УДК 517.95

В. П. Кушнір

АБСОЛЮТНА ЕКСПОНЕНЦІЙНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОДНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

V. P. Kushnir. *The absolute exponential stability of solutions of linear parabolic differential equations with one delay*, Matematychni Studii, **17** (2002) 153–162.

Necessary and sufficient conditions for absolute exponential stability of solutions of linear parabolic differential equations with one delay in pair of norms are founded.

В. П. Кушнир. *Абсолютная экспоненциальная устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений с одним запаздыванием* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.153–162.

Найдены необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных параболических дифференциальных уравнений с одним запаздыванием в паре норм.

Стійкість розв'язків звичайних диференційних рівнянь із загаюваннями вивчена достатньо добре (див., наприклад, [1–9]). Подібне питання для рівнянь з частинними похідними вивчено в меншій мірі. Це обумовлено труднощами технічного характеру, висвітленими в [9].

Тематиці, вказаній у назві, вже присвячені статті [10], [11]. У них отримані необхідні і достатні умови абсолютної експоненційної стійкості за різними парами норм розв'язків цих рівнянь.

Метою цієї статті є доведення того факту, що ці ж умови є необхідними і достатніми для абсолютної експоненційної стійкості розв'язків цих рівнянь за іншою парою норм.

Розглянемо змішану задачу для рівняння теплопровідності із загаюванням

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2}, & t>0, x\in[0,\pi]; \\ u(x,t)=\varphi(x,t), & (x,t)\in[0,\pi]\times[-\tau,0]; \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\ge -\tau, \end{cases} \tag{1}$$

де a і b — дійсні сталі, $\tau = const \ge 0$.

Нехай розв'язок задачі (1) існує і є при кожному t функцією з $L_2(0,\pi)$. Його можна шукати методом Фур'є у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx, \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35B35.

де $T_n(t)$ — розв'язки звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням

$$T_n'(t) + an^2 T_n(t) + bn^2 T_n(t-\tau) = 0, \quad t > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

які задовольняють початкові умови

$$T_n(t) = \psi_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x,t) \sin nx \, \mathrm{d}x, \quad t \in [-\tau, 0].$$

Рівнянням (3) відповідають характеристичні квазіполіноми

$$h_n(s) = s + an^2 + bn^2 e^{-\tau s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Методом, описаним у [12], можна розглядати $\varphi(x,t)$ і $u(x,t)$, як функції $\varphi(t)$ і $u(t)$, визначені при $t \geq -\tau$ із значеннями в $L_2(0,\pi)$ і одночасно в енергетичному просторі H_A оператора A, де дія оператора A на функціях $v(x) \in L_2(0,\pi)$, які задовольняють умову $v(0) = v(\pi) = 0$, визначається рівністю

$$Av = -\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}.$$

Означення 1. Функцію $v^{(k)}(x)$ назвемо *узагальненою похідною k-го порядку* по змінній x від функції $v(x)$ в області $(0,\pi)$, якщо для будь-якої $\psi(x) \in C^2([0,\pi])$ такої, що $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(\pi) = 0$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, виконується рівність

$$\int_0^\pi v\psi^{(k)} \, \mathrm{d}x = (-1)^k \int_0^\pi v^{(k)}\psi \, \mathrm{d}x.$$

Згідно з [12], до енергетичного простору H_A належать ті функції з $L_2(0,\pi)$, які мають в інтервалі $(0,\pi)$ узагальнену похідну з $L_2(0,\pi)$ і дорівнюють нулю на кінцях цього інтервалу.

Задача (1) тепер зведена до задач

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + aAu(t) + bAu(t-\tau) = 0, \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{5}$$

Припустимо, що ця задача має розв'язок. Домножимо обидві частини рівняння (4) скалярно в просторі $L_2(0,\pi)$ на будь-яку функцію $\eta(t)$ із значеннями в H_A. Використовуючи позначення енергетичного добутку

$$[v,w] = \int_0^\pi v'(x)w'(x) \, \mathrm{d}x, \quad \{v,w\} \subset H_A,$$

отримаємо

$$\left(\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}, \eta(t)\right) + a[u(t), \eta(t)] + b[u(t-\tau), \eta(t)] = 0. \tag{6}$$

Означення 2. Функцію $u(t)$ назвемо *узагальненим розв'язком задачі* (1), якщо:

1) $u(t) \in C\Big([0,+\infty); H_A\Big) \cap C^1\Big((0,+\infty); L_2(0,\pi)\Big)$;
2) $u(t)$ задовольняє (5), (6) при будь-якому $t > 0$ і будь-якій функції $\eta(t)$ із значеннями в H_A;
3) $u(t)$ задовольняє початкову умову, тобто

$$\|u(t) - \varphi(t)\|_{L_2(0,\pi)} = 0, \quad t \in [-\tau, 0].$$

Зауваження 1. Узагальнений розв'язок $u(t)$ є також класичним, якщо $u(t) \in D(A)$ при будь-якому $t > 0$ і, якщо $u(x,t) \longrightarrow \varphi(x,0)$ при $t \to 0$ рівномірно на $[0,\pi]$.

Зауваження 2. Єдиність узагальненого розв'язку задачі (1) випливає з того, що її можна розглядати, як неоднорідну задачу по кроках, для якої єдиність доведена в [12].

Теорема. *Нехай існує* $\varphi''_{x^2} \in C^1\Big([-\tau,0]; L_2(0,\pi)\Big)$ *і виконується умова*

$$|b| < a. \tag{7}$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1) у вигляді ряду (2).

Умова (7) є необхідною і достатньою для абсолютної експоненційної стійкості нульового розв'язку задачі (1) за парою норм, а саме для будь-яких $\tau > 0$ і функції $\varphi(x,t)$, що задовольняє умову теореми, існують такі $\varepsilon > 0$, $K > 0$, що для розв'язку задачі (1) при всіх $t > 0$ виконується оцінка

$$\sqrt{\int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{\pi} u^2(x,\theta+t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta} \le$$

$$\le Ke^{-\varepsilon t}\left(\sqrt{\int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{\pi} \varphi^2(x,\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta} + \sqrt{\int_{0}^{\pi} \varphi^2(x,0)\,\mathrm{d}x}\right), \quad t > 0.$$

Зауваження 3. В теоремі відрізок $[0,\pi]$ лінійною заміною можна перетворити у будь-який інший відрізок.

Доведення. Подібно до того, як це робиться в [12], при виконанні (7), використавши оцінку для $T_n^2(t)$, отриману в [10], а саме

$$\exists \varepsilon > 0\, \exists K > 0 : T_n^2(t) \le K^2 e^{-2\varepsilon t}\left(\psi_n^2(0) + n^2 \int_{-\tau}^{0} \psi_n^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right),$$

можна довести, що ряд (2) справді є узагальненим розв'язком задачі (1).
Необхідність. У статті [10] доведено, що виконання умови (7) є необхідним і достатнім для того, щоб існувало таке $\varepsilon > 0$, що $\{s\colon h_n(s) = 0\} \subset \{z\colon \mathrm{Re}\, z < -\varepsilon\}$ при $n \in \mathbb{N}$, що є необхідним для виконання умов теореми.

Достатність. Нехай виконується (7). Розв'язки рівнянь (6), згідно з [1], можна подати у вигляді

$$T_n(t) = \psi_n(0)k_n(t) - bn^2 \int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n(\theta)k_n(t-\theta-\tau)\,\mathrm{d}\theta, \quad t > 0, \tag{8}$$

де функція $k_n(t)$ є розв'язком рівняння (3) з початковою умовою

$$k_n(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Далі її можна знайти методом кроків у вигляді

$$k_n(t) = \sum_{k=0}^{[t/\tau]} \left(-\frac{b}{a}\right)^k \cdot \frac{\left(an^2(t-k\tau)\right)^k}{k!} \cdot e^{-an^2(t-k\tau)}, \quad t > 0,$$

чи у вигляді

$$k_n(t) = \sum_{k=0}^{[t/\tau]} \frac{(b/a)^k}{k!} \cdot \left(e^{-an^2 y(t-k\tau)}\right)\Big|_{y=1}^{(k)}, \quad t > 0. \tag{9}$$

Позначимо

$$d_{nl} = \frac{2}{\tau} \int\limits_{t-\tau}^{t} T_n(\theta)\cos\frac{l\pi\theta}{\tau}\,\mathrm{d}\theta.$$

Враховуючи (8), отримаємо

$$d_{nl} = \frac{2\psi_n(0)}{\tau} \int\limits_{t-\tau}^{t} k_n(\theta)\cos\frac{l\pi\theta}{\tau}\,\mathrm{d}\theta - \frac{2bn^2}{\tau} \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n(\theta)k_n(t_1-\theta-\tau)\,\mathrm{d}\theta \cos\frac{l\pi t_1}{\tau}\,\mathrm{d}t_1. \tag{10}$$

Оцінимо спочатку другий інтеграл з формули (10) при

$$t = p\tau, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

$$I_{2nl} = \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n(\theta)k_n(t_1-\theta-\tau)\,\mathrm{d}\theta \cos\frac{l\pi t_1}{\tau}\,\mathrm{d}t_1 =$$

$$= \operatorname{Re} e \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n(\theta)k_n(t_1-\theta-\tau)\,\mathrm{d}\theta e^{il\pi t_1/\tau}\,\mathrm{d}t_1.$$

Зробимо підстановку $w = t_1 - \tau - \theta$, $\mathrm{d}w = \mathrm{d}t_1$. Тоді

$$I_{2nl} = (-1)^l \operatorname{Re} e \int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n(\theta)e^{il\pi\theta/\tau} \int\limits_{t-2\tau-\theta}^{t-\tau-\theta} k_n(w)e^{il\pi w/\tau}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\theta.$$

Розіб'ємо внутрішній інтеграл по полю $w = t - \tau$ на два і зробимо в них підстановки $z_1 = w - t + 2\tau$ та $z_2 = w - t + \tau$ відповідно

$$I_v \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{t-2\tau-\theta}^{t-\tau-\theta} k_n(w) e^{il\pi w/\tau}\, \mathrm{d}w = \int\limits_{t-2\tau-\theta}^{t-\tau} k_n(w) e^{il\pi w/\tau}\, \mathrm{d}w + \int\limits_{t-\tau}^{t-\tau-\theta} k_n(w) e^{il\pi w/\tau}\, \mathrm{d}w =$$

$$= \int\limits_{-\theta}^{\tau} k_n(t - 2\tau + z_1) e^{il\pi(t-2\tau+z_1)/\tau}\, \mathrm{d}z_1 + \int\limits_{0}^{-\theta} k_n(t - \tau + z_2) e^{il\pi(t-\tau+z_2)/\tau}\, \mathrm{d}z_2.$$

Підставимо $k_n(t)$ із (9) і проінтегруємо, врахувавши (11). Отримуємо

$$I_v = \sum_{k=0}^{p-2} \frac{(b/a)^k}{k!} \left(\frac{e^{-an^2 y(p-1-k)\tau + il(p-1)\pi} - e^{-an^2 y((p-2-k)\tau - \theta) + il(p-2-\theta/\tau)\pi}}{-an^2 y + il\pi/\tau} \right) \Bigg|_{y=1}^{(k)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(b/a)^k}{k!} \left(\frac{e^{-an^2 y((p-1-k)\tau - \theta) + il(p-1-\theta/\tau)\pi} - e^{-an^2 y(p-1-k)\tau + il(p-1)\pi}}{-an^2 y + il\pi/\tau} \right) \Bigg|_{y=1}^{(k)}.$$

Перегрупуємо доданки в I_v

$$I_v = (-1)^{l(p-1)} e^{-il\pi\theta/\tau} \left(\frac{(b/a)^{(p-1)}}{(p-1)!} \left(\frac{e^{an^2 y\theta} - e^{il\pi\theta/\tau}}{-an^2 y + il\pi/\tau} \right) \Bigg|_{y=1}^{(p-1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{p-2} \frac{(b/a)^k}{k!} \left(\frac{e^{-an^2 y((p-1-k)\tau - \theta)} - (-1)^l e^{-an^2 y((p-2-k)\tau - \theta)}}{-an^2 y + il\pi/\tau} \right) \Bigg|_{y=1}^{(k)} \right). \qquad (12)$$

Знайдемо в (12) похідні по y, залишивши їх біля $e^{an^2 y\theta}$, і приймемо $y = 1$. Отримаємо

$$I_v = (-1)^{l(p-1)} e^{-il\pi\theta/\tau} \left[(b/a)^{(p-1)} \left(\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\left(an^2\right)^{p-1-j}}{j! \left(-an^2 + il\pi/\tau\right)^{p-j}} \left(e^{an^2 y\theta} \right) \Bigg|_{y=1}^{(j)} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{\left(an^2\right)^{p-1}}{\left(-an^2 + il\pi/\tau\right)^p} e^{il\pi\theta/\tau} \right) + \sum_{k=0}^{p-2} (b/a)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\left(an^2\right)^{k-j}}{j! \left(-an^2 + il\pi/\tau\right)^{k-j+1}} \times$$

$$\left. \times \left(e^{-an^2 y((p-1-k)\tau - \theta)} - (-1)^l e^{-an^2 y((p-2-k)\tau - \theta)} \right) \Bigg|_{y=1}^{(j)} \right].$$

Оцінимо

$$\left|I_{2nrj}\right| \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n(\theta)\Big(e^{-an^2y(r\tau-\theta)}\Big)^{(j)}_{y=1} \mathrm{d}\theta \le$$

$$\le \left(\int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \cdot \int\limits_{-\tau}^{0} \big(an^2(r\tau-\theta)\big)^{2j} e^{-2an^2(r\tau-\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}.$$

Тепер обчислимо інтеграл

$$\int\limits_{-\tau}^{0} \big(an^2(r\tau-\theta)\big)^{2j} e^{-2an^2(r\tau-\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \left.\left(\int\limits_{-\tau}^{0} e^{-yan^2(r\tau-\theta)}\,\mathrm{d}\theta\right)\right|^{(2j)}_{x=2} =$$

$$= \frac{1}{2an^2}\sum_{m=0}^{2j} 2^{m-2j}\frac{(2j)!}{m!}\Big(\big(an^2r\tau\big)^m e^{-2an^2r\tau} - \big(an^2(r+1)\tau\big)^m e^{-2an^2(r+1)\tau}\Big).$$

Отже,

$$I_{2nl} = (-1)^{lp}\,\mathrm{Re}\,e\left[\frac{(b/a)^{p-1}\big(an^2\big)^{p-1}}{\big(-an^2+il\pi/\tau\big)^p}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\left(\frac{il\pi}{an^2\tau}-1\right)^j\frac{I_{2n0j}}{j!} - \Psi_{nl}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{p-2}\left(\frac{b}{a}\right)^k\frac{\big(an^2\big)^k}{\big(-an^2+il\pi/\tau\big)^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{il\pi}{an^2\tau}-1\right)^j\frac{I_{2n(p-1-k)j}-(-1)^l I_{2n(p-2-k)j}}{j!}\right],$$

де

$$\Psi_{nl} \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n(\theta)e^{il\pi\theta/\tau}\,\mathrm{d}\theta \overset{\mathrm{def}}{=} A_{nl}+iB_{nl}.$$

Позначимо

$$\|\psi_n\| = \left(\int\limits_{-\tau}^{0} \psi_n^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2}.$$

Далі маємо

$$\left|I_{2nl}\right| \le \frac{1}{\left|an^2+il\pi/\tau\right|}\left[\frac{\left|b/a\right|^{p-1}\big(|A_{nl}|+|B_{nl}|\big)}{\left|1+il\pi/\big(an^2\tau\big)\right|^p}+\right.$$

$$+\frac{\left|b/a\right|^{p-1}\|\psi_n\|}{\sqrt{2an}}\sum_{j=0}^{p-1}\left|1+\frac{il\pi}{an^2\tau}\right|^{1+j-p}\left(\frac{(2j)!}{(2^j j!)^2}\left(1+\sum_{m=0}^{2j}\frac{\big(2an^2\tau\big)^m}{m!}e^{-2an^2\tau}\right)\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{\|\psi_n\|}{\sqrt{2a}n}\sum_{k=0}\left|\frac{b}{a}\right|^{k}\sum_{j=0}\left|1+\frac{il\pi}{an^2\tau}\right|^{j-k}\left(\frac{(2j)!}{(2^j j!)^2}\sum_{m=0}\frac{1}{m!}\Big(\big(2an^2(p-k)\tau\big)^m e^{-2an^2(p-k)\tau}+\right.$$

$$\left.\left.+2\big(2an^2(p-1-k)\tau\big)^m e^{-2an^2(p-1-k)\tau}+\big(2an^2(p-k-2)\tau\big)^m e^{-2an^2(p-k-2)\tau}\Big)\right)^{1/2}\right].$$

Оцінимо окремо три доданки правої частини попередньої формули, які позначимо S_{1l}, S_{2l} та S_{3l}:

$$S_{1l}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\left|an^2+il\pi/\tau\right|}\frac{\left|b/a\right|^{p-1}\big(|A_{nl}|+|B_{nl}|\big)}{\left|1+il\pi/\big(an^2\tau\big)\right|^p}\le$$

$$\le\left|\frac{b}{a}\right|^{p-1}\frac{|A_{nl}|+|B_{nl}|}{an^2}\le C_1e^{-\alpha_1 p}\frac{|A_{nl}|+|B_{nl}|}{n^2} \qquad (13)$$

при деяких $C_1>0$ і $\alpha_1>0$ (врахована умова 7);

$$S_{2l}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\left|an^2+il\pi/\tau\right|}\frac{\left|b/a\right|^{p-1}\|\psi_n\|}{\sqrt{2a}\cdot n}\sum_{j=0}^{p-1}\left|1+\frac{il\pi}{an^2\tau}\right|^{1+j-p}\times$$

$$\times\left(\frac{(2j)!}{(2^j j!)^2}\left(1+\sum_{m=0}^{2j}\frac{\big(2an^2\tau\big)^m}{m!}e^{-2an^2\tau}\right)\right)^{1/2}\le$$

$$\le\left|\frac{b}{a}\right|^{p-1}\frac{\|\psi_n\|\sqrt{\pi p^3}}{\sqrt{a}\cdot n\sqrt{\big(an^2\big)^2+\big(l\pi/\tau\big)^2}}\le C_2e^{-\alpha_2 p}\frac{\|\psi_n\|}{n\sqrt{\big(an^2\big)^2+\big(l\pi/\tau\big)^2}} \qquad (14)$$

при деяких $C_2>0$ і $\alpha_2>0$.

Нехай $k_0=[a\tau(p-2)/(1+a)]$. Оскільки $\lambda^m/(m!e^{\lambda})$ зростає при зростанні m, поки $m<\lambda$, то при $k\le k_0$ останній доданок внутрішньої суми S_{3l} є найбільшим, тому вона не перевищує його добутку на кількість доданків. Розіб'ємо зовнішню суму S_{3l} на два доданки D_1 та D_2 із сумуванням до k_0 та від k_0+1 відповідно і оцінимо їх:

$$D_1\le\sum_{k=0}^{k_0}\left|\frac{b}{a}\right|^k\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{(2j)!}{(2^j j!)^2}\frac{2j+1}{(2j)!}\cdot 4\big(2an^2(p-k)\tau\big)^{2j}e^{-2an^2(p-k)\tau}\right)^{1/2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{k_0}\left|\frac{b}{a}\right|^k\sum_{j=0}^{k}\frac{2\sqrt{2j+1}}{j!}\big(an^2(p-k)\tau\big)^j e^{-an^2(p-k)\tau}\le$$

$$=\sum_{k=0}^{k_0}\left|\frac{b}{a}\right|^k\cdot 2\sqrt{2k+1}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\big(an^2(p-k)\tau\big)^j e^{-an^2(p-k)\tau}.$$

Доданки останньої суми зростають при $k > (\ldots|b|)^{\ldots}$. Тому

$$D_1 \leq (k_0+1)\left|\frac{b}{a}\right|^{k_0} \frac{2\sqrt{2k_0+1}(k_0+1)}{k_0!}\big(an^2(p-k_0)\tau\big)^{k_0} e^{-an^2(p-k_0)\tau} \leq$$

$$\leq (k_0+1)\left|\frac{b}{a}\right|^{k_0} 2\sqrt{2k_0+1}(k_0+1) \leq C_{31}e^{-\alpha_{31}p}$$

при деяких $C_{31} > 0$ і $\alpha_{31} > 0$.

Тепер оцінимо другий доданок

$$D_2 \leq \sum_{k_0+1}^{p-2}\left|\frac{b}{a}\right|^k \sum_{j=0}^{k} 4\sqrt{\pi j(2j+1)} \leq 8\sqrt{\pi}\sum_{k_0+1}^{p-2}\left|\frac{b}{a}\right|^k (k+1)^2 \leq C_{32}e^{-\alpha_{32}p}$$

при деяких $C_{32} > 0$ і $\alpha_{32} > 0$.

Тому при деяких $C_3 > 0$ і $\alpha_3 > 0$

$$S_{3l} < C_3 e^{-\alpha_3 p}\frac{\|\psi_n\|}{n\cdot\sqrt{\big(an^2\big)^2+\big(l\pi/\tau\big)^2}}. \tag{15}$$

Враховуючи (13), (14), (15), маємо при деяких $C_4 > 0$ і $\alpha_4 > 0$

$$\sum_{l=1}^{\infty} I_{2nl}^2 \leq 3\sum_{l=1}^{\infty}\big(S_{1l}^2+S_{2l}^2+S_{3l}^2\big) \leq \frac{\|\psi_n\|^2}{n^4}C_4^2 e^{-2\alpha_4 p}. \tag{16}$$

Тепер при виконанні (11) оцінимо перший інтеграл з формули (10)

$$I_{1nl} = \int\limits_{t-\tau}^{t} k_n(\theta)\cos\frac{l\pi\theta}{\tau}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\, e\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(b/a)^k}{k!}\left(\int\limits_{t-\tau}^{t} e^{-an^2y(\theta-k\tau)+il\pi\theta/\tau}\,\mathrm{d}\theta\right)\Bigg|_{y=1}^{(k)} =$$

$$= (-1)^{lp}\,\mathrm{Re}\, e\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(b/a)^k}{k!}\left[\Big(-an^2y+il\pi/\tau\Big)^{-1}\Big(e^{-an^2y(p-k)\tau} - (-1)^l e^{-an^2y(p-k-1)\tau}\Big)\right]\Bigg|_{y=1}^{(k)} =$$

$$= (-1)^{lp}\,\mathrm{Re}\, e\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{b}{a}\right)^k\sum_{j=0}^{k}\frac{\big(-1+il\pi/(an^2\tau)\big)^{j-k}}{j!\,(-an^2+il\pi/\tau)}\Big(\big(-an^2(p-k)\tau\big)^j e^{-an^2(p-k)\tau} -$$

$$-(-1)^l\big(-an^2(p-k-1)\tau\big)^j e^{-an^2(p-k-1)\tau}\Big).$$

Далі, оцінюючи I_{1nl} подібно, як суму S_{3l}, отримуємо

$$\sum_{l=1}^{\infty} I_{1nl}^2 \leq \frac{\psi_n^2(0)}{n^2}C_5 e^{-2\alpha_5 p}$$

при деяких $C_5 > 0$ і $\alpha_5 > 0$.

Тоді при деяких $C > 0$ і $\alpha > 0$

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_{nl}^2 \le 2\sum_{l=1}^{\infty} I_{1nl}^2 + 2b^2n^4 \sum_{l=1}^{\infty} I_{2nl}^2 \le C^2 e^{-2\alpha p}\left(\frac{\psi_n^2(0)}{n^2} + \|\psi_n\|^2\right).$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} d_{nl}^2 \le C^2 e^{-2\alpha p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n^2(0)}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_n\|^2\right).$$

Але

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n^2(0)}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\int\limits_0^{x}\varphi(y,0)\,\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}x$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n^2(0)}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^2(0) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\varphi^2(x,0)\,\mathrm{d}x,$$

що доводить теорему при виконанні умови (11).

Нехай (11) не виконується, тобто $t = p\tau + v$, де $p \in \mathbb{N}$, а $v \in (0,\tau)$. Тоді

$$\int\limits_{t-\tau}^{t}\int\limits_0^{\pi} u^2(x,\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta \le \int\limits_{(p-1)\tau}^{(p+1)\tau}\int\limits_0^{\pi} u^2(x,\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_{(p-1)\tau}^{p\tau}\int\limits_0^{\pi} u^2(x,\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta + \int\limits_{p\tau}^{(p+1)\tau}\int\limits_0^{\pi} u^2(x,\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta,$$

а оцінки кожного з двох останніх інтегралів уже зроблені вище. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Белман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. Животовский Л. А. *Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями* // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1969. – №7. – С. 219–292.
3. Репин Ю. М. *Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях* // Уч. зап. Уральского университета, Свердловск. – 1960. – Т. 23. – С.31–34.
4. Слюсарчук В. Е. *Абсолютная экспоненциальная устойчивость линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа в банаховом пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т.16, №3. – С.462–469.
5. Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Проблемы современной теории периодических движений. Ижевск. – 1982. – №6. – С.19–24.

6. Слюсарчук В. Е. *Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с несколькими запаздываниями* // Матем. заметки. – 1975. – Т.17, №6. – С.919–923.

7. Слюсарчук В. Е. *Абсолютная асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом запаздываний в банаховом пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т.12, №5. – С.840–847.

8. Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов* // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – №12. – С.17–19.

9. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.

10. Кушнір В. П. *Про стабілізацію розв'язків лінійних параболічних диференціальних рівнянь із загаюваннями* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – 1997. – Випуск 15. – С.111–119.

11. Кушнір В. П. *Про стабілізацію розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними з загаюваннями* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ, 1998. – Випуск 1(17). – С.116–125.

12. Михлин С. Г. Курс математической физики. — М.: Наука, 1968. – 576 с.

Рівненський державний технічний університет,
Соборна, 11, м. Рівне, 33000

Надійшло 3.07.2000
Після переробки 15.06.2002