in\mathbb{C}^N$ справджується оцінка

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{||k||=2B} a_k(t)\sigma^k\eta,\eta\right) \le -\delta\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^{2b_j}|\eta|^2, \tag{4}$$

де $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{C}^N$. Тоді система (3) задовольняє $\Lambda_0^{m,\infty}$-умову з $\alpha_j(t)=t^{1/(2b_j)}$, $j\in\{1,...,n\}$.

Доведення. Для доведення цього твердження розглядається для системи (3) двоїста відносно перетворення Фур'є система звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{||k||=2B} a_k(t)s^k v \equiv P_0(t,s)v. \tag{5}$$

Нехай Q_l — стовпчик з номером l нормальної ФМР $Q(t,\tau,s)$ системи (5). Тоді

$$\mathrm{Re}(P_0(t,s)Q_l,Q_l) = \frac{1}{2}\left((P_0(t,s)Q_l,Q_l) + \overline{(P_0(t,s)Q_l,Q_l)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{dQ_l}{dt},Q_l\right) + \left(Q_l,\frac{dQ_l}{dt}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Q_l|^2.$$

З умови (4) і зауваження до леми 2.1 з [4, с.38] маємо

$$\mathrm{Re}(P_0(t,s)Q_l, Q_l) \le \left(-\delta_1 \sum_{j=1}^{n} |\sigma_j|^{2b_j} + F_1 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^{2b_j}\right) |Q_l|^2,$$

$$0 < \delta_1 < \delta, \quad F_1 > 0, \quad s = \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n,$$

$$\frac{d}{dt}|Q_l|^2 \le \left(-2\delta_1 \sum_{j=1}^{n} |\sigma_j|^{2b_j} + 2F_1 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^{2b_j}\right) |Q_l|^2,$$

тому

$$|Q_l(t,\tau,s)|^2 \le |Q_l(\tau,\tau,s)|^2 \exp\left\{ \left(-2\delta_1 \sum_{j=1}^{n} |\sigma_j|^{2b_j} + +2F_1 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^{2b_j}\right)(t-\tau)\right\} =$$

$$= \exp\left\{ \left(-2\delta_1 \sum_{j=1}^{n} |\sigma_j|^{2b_j} + 2F_1 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^{2b_j}\right)(t-\tau)\right\}, \quad l \in \{1, ..., N\},$$

оскільки $Q(\tau,\tau,s) = I$.

З останніх нерівностей отримуємо оцінку

$$|Q(t,\tau,s)| \le C \exp\left\{ \left(-\delta_1 \sum_{j=1}^{n} |\sigma_j|^{2b_j} + F_1 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^{2b_j}\right)(t-\tau)\right\}.$$

З цієї оцінки і формули

$$D_x^k Z(t,x;\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} (x_j - \xi_j)\sigma_j \right\} \sigma^k Q(t,\tau,\sigma) d\sigma \tag{6}$$

для ФМР Z за допомогою леми 1.1 з [4, с.36] випливає правильність сформульованого твердження. □

Твердження 2. *Нехай для $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі сталими коефіцієнтами*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{2b_0 \le ||k|| \le 2B} a_k D_x^k u(t,x) \equiv \sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(D_x) u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_m, \tag{7}$$

де $1 \le b_0 \le B$, виконуються такі припущення:

а) дійсні частини λ-коренів рівняння $\det\left(\sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\sigma) - \lambda I\right) = 0$ дорівнюють нулеві тільки при $\sigma = 0$;

б) дійсні частини власних чисел матриці $P_{2b_0}(\sigma)$ не дорівнюють нулеві при $|\sigma|_B = 1$.

Тоді система (7) задовольняє $\Lambda_0^{m,\infty}$-умову з $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $t \le 1$, $\alpha_j(t) = t^{m_j/(2b_0)}$, $t > 1$, $j \in \{1, ..., n\}$.

Доведення. У випадку $t-\tau \le 1$ потрібні оцінки для ФМР $Z(t,x;\tau,\xi)$ випливають із результатів [8]. Розглянемо випадок $t-\tau > 1$. Для λ-коренів рівняння

$$\det\left(\sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\sigma) - \lambda I\right) = 0$$

правильна нерівність

$$\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le -\delta(|\sigma|_B^{2b_0} + |\sigma|_B^{2B}). \tag{8}$$

Для $|\sigma|_B \le \varepsilon$ і $|\sigma|_B \ge R$, де ε і R — відповідно досить мале і досить велике число, нерівність (8) випливає з умови б) і умови $\overrightarrow{2b}$-параболічності системи. У випадку, коли $\varepsilon < |\sigma|_B < R$, нерівність (8) доводиться методом від супротивного.

З (8) випливає, що для λ-коренів рівняння

$$\det\left(\sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\sigma)\beta^{2B-j} - \lambda I\right) = 0$$

виконується оцінка

$$\operatorname{Re}\lambda(\sigma,\beta) \le -\delta(|\sigma|_B^{2B} + |\sigma|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}). \tag{9}$$

Встановимо тепер виконання для системи (7) $\Lambda_0^{m,\infty}$-умови. Нормальна ФМР системи звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\sigma)v,$$

яка відповідає системі (7), має вигляд

$$Q(t,\tau,\sigma) = \exp\left\{\sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\sigma)(t-\tau)\right\} = \exp\left\{\sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\eta)\beta^{2B-j}(t-\tau)^{1-B/b_0}\right\}, \tag{10}$$

де $\eta \equiv (\eta_1,...,\eta_n), \eta_j \equiv (t-\tau)^{m_j/(2b_0)}\sigma_j,\ j \in \{1,...,n\}, \beta \equiv (t-\tau)^{1/(2b_0)}$.

Скористаємося тепер тим, що $\exp\left\{\sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\eta+i\gamma)\beta^{2B-j}\right\}$ є значенням при $z=1$ нормальної ФМР $W(z,\eta+i\gamma,\beta)$ системи

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{j=2b_0}^{2B} P_j(\eta+i\gamma)\beta^{2B-j}w. \tag{11}$$

Далі розглядаються два можливі випадки: 1) $|\eta|_B > \varepsilon\beta$ і 2) $|\eta|_B \le \varepsilon\beta$, ε — деяка додатна стала. У випадку 1)

$$\operatorname{Re}\lambda(\eta,\beta) \le -\delta(|\eta|_B^{2B} + |\eta|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}) \le -\delta(|\eta|_B^{2B} + (\varepsilon\beta)^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}) \le$$
$$\le -\delta_0(|\eta|_B^{2B} + \beta^{2B}).$$

Система (11) у цьому випадку є перетворенням Фур'є $(2b_1,...,2b_n,2B)$-параболічної системи, яка містить лише групу старших членів. Тому правильна оцінка [8]

$$|W(1,\eta+i\gamma,\beta)| \le C\exp\{-\delta_1(|\eta|_B^{2B} + \beta^{2B}) + F_1|\gamma|_B^{2B}\}. \tag{12}$$

У випадку 2) можливі дві ситуації : а) $|\gamma|_B \leq \varepsilon_1\beta$ і б) $|\gamma|_B > \varepsilon_1\beta, \varepsilon_1 > \varepsilon$. У випадку а), позначивши $\eta + i\gamma$ через ξ, запишемо

$$\frac{dW}{dz} = |\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}\Big(P_{2b_0}\big((\xi_1/|\xi|_B^{m_1}, ..., \xi_n/|\xi|_B^{m_n})\big)+$$

$$+\frac{|\xi|_B}{\beta}P_{2b_0+1}\big((\xi_1/|\xi|_B^{m_1}, ..., \xi_n/|\xi|_B^{m_n})\big)+$$

$$+... + \Big(\frac{|\xi|_B}{\beta}\Big)^{2B-2b_0}P_{2B}\big((\xi_1/|\xi|_B^{m_1}, ..., \xi_n/|\xi|_B^{m_n})\big)\Big)W \equiv$$

$$\equiv |\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}P_{2b_0}\big((\xi_1/|\xi|_B^{m_1}, ..., \xi_n/|\xi|_B^{m_n})\big)W + R(z, \xi, \beta). \tag{13}$$

Розв'язок системи (13) записується у вигляді

$$W(z, \xi, \beta) = W_0(z, \xi, \beta) + \int_0^z W_0(z - \zeta, \xi, \beta)R(\zeta, \xi, \beta)d\zeta, \tag{14}$$

де

$$W_0(z, \xi, \beta) \equiv \exp\Big\{|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}P_{2b_0}\big((\xi_1/|\xi|_B^{m_1}, ..., \xi_n/|\xi|_B^{m_n})\big)z\Big\}.$$

Позначивши

$$\Lambda(\sigma) = \max_{1\leq j\leq n} \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma),$$

де $\lambda_j(\sigma), j \in \{1, ..., n\}$, — характеристичні числа матриці $P_{2b_0}(\sigma)$, здійснимо оцінку W_0. За допомогою леми 3.1 з [4, с.38] маємо

$$|W_0(z, \xi, \beta)| \leq \exp\Big\{|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}\Lambda\big((\xi_1/|\xi|_B^{m_1}, ..., \xi_n/|\xi|_B^{m_n})\big)z\Big\}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\Big(2|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}z\Big|P_{2b_0}\big((\xi_1/|\xi|_B^{m_1}, ..., \xi_n/|\xi|_B^{m_n})\big)\Big|^k\Big) \leq$$

$$\leq C\exp\Big\{-\delta|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}z\Big\}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}z\Big)^k \leq C\exp\Big\{-\delta_1|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}z\Big\}.$$

Далі, врахувавши формулу (14) і те, що $|R(z, \xi, \beta)| \leq \varepsilon_2|W(z, \xi, \beta)|$, $\varepsilon_2 > 0$, маємо

$$|W(z, \xi, \beta)| \leq |W_0(z, \xi, \beta)| + C\varepsilon_2\int_0^z |W_0(z - \zeta, \xi, \beta)||W(\zeta, \xi, \beta)|d\zeta \leq$$

$$\leq C\exp\Big\{-\delta_1|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}z\Big\} + C\varepsilon_2\int_0^z \exp\Big\{-\delta_1|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}(z-\zeta)\Big\}|W(\zeta, \xi, \beta)|d\zeta.$$

Нехай

$$V(z) \equiv |W(z, \xi, \beta)|\exp\Big\{\delta_1|\xi|_B^{2b_0}\beta^{2B-2b_0}z\Big\},$$

тоді остання нерівність перепишеться у вигляді

$$V(\xi) \leq C + C\varepsilon_2 \int_0^z V(\zeta) d\zeta,$$

звідки за допомогою леми 4.1 з [4, с.39] отримуємо

$$V(\xi) \leq C \exp\left\{ C\varepsilon_2 \int_0^z d\zeta \right\} = C \exp\{C\varepsilon_2 z\}.$$

Отже, для W одержали оцінку

$$|W(1,\xi,\beta)| \leq C_1 \exp\left\{ -\delta_1 |\xi|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} \right\} \leq C_1 \exp\left\{ \beta^{2B-2b_0} (-\delta_2 |\eta|_B^{2b_0} + F_1 |\gamma|_B^{2b_0}) \right\},$$

де $0 < \delta_2 < \delta_1$, звідки для $|\eta|_B \leq \varepsilon\beta$ випливає оцінка

$$|W(1,\xi,\beta)| \leq C_1 \exp\left\{ -\frac{\delta_2}{2} \beta^{2B-2b_0} |\eta|_B^{2b_0} - \frac{\delta_2}{2} \beta^{2B-2b_0} |\eta|_B^{2b_0} + F_1 |\gamma|_B^{2b_0} \right\} \leq$$

$$\leq C \exp\left\{ -\delta |\eta|_B^{2B} - \delta |\eta|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} + F_1 |\gamma|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} \right\}. \qquad (15)$$

У випадку б) маємо $|\gamma|_B \geq \varepsilon_1 \beta \geq \varepsilon\beta \geq |\eta|_B$. Запишемо (13) у вигляді

$$\frac{dW}{dz} = \Big(|\eta|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} P_{2b_0}\big((\eta_1/|\eta|_B^{m_1}, ..., \eta_n/|\eta|_B^{m_n}) \big) + R_1(\eta,\gamma,\beta) \Big) W.$$

Подібно до випадку а) маємо

$$|W_0(z,\eta,\beta)| \leq C \exp\left\{ -\delta_1 |\eta|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} z \right\},$$

$$|R_1(\eta,\gamma,\beta)| \leq C \sum_{j=2b_0}^{2B} |\gamma|_B^j \beta^{2B-j} \leq C\Big(|\gamma|_B^{2B} + |\gamma|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} \Big),$$

$$|W(1,\xi,\beta)| \leq C \exp\left\{ -\delta_1 |\eta|_B^{2B} - \delta_1 |\eta|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} + +F_1 |\gamma|_B^{2B} + F_1 |\gamma|_B^{2b_0} \beta^{2B-2b_0} \right\}. \qquad (16)$$

З рівності (10) та оцінок (12), (15) і (16) одержуємо

$$|Q(t,\tau,((\eta_1 + i\gamma_1)(t-\tau)^{-m_1/(2b_0)}, ..., (\eta_n + i\gamma_n)(t-\tau)^{-m_n/(2b_0)}))| \leq$$

$$C \exp\left\{ -\delta_1 |\eta|_B^{2B} (t-\tau)^{1-B/b_0} - \delta_1 |\eta|_B^{2b_0} + F_1 |\gamma|_B^{2B} (t-\tau)^{1-B/b_0} + F_1 |\gamma|_B^{2b_0} \right\} \leq$$

$$\leq C \exp\left\{ -\delta_1 |\eta|_B^{2b_0} + F_1 |\gamma|_B^{2B} \right\}.$$

З останньої оцінки, формули (6) і леми 1.1 з [4, с.36] випливає правильність твердження 2. $\square$

Твердження 3. *Нехай коефіцієнти $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{||k||\leq 2B} a_k D_x^k u(t,x), \quad (t,x)\in \Pi_m, \tag{17}$$

сталі і дійсні частини λ-коренів рівняння $\det\Big(\sum_{||k||\leq 2B} a_k\sigma^k - \lambda I\Big) = 0$ не дорівнюють нулеві ні при яких $\sigma\in\mathbb{R}^n$. Тоді система (17) задовольняє $\Lambda_d^{m,\infty}$-умову з $d<0, m\in\{1,2\}$ і $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}, j\in\{1,...,n\}$.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$\det\left(\sum_{||k||\leq 2B} a_k\sigma^k\beta^{2B-||k||} - \lambda I\right) = 0.$$

Його корені $\lambda(\sigma,\beta)$ є узагальнено однорідними функціями степеня $2B$ від σ,β, тобто для будь-яких $\mu>0, \sigma\in\mathbb{R}^n$ і $\beta\in\mathbb{R}$ правильна рівність $\lambda((\mu^{m_1}\sigma_1,...,\mu^{m_n}\sigma_n),\mu\beta) = \mu^{2B}\lambda(\sigma,\beta)$. При $|\sigma|_B^2+\beta^2 = 1$ вони задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda(\sigma,\beta) < -\delta$. Для $\beta = 0$ від'ємність $\operatorname{Re}\lambda(\sigma,\beta)$ випливає з умови $\overrightarrow{2b}$-параболічності, а дорівнювати нулеві $\operatorname{Re}\lambda(\sigma,\beta)$ не може за припущенням.

Розглянемо систему звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{||k||\leq 2B} a_k\sigma^k v, \tag{18}$$

яка відповідає системі (17), і допоміжну систему

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{||k||\leq 2B} a_k\sigma^k\beta^{2B-||k||} w. \tag{19}$$

Оскільки остання є двоїстою щодо перетворення Фур'є системою для $(2b_1,...,2b_n,2B)$-параболічної системи, яка містить лише старшу групу членів, то для нормальної ФМР W системи (19) справджується нерівність

$$|W(t-\tau,\eta+i\gamma,\beta)| \leq C\exp\Big\{(-\delta_1|\eta|_B^{2B} + F|\gamma|_B^{2B} - \delta_1\beta^{2B})(t-\tau)\Big\}.$$

Зауваживши, що $W(t-\tau,\eta+i\gamma,1) = Q(t,\tau,\eta+i\gamma)$, де Q — нормальна ФМР системи (18), за допомогою формули (6) і леми 1.1 з [4, с.36], доведемо правильність $\Lambda_d^{m,\infty}$-умови з $d<0$. □

Твердження 4. *Якщо коефіцієнти системи*

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{||k||\leq 2B} a_k(t) D_x^k u(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_m, \tag{20}$$

є неперервними й обмеженими функціями в H_m та існує стала $\delta_0>0$ така, що для довільних $t\in H_m, \sigma\in\mathbb{R}^n, \beta\in\mathbb{R}$ і $\eta\in\mathbb{C}^N$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{||k||+k_{n+1}=2B} a_k(t)\sigma^k\beta^{k_n+1}\eta,\eta\right) \leq -\delta_0\left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^{2b_j} + \beta^{2B}\right)|\eta|^2,$$

то ця система задовольняє $\Lambda_d^{m,\infty}$-умову з $d<0, m\in\{1,2\}$ і $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}, j\in\{1,...,n\}$.

Доведення. Розглянемо систему звичайних диференційних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{||k|| \le 2B} a_k(t)\sigma^k v,$$

яка відповідає системі (20), і допоміжну систему

$$\frac{dw}{dt} = \sum_{||k|| \le 2B} a_k(t)\sigma^k \beta^{k_{n+1}} w. \tag{21}$$

Система (21) відповідає $(2b_1, ..., 2b_n, 2B)$ -параболічній системі, для якої виконуються умови з твердження 1 і яка містить лише старшу групу членів. Тому для доведення твердження 4 далі використовується методика з тверджень 1 і 3. □

Твердження 5. *Нехай для системи (20) виконуються такі умови:*

а) коефіцієнти $a_k, ||k|| \le 2B$, є неперервними й обмеженими в H_m;

б) існують числа $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$ і $R > 0$ такі, що для будь-яких $k \in Z_+^n$, $||k|| \le 2B$, $\{t', t''\} \subset H_m$, $|t'| \ge R$ і $|t''| \ge R$, $|t' - t''| < \Delta$, справджуються нерівності

$$|a_k(t') - a_k(t'')| < \varepsilon;$$

в) λ-корені рівняння $\det\Big(\sum_{||k||+k_{n+1}=2B} a_k(t)\sigma^k\beta^{k_{n+1}} - \lambda I\Big) = 0$ задовольняють умову

$$\operatorname{Re}\lambda(t, \sigma, \beta) < -\delta_0, \ \delta_0 > 0,$$

для довільних $t \in H_m, \sigma \in \mathbb{R}^n$ і $\beta \in \mathbb{R}$ таких, що $\sigma_1^{2b_1} + ... + \sigma_n^{2b_n} + \beta^{2B} = 1$.

Тоді система (20) задовольняє $\Lambda_d^{m,\infty}$-умову з $d < 0, m \in \{1, 2\}$ і $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}, j \in \{1, ..., n\}$.

Доведення проведемо для $m = 1$, у випадку $m = 2$ воно подібне. Одержимо оцінку нормальної ФМР $Q(t, \tau, s)$, $t \ge \tau \ge 0$, $s \equiv \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n$, двоїстої для (20) системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{||k|| \le 2B} a_k(t) s^k v.$$

За допомогою міркувань з доведення твердження 3 та умови в), вибравши досить малим ε і використавши методику з [8, гл.2, §1], прийдемо до нерівностей

$$\begin{gathered} |Q(t, t_1, s)| \le C\exp\Big\{\Big(-\delta_1|\sigma|_B^{2B} + F|\gamma|_B^{2B} - \delta_1\Big)(t - t_j)\Big\}|Q(t_j, t_1, s)|, \\ t \in [t_j, t_{j+1}], \quad s \in \mathbb{C}^n, \end{gathered} \tag{22}$$

де $j \ge 1$, $t_1 \ge R$, $t_j \equiv t_1 + (j-1)\Delta$, $0 < \delta_1 < \delta_0$, $C > 0$ і $F > 0$. Візьмемо $\Delta = \frac{2}{\delta_1}\ln C$ і доведемо правильність для $j \ge 1$ оцінки

$$\begin{gathered} |Q(t, t_1, s)| \le C\exp\Big\{-\frac{\delta_1}{2}(t - t_j) - \frac{\delta_1}{2}(t - t_1) + \\ +\Big(-\delta_1|\sigma|_B^{2B} + F|\gamma|_B^{2B}\Big)(t - t_1)\Big\}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \ s \in \mathbb{C}^n. \end{gathered} \tag{23}$$

Скористаємось методом математичної індукції. Для $j = 1$ оцінка (23) безпосередньо випливає з (22). Нехай оцінка (23) справджується для $j = l-1 > 1$, тоді вона правильна для $j = l$. Справді, за допомогою (22) і припущення маємо

$$|Q(t, t_1, s)| \le C \exp\Big\{ \Big(-\delta_1|\sigma|_B^{2B} + F|\gamma|_B^{2B} - \delta_1\Big)(t - t_l)\times$$

$$\times C \exp\Big\{ -\frac{\delta_1}{2}\Delta - \frac{\delta_1}{2}(t_l - t_1) + \Big(-\delta_1|\sigma|_B^{2B} + F|\gamma|_B^{2B}\Big)(t_l - t_1)\Big\} =$$

$$= C^2 \exp\Big\{ -\frac{\delta_1}{2}\Delta - \frac{\delta_1}{2}(t-t_l) - \frac{\delta_1}{2}(t-t_1) + \Big(-\delta_1|\sigma|_B^{2B} + F|\gamma|_B^{2B}\Big)(t-t_1)\Big\}, \quad t \in [t_l, t_{l+1}],\ s \in \mathbb{C}^n.$$

Оскільки, згідно з вибором Δ, $C \exp\{-\frac{\delta_1}{2}\Delta\} = 1$, то звідси одержуємо оцінку (23) для $j = l$. З оцінок (23) для $j \ge 1$ випливає оцінка

$$|Q(t, \tau, s)| \le C \exp\Big\{ \Big(-\frac{\delta_1}{2} - \delta_1|\sigma|_B^{2B} + F|\gamma|_B^{2B}\Big)(t - \tau)\Big\}, \quad s \in \mathbb{C}^n, \tag{24}$$

для будь-яких t і τ таких, що $R \le \tau \le t$. Оцінка (24) для $0 \le \tau \le t \le R$ доведена у [8, гл.2, §1]. Врахувавши все це, а також рівність

$$Q(t, \tau, s) = Q(t, R, s)Q(R, \tau, s)$$

для $\tau \in [0, R)$ і $t \ge R$, одержимо оцінку (24) для будь-яких t і τ таких, що $0 \le \tau \le t$. З цієї оцінки і формули (6) на підставі леми 1.1 з [4, с.36] випливає, як і в попередніх твердженнях, виконання $\Lambda_d^{1,\infty}$-умови з $d < 0$. □

Твердження 6. *Розглянемо $\overrightarrow{2b}$-параболічну систему з комплексним параметром λ і коефіцієнтами, залежними від усіх змінних, вигляду*

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{||k|| \le 2B} a_k(t, x) D_x^k u(t, x) - \lambda u(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_m. \tag{25}$$

Нехай система

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{||k|| \le 2B} a_k(t, x) D_x^k u(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_m, \tag{26}$$

рівномірно $\overrightarrow{2b}$ -параболічна в $\overline{\Pi}_m$, її коефіцієнти разом з похідними $\partial_x^h a_k$, $||k|| \le 2B$, $||h|| \le p$, в $\overline{\Pi}_m$ неперевні за t, обмежені й задовольняють рівномірну умову Гельдера за x, причому неперервність за t коефіцієнтів a_k, $||k|| = 2B$, рівномірна щодо x з $\mathbb{R}^n$. Тоді система (25) задовольняє $\Lambda_d^{m,2B+p}$-умову з $d \in \mathbb{R}$, $m \in \{1, 2\}$ і $\alpha_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $j \in \{1, ..., n\}$.

Доведення. За умов цього твердження ФМР Z задачі Коші для системи (26) існує і для неї справджуються оцінки

$$|D_x^k Z(t, x; \tau, \xi)| \le C_k (t - \tau)^{-(M+||k||)/(2B)} \exp\Big\{ d_0(t - \tau) - c\sum_{j=1}^n (t - \tau)^{1-q_j}|x_j - \xi_j|^{q_j}\Big\},$$

$$\{t, \tau\} \subset H_m,\ \tau < t,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$||k|| \le 2B + p, \tag{27}$$

де $M \equiv \sum_{j=1}^n m_j,\ c > 0,\ d_0 > 0.$

Очевидно, що матриця

$$\tilde{Z}(t,x;\tau,\xi) \equiv Z(t,x;\tau,\xi)\exp\{-\lambda(t-\tau)\},$$
$$\{t,\tau\} \subset H_m,\ \tau < t,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{28}$$

є ФМР задачі Коші для системи (25).

Із (27) і (28) випливає, що система (25) задовольняє $\Lambda_0^{m,2B+p}$-умову при $\operatorname{Re}\lambda = d_0$, $\Lambda_d^{m,2B+p}$-умову з $d < 0$, якщо $\operatorname{Re}\lambda > d_0$, і $\Lambda_d^{m,2B+p}$-умову з $d > 0$ при $\operatorname{Re}\lambda < d_0$.

Отже, для доведення твердження 6 досить встановити оцінки (27). На підставі результатів з [8], за зроблених припущень щодо коефіцієнтів системи (26), для ФМР Z правильні оцінки

$$|D_x^k Z(t,x;\tau,\xi)| \le C_k^0 (t-\tau)^{-(M+\|k\|)/(2B)} \exp\left\{-c\sum_{j=1}^n (t-\tau)^{1-q_j}|x_j-\xi_j|^{q_j}\right\},$$
$$\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\| \le 2B+p, \tag{29}$$

для t і τ таких, що $t_0 \le \tau < t \le t_0 + T$ у випадку $m = 1$ і $t_0 - T_0 \le \tau < t \le t_0$, якщо $m = 2$. Тут T_0 – довільне додатне число, а t_0 – будь-яке число з інтервалу $[0,\infty)$ для $m = 1$ і з інтервалу $(-\infty, T]$ для $m = 2$. Сталі C_k^0 з оцінок (29) залежать від T_0. Якщо ретельно проаналізувати виведення у [8] цих оцінок, то можна переконатись, що $C_k^0 = C_k \exp\{d_0 T_0\}$, де C_k і d_0 – додатні сталі, які не залежать ні від T_0, ні від t_0. Звідси й випливає правильність оцінок (27). $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Эйдельман С. Д. *Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения* // Мат. сб. – 1953. – Т.33, №2. – С.359–382.
2. Эйдельман С. Д. *О фундаментальных решениях параболических систем* // Мат. сб. – 1956. – Т.38, №1. – С.51–92.
3. Эйдельман С. Д. *Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем* // Мат. сб. – 1958. – Т.44, №4. – С.481–508.
4. Эйдельман С. Д. *Параболические системы.* – М.: Наука, 1964. – 443 с.
5. Івасишин Л. М. *Оцінка матриць Гріна задачі Коші для загальних параболічних за Петровським систем у півпросторі* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ *та їх застосування* // Всеукр. наук. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (15—19 вересня 1997 р., м.Дрогобич): Тези доп. – Київ, 1997. – С.50.
6. Івасишин Л. М. *Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних систем високого порядку по часовій змінній у півпросторі* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ // Доп. НАН України. – 1998. – №1. – С.17–23.
7. Эйдельман С. Д. *Об одном классе параболических систем* // ДАН СССР. – 1960. – Т.133, №1. – С.40–43.
8. Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д. $\overrightarrow{2b}$*-параболические системы* // Тр. семинара по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С.3–175.
9. Матійчук М. І. *Фундаментальні матриці розв'язків загальних* $\overrightarrow{2b}$*- параболічних і* $\overrightarrow{2b}$*-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера* // Доп. АН УРСР. – 1964. – №8. – С.1010–1014.

10. Федорук В. В. *О связи между фундаментальными матрицами решений* $\overrightarrow{2b}$*-параболической и* $\overrightarrow{2b}$*-эллиптической систем* // Тезисы XX научной сессии ЧГУ. Секция мат.наук. – Черновцы, 1964. – С.52–53.

11. Мартыненко М.Д., Бойко Л.Ф. $\overrightarrow{2b}$*-параболические граничные задачи* // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т.14, №12. – С.2212–2222.

12. Балабушенко Т.М. *Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для* $\overrightarrow{2b}$*-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування* // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 2000. – №411. – С.6–11.

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича

Надійшло 1.12.2001