УДК 517.923

А. З. Мохонько, В. Д. Мохонько

ПОРЯДОК И ВОЗРАСТАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

A. Z. Mokhon'ko, V. D. Mokhon'ko. *Order and growth of analytic solutions of algebraic differential equations in a neighbourhood of a logarithmic singular point*, Matematychni Studii, **17** (2002) 138–152.

Let f be an analytic solution with isolated singular point at ∞ of the differential equation $P(z, \ln z, f, f') = 0$, where P is a polynomial in all variables. Then the order of the growth of this solution is finite. An asymptotic estimate of the modulus of a solution is obtained.

А. З. Мохонько, В. Д. Мохонько. *Порядок и возрастание аналитических решений алгебраических дифференциальных уравнений в окрестности логарифмической особой точки* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.138–152.

Если дифференциальное уравнение $P(z, \ln z, f, f') = 0$, где P — многочлен по всем переменным, имеет аналитическое решение с изолированной особой точкой в ∞, то порядок роста этого решения конечен. Получена асимптотическая оценка модуля решения.

Используем обозначения теории мероморфных функций [1]. Символы $o(1)$, $O(...)$ рассматриваются при $z \to \infty$. По теореме Пенлеве, уравнения первого порядка, алгебраические относительно неизвестной функции и её производной, не могут иметь в интегралах подвижных трансцендентных и существенно особых точек [2, с. 54], однако могут иметь неподвижные трансцендентные и существенно особые точки. Так интеграл уравнения $2zff' = 1$ имеет вид $f(z) = \sqrt{\ln(z/C)}$, $C = \mathrm{const}$; функция $f(z) = \exp(\ln^2 z)$ — решение уравнения $zf' = 2f \ln z$. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\sum_{s+j=n} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} (\ln z)^{b_{sj}} f'^s f^j = \sum_{s+j \le n-1} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} (\ln z)^{b_{sj}} f'^s f^j, \tag{1}$$

$$\sum_{s+j=n} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} f'^s f^j = \sum_{s+j \le n-1} p_{sj}(z) z^{a_{sj}} (\ln z)^{b_{sj}} f'^s f^j, \tag{2}$$

$a_{sj}, b_{sj} \in \mathbb{R};\ p_{sj}(z), z \in G = \{z : r_0 \le |z| < +\infty\}$, — аналитические функции,

$$p_{sj}(z) = c_{sj} + o(1);\ c_{sj} \in \mathbb{C};\ c_{sj} \ne 0, \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34M10.

если $p_{sj}(z) \not\equiv 0, z \in \mathbb{C}$.

Если $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — целое трансцендентное решение уравнения $P(z, f, f') = 0$, P — многочлен по всем переменным, $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, то из соотношения Вимана-Валирона [3, с. 220] следует оценка роста этого решения на кривой, где достигается максимум модуля

$$\ln M(r, f) = (c + o(1))r^{\rho} \quad c, \rho = \text{const}\,. \tag{4}$$

Метод Вимана-Валирона использует возможность представления целой функции сходящимся в $\mathbb{C}$ рядом Тейлора и неприменим к многозначным аналитическим или мероморфным в области G решениям, а также к решениям, определенным в более сложных областях (полуплоскости, угловой области, полуполосе). В статье получены асимптотические оценки роста аналитических функций с логарифмической особой точкой в ∞, являющихся решениями (1), из которых для целых решений следует соотношение (4) (теоремы 2, 3).

Приступая к рассмотрению уравнения (1), уточним, как мы понимаем операции над многозначными функциями. Рассмотрим круг $g = \{z : |z - r_0| < \varepsilon\}$, где r_0, $\varepsilon > 0$, ε достаточно малое. Выберем какие-то правильные элементы [4, т. 2, с. 480] $\exp(a_{sj} \ln_0 z), (\ln_0 z)^{b_{sj}}, z \in g$, соответственно функций $z^{a_{sj}} = \exp(a_{sj} \ln z), (\ln z)^{b_{sj}}$, $s + j \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Из свойств этих функций следует, что взятые элементы можно аналитически продолжить вдоль любой непрерывной кривой в области $G = \{z : r_0 \leqslant |z| < +\infty\}$. Предположим, что существует правильный элемент $f_0(z)$, $z \in g$, такой, что при подстановке $f_0(z), \exp(a_{sj} \ln_0 z), (\ln_0 z)^{b_{sj}}$, $z \in g$ в (1) вместо, соответственно, $f, z^{a_{sj}}, (\ln z)^{b_{sj}}$ образуется тождество при $z \in g$. Мы предполагаем, что элемент $f_0(z), z \in g$ можно аналитически продолжить вдоль любой непрерывной кривой $z = \lambda(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $\lambda(t_0) = r_0$, $\lambda(t_1) = z_1$, принадлежащей G, причём результатом продолжения является некоторый правильный элемент $f_1(z)$, $z \in \{z : |z - z_1| < \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 > 0$. Возможно, что для любого $z_1 \in G$ существует бесконечное множество различных правильных элементов с центром z_1, которые являются непосредственными аналитическими продолжениями элемента $f_0(z)$, $z \in g$. Множество всех таких элементов обозначим через $f(z)$, $z \in G$. Будем говорить, что $f(z)$, $z \in G$, — функция с изолированной логарифмической особой точкой в ∞.

Выберем произвольные α, β; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Пусть, например, $\alpha > 0$. Рассмотрим кривую $z = r_0 e^{it} = \mu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \alpha$, $\mu(0) = r_0$, $\mu(\alpha) = r_0 e^{i\alpha}$. Аналитически продолжим элементы $f_0(z), \exp(a_{sj} \ln_0 z), (\ln_0 z)^{b_{sj}}$, $z \in g$ вдоль кривой $\mu(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \alpha$. В результате продолжения получим элементы

$$f_{\alpha}(z),\ \exp(a_{sj} \ln_{\alpha} z),\ (\ln_{\alpha} z)^{b_{sj}}, \tag{5}$$

с центром в точке $r_0 e^{i\alpha}$. Далее аналитически продолжим элементы (5) вдоль всевозможных кривых $z = r(t)e^{i\theta(t)}$, $t \in [t_1, t_2]$, где $r(t), \theta(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, — непрерывные функции, такие, что $r_0 \leqslant r(t) < +\infty$, $\alpha \leqslant \theta(t) \leqslant \beta$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Множество всех элементов, полученных в результате таких продолжений, будем обозначать, соответственно, через

$$\begin{gathered} f(z),\ z \in g_{\alpha\beta} = \{re^{i\theta} : \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ r_0 \leqslant r < +\infty\}; \\ z^{a_{sj}},\ z \in g_{\alpha\beta}; \quad (\ln z)^{b_{sj}},\ z \in g_{\alpha\beta}; \end{gathered} \tag{6}$$

$g_{\alpha\beta}$ — угловая область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. Если $\beta - \alpha < 2\pi$, то по теореме о монодромии [4, т. 2, с. 488] функции (6) — однозначные аналитические функции в области $g_{\alpha\beta} \subset \mathbb{C}$. Если $\beta - \alpha \geqslant 2\pi$, то область $g_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как односвязную область на римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$. В этой области также применима теорема о монодромии. Поэтому функция (6) — однозначные аналитические функции на куске римановой поверхности $g_{\alpha\beta}$.

Будем предполагать, что асимптотические соотношения (3) выполняются равномерно по θ в любой угловой области $g_{\alpha\beta}$, а именно,

$$(\forall \alpha, \beta;\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty)\ (\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0):$$
$$p_{sj}(z) = c_{sj} + v_{sj}(z),\ |v_{sj}(z)| < \varepsilon,\ z \in \{re^{i\theta} : d \leqslant r < +\infty,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\},$$

$v_{sj}(z)$ — некоторая аналитическая функция.

Замечание 1. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция с изолированной существенно особой точкой в ∞ (например, целая трансцендентная функция) или n-значная аналитическая функция с алгебраической точкой ветвления в ∞. Запишем ее аргумент в показательной форме; функция $f(re^{i\theta})$, $r_0 \leqslant r < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$, имеет по θ период 2π (соответственно, период $2\pi n$). Это позволяет рассматривать функцию $f(re^{i\theta})$ с существенно особой точкой (с алгебраической точкой ветвления) в ∞ как разновидность функции с логарифмической особой точкой в ∞, имеющей по θ период 2π (соответственно, период $2\pi n$.)

Определим порядок роста бесконечнозначной функции $f(z), z \in G$. Выберем произвольные α, β; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$.

Рассмотрим угловую область $g_{\alpha\beta}$ и соответствующую однозначную ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$ (см.(6)). Пусть

$$M_{\alpha\beta}(r, f) = \max\{|f(z)| : z = te^{i\theta}, R_1 \leqslant t \leqslant r, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}.$$

Для $x \in \mathbb{R}$ обозначим $x^\wedge = \max(x, 1)$. Положим

$$p_{\alpha\beta} = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln(\ln M_{\alpha\beta}(r, f))^\wedge}{\ln r}. \tag{7}$$

Назовём порядком роста функции $f(z)$, $z \in G$, величину

$$p = \sup\{p_{\alpha\beta} : -\infty < \alpha < \beta < +\infty\}. \tag{8}$$

В частности, когда f — функция с существенно особой точкой или с алгебраической точкой ветвления в ∞, то порядок её роста, определяемый формулами (7), (8), совпадает с порядком, определяемым обычным способом [1, с. 61, 65].

Пусть k — наибольшая степень, в которой f' входит в уравнение (1),

$$\xi = \max\{a_{kj} :\ c_{kj} \neq 0\}, \quad \mu = \max\Big\{\frac{a_{sj} - \xi}{k - s} : c_{sj} \neq 0,\ s \leqslant k - 1\Big\}.$$

Если функция $f(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ является решением уравнения (1), то [5, теор. 1], [6] $(\forall\, \alpha, \beta;\ -\infty < \alpha < \beta < +\infty)$ $(\exists\, c = c(\alpha, \beta) > 0)$

$$\ln\left|f(re^{i\theta})\right| < \begin{cases} cr^{2\mu+1}, & \mu > 1/2, \\ cr\ln r, & \mu = 1/2, \quad\ r > r_0,\ \alpha \le \theta \le \beta. \\ cr, & \mu < 1/2, \end{cases}$$

Отсюда и из (7), (8) следует, что функция f имеет конечный порядок роста ρ. Поэтому, с учетом замечания 1, справедлива следующая теорема 1.

Теорема 1. *Если аналитическая функция f с изолированной особой точкой в ∞ является решением уравнения (1), то её порядок роста $p < \infty$.*

Теорема 2. *Если аналитическая функция $f(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ является решением уравнения (2), то либо для любой ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$*

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant r^{\varkappa+\varepsilon}, \quad r \geqslant d = d(\alpha,\beta,\varepsilon),\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta; \tag{9}$$

либо $(\exists\, \alpha', \beta';\ \alpha' < \beta')$ $(\forall \alpha, \beta;\ \alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta)$

$$\ln M_{\alpha\beta}(r, f) = (c + o(1))r^{\rho}; \quad c, \rho > 0. \tag{10}$$

Числа c, $\varkappa$, ρ определяются видом уравнения.

Замечание 2. В случае, когда решением уравнения (2) является целая функция $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, из соотношений (9), (10) следует, что либо f — многочлен степени $\leqslant \varkappa$, либо f — целая трансцендентная функция порядка $\rho > 0$.

Теорема 3. *Пусть аналитическая функция $f(z)$, $z \in G$, с логарифмической особой точкой в ∞ является решением уравнения (1). Тогда возможны три случая: 1) для любой ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$*

$$\ln f(z) = \ln^{\tau+1} z(b + v(z)), \quad |v(z)| < \varepsilon,\ z \in g_{\alpha\beta},\ |z| > d,\ \tau > 0,\ b \in \mathbb{C}; \tag{11}$$

2) для любой ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists\, d = d(\alpha, \beta, \varepsilon) > 0)$

$$\ln |f(z)| < \varepsilon \ln^{\tau+1} |z|,\ z \in g_{\alpha\beta},\ |z| > d; \tag{12}$$

3)$(\exists\ \alpha', \beta';\ \alpha' < \beta')$ $(\forall \alpha, \beta;\ \alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta)$

$$\ln M_{\alpha\beta}(r, f) = (c + o(1))r^{\rho} \ln^{\tau} r; \quad c, \rho > 0,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Числа c, b, τ, ρ определяются видом уравнения.

Пример. Функция $\exp(\ln^2 z)$ является решением уравнения $zf' = 2f \ln z$ и для неё выполняется соотношение (11).

Доказательство теоремы 2. Пусть в уравнении (2), (3)

$$m = \max\{s : s + j = n,\ c_{sj} \neq 0\}, \quad q = \min\{s : s + j = n,\ c_{sj} \neq 0\}.$$

Разделим обе части (2) на $f^n p_{m,n-m}(z) z^{a_{m,n-m}}$, где $p_{m,n-m}(z) = c_{m,n-m} + o(1)$, $c_{m,n-m} \neq 0$. После несложного преобразования и переобозначения коэффициентов и показателей степеней это уравнение можно представить в виде $(q \geqslant 0)$

$$\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^m + \sum_{s=1}^{m-q} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{m-s} (c_s + o(1))z^{d_s} = \omega(z), \tag{14}$$

$$\omega(z) = \sum_{s+j\leqslant n-1} (c^{\circ}_{sj} + o(1))z^{m+d_{sj}-d_{m,n-m}} \ln^{\delta_{sj}} z \frac{(\ldots)}{f^{n-s-j}}; \tag{15}$$

$c_s, c^{\circ}_{sj} \in \mathbb{C};\ c_{m-q} \neq 0;\ d_s \in \mathbb{R}$. Обозначив

$$zf'(z)/f(z) = L(z),\ c_0 = 1,\ d_0 = 0, \tag{16}$$

перепишем уравнение (14) в виде

$$\sum_{s=0}^{m-q} (c_s + o(1))z^{d_s} L^{m-s}(z) = \omega(z), \quad c_0 = 1,\ d_0 = 0,\ c_{m-q} \neq 0. \tag{17}$$

Пусть $F = \big\{(s, d_s) :\ c_s \neq 0,\ s \in \{0, 1, ..., m-q\}\big\}$ — множество точек плоскости. Для множества F построим ломаную Ньютона: рассмотрим выпуклую оболочку множества F; границей оболочки является многоугольник, который точками $(0, d_0)$ и $(m-q, d_{m-q})$ делится на две ломаные линии, верхняя из них — это ломаная Ньютона. Пусть вершины ломаной Ньютона имеют абсциссы $0 = i_0 < i_1 < ... < i_T = m-q$. Обозначим $\rho_s = \frac{d_{i_s} - d_{i_{s-1}}}{i_s - i_{s-1}}$, $s \in \{1, \ldots, T\}$; ρ_s — угловые коэффициенты отрезков ломаной Ньютона; $\rho_1 > \rho_2 > ... > \rho_T$. Обозначим $\rho_s(m-q-j) + d_j = l(j, s)$, $j \in \{0, 1, ..., m-q\}$. Из свойств ломаной Ньютона на множестве F следует что

$$l(i_{s-1}, s) = l(i_s, s) = \max_{j \in \{0,...,m-q\}} l(j, s) = l(s).$$

Положим $\upsilon = \max(-\rho_T, 0)$; $l = \max(-l(s), 0)$, $s \in \{1, ..., T\}$.

Лемма 1 [7]. *Пусть непрерывная функция $L(z)$, $z \in E_*$, является решением уравнения (17), коэффициенты которого непрерывны на неограниченном множестве E_*,*

$$\omega(z) = O(z^{-2(l+\upsilon q)-\varepsilon}),\ \varepsilon > 0,\ z \in E_*, \tag{18}$$

E_0 — связная компонента множества E_*. Тогда, если в (17) $q = 0$, то

$$L(z) = (b + u(z))z^{\rho}, \quad z \in E_0,\ |u(z)| < \varepsilon_1,\ |z| > r(\varepsilon_1),\ \rho \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C}, \tag{19}$$

$b \neq 0$; ε_1 — заданное; ρ — одно из чисел $\rho_1, ..., \rho_T$; b — одно из $m-q$ чисел $b_j = |b_j|e^{i\tau_j}$, определяемых видом уравнения (17); числа $b = b(E_0), \rho = \rho(E_0)$ не изменяются в пределах компоненты E_0. Если $q \geqslant 1$, то либо на E_0 выполняется (19), либо

$$|L(z)| < M|z|^{-\upsilon-\varepsilon_2}, \quad z \in E_0, \upsilon \geqslant 0, \varepsilon_2 > 0, M = \mathrm{const}\,. \tag{20}$$

Если среди значений $\rho_1, ..., \rho_T$, которые ρ может принимать в формуле (19), есть $\rho_j > 0$, то для всех таких ρ_j и соответствующих им, согласно (19), значений $b_j = |b_j|e^{i\tau_j}$ определим множества чисел

$$\varphi_j = \varphi(j, k) = (2\pi k - \tau_j)/\rho_j, k \in \mathbb{Z}; \quad \alpha_j = \varphi_j - (\pi/2\rho_j),\ \beta_j = \varphi_j + (\pi/2\rho_j), \tag{21}$$

(величины ρ_j, τ_j принимают конечное число возможных значений).

Как следует из теоремы 1, рассматриваемое решение $f(z)$, $z \in G$, имеет конечный порядок роста p. Выберем произвольные $\alpha, \beta; -\infty < \alpha < \beta < +\infty$. Пусть A, B такие, что $A < \alpha < \beta < B$. Рассмотрим ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta} = \{re^{i\theta} : \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, r_0 \leqslant r < +\infty\}$ и $f(z)$, $z \in g_{AB} = \{re^{i\theta} : A \leqslant \theta \leqslant B, r_0 \leqslant r < +\infty\}$ функции $f(z)$, $z \in G$. Пусть $\{c_q\}$ — множество всех нулей ветви $f(z)$, $z \in g_{AB}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого c_q построим окружность с центром c_q радиуса $\delta_q = |c_q|^{-p-1-(\varepsilon/2)}$. Через E обозначим множество точек области g_{AB} римановой поверхности функции $f(z)$, $z \in G$, лежащих внутри всех этих окружностей. Тогда [5, лемма 4] выполняется

$$\sum \delta_q = \sum |c_q|^{-p-1-(\varepsilon/2)} < K = \mathrm{const} < +\infty,\ c_q \in g_{AB},$$

(следовательно, E — множество кругов с конечной суммой радиусов $< K$) и $\exists\ d = d(A, B, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < |z|^{2p+2+\varepsilon}, \quad z \in g_{AB} \setminus E,\ |z| \geqslant d. \tag{22}$$

Так как $g_{\alpha\beta} \subset g_{AB}$, то соотношение (22) выполняется $\forall z$, $z \in g_{\alpha\beta} \setminus E$, $|z| \geqslant d$. Далее, рассматривая множество $g_{\alpha\beta}$, полагаем, что $|z| \geqslant d = d(A, B, \varepsilon)$.

Можно считать, что α и β не совпадают ни с одним из чисел $\varphi_j, \alpha_j, \beta_j$ (см.(21)), и что лучи $S(\alpha) = \{z : z = re^{i\alpha}, r \geqslant d\}$, $S(\beta) = \{z : z = re^{i\beta}, r \geqslant d\}$ не пересекаются с E, когда d — достаточно большое $\big(E \cap (S(\alpha) \cup S(\beta)) = \varnothing\big)$. Действительно, пусть одно из этих условий не выполняется для α. Множество чисел $\varphi_j, \alpha_j, \beta_j$, определенных в (21), не имеет в $\mathbb{R}$ точек сгущения. Поэтому ($\exists\ \alpha', \alpha''$; $A \leqslant \alpha' < \alpha'' \leqslant \alpha$) такие, что ни одно из чисел $\varphi_j, \alpha_j, \beta_j$ не принадлежит отрезку $[\alpha', \alpha'']$. Поскольку E — множество кругов с конечной суммой радиусов (см. (22)), то ($\exists\ \alpha_*$, $\alpha' < \alpha_* < \alpha''$) ($\exists\ d = d(\alpha', \alpha'') > 0$) такое, что луч $S(\alpha_*) = \{z :\ z = re^{i\alpha_*},\ r \geqslant d\}$ не пересекает круги из множества E, $(S(\alpha_*) \cap E = \varnothing)$, [7, форм. (31)]. Аналогично существует β_*, $\beta \leqslant \beta_* < B$ такое, что β_* не совпадает ни с одним из чисел $\varphi_j, \alpha_j, \beta_j$ и луч $S(\beta_*) = \{z :\ z = re^{i\beta_*},\ r \geqslant d\}$ не пересекает множество кругов E, $(S(\beta_*) \cap E = \varnothing)$. Поэтому вместо ветви $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$, можно рассмотреть ветвь $f(z)$, $z \in g_{\alpha_*\beta_*}$, где $A < \alpha_* \leqslant \alpha < \beta \leqslant \beta_* < B$, значения α_*, β_* отличны от чисел $\varphi_j, \alpha_j, \beta_j$ (см. (21)) и $E \cap (S(\alpha_*) \cup S(\beta_*)) = \varnothing$.

Положим $\zeta = \max\Big(2p + 2, \max\limits_{j=1,\dots,T} \rho_j\Big)$; учитывая неравенство (22),

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < |z|^{\zeta+\varepsilon},\ z \in g_{\alpha\beta} \setminus E,$$

поэтому множество

$$Q = \{z :\ z \in g_{\alpha\beta},\ \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| > |z|^{\zeta+\varepsilon}\} \subset E. \tag{23}$$

Пусть ∂Q – граница множества Q. Так как функции $|z|^{\zeta+\varepsilon}$, $|f'(z)/f(z)|$ — непрерывные, то с учётом формулы (23)

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = |z|^{\zeta+\varepsilon}, \quad z \in \partial Q; \tag{24}$$

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant |z|^{\zeta+\varepsilon}, \quad z \in g_{\alpha\beta} \setminus Q,\ Q \subset E. \tag{25}$$

Обозначим

$$\varkappa = \max\left[\max_{j=1,\dots,m-q}|b_j|;\ \max_{k+s\leqslant n-1}(m + a_{sj} - a_{m,n-m} + s\zeta + 2(l + vq))\right], \tag{26}$$

$$E_1 = \{z : z \in g_{\alpha\beta},\ |f(z)| \geqslant |z|^{\varkappa+\sigma}\}, \quad E_2 = g_{\alpha\beta} \setminus E_1,\ \sigma = (n+1)\varepsilon > 0. \tag{27}$$

Из (25), (26) следует

$$|(c^{\circ}_{sj} + o(1))z^{m+a_{sj}-a_{m,n-m}}(\ln z)^{b_{sj}}(f'(z)/f(z))^s| < |z|^{\varkappa+n\varepsilon-2(l+vq)}, \quad z \in g_{\alpha\beta} \setminus Q,$$

$|z| > R_1$. Отсюда и из (14)–(16), (27), следует, что на множестве $E_* = E_1 \backslash Q$ выполняется условие (18) леммы, а уравнение (17) можно представить в виде ($c_{m-q} \neq 0$)

$$\sum_{s=0}^{m-q} (c_s + o(1))\, z^{d_s}\, (L(z))^{m-s} = o(1), \quad z \in E_1\backslash Q,\ \ |z| \to +\infty,\ c_0 = 1,\ d_0 = 0. \tag{28}$$

Если уравнение (28) не зависит от L, то в левой части (2) только одно слагаемое $p_{0n}(z)z^{a_{0n}}f^n,\ p_{0n}(z) = c_{0n} + o(1) \not\equiv 0,\ c_{0n} \neq 0$, имеет степень n по f и f'. Тогда $\exists\ R_1 > 0$ такое, что $\{z:\ z \in E_1\backslash Q,\ |z| > R_1\} = \varnothing$. Действительно, в противном случае уравнение (28) имеет вид

$$c_0 + o(1) = o(1),\ z \in E_1\backslash Q,\ |z| \to +\infty,$$

а значит $c_0 = 0$, что противоречит предположению. Поэтому из (27) следует

$$|f(z)| < |z|^{\varkappa+\sigma}, \quad z \in g_{\alpha\beta}\backslash Q,\ |z| > R_1;$$

как показано ниже (см. (58)), исключительное множество Q можно игнорировать, поэтому в рассматриваемом случае выполняется (9).

Если уравнение (28) зависит от L, то, учитывая (16), (19), (20), либо ($\forall\delta > 0,\ \delta < \varepsilon$) ($\exists\ R > 0$)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (b + u(z))z^{\rho-1}, \quad z \in E_0 \subset E_1 \setminus Q,\ |u(z)| < \delta/2,\ |z| \geqslant R, \tag{29}$$

$b \neq 0$, либо выполняется неравенство

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < M|z|^{-v-\varepsilon_2-1}, \quad z \in E_0,\ v \geqslant 0,\ \varepsilon_2 > 0,\ M = \mathrm{const}; \tag{30}$$

E_0 — связная компонента $E_1 \setminus Q$; числа ρ, b зависят от E_0 и каждое из них может принимать, соответственно, одно из конечного множества значений $\rho_j,\ b_j = |b_j|e^{i\tau_j}$.

Покажем, что если $z \in \partial Q$ — границе Q, $|z| > R_1$, то $z \in E_2$ и (см. (27))

$$|f(z)| < |z|^{\varkappa+\sigma},\ z \in \partial Q,\ |z| > R_1. \tag{31}$$

Действительно, пусть $z \in E_1 \cap \partial Q$. Тогда, учитывая (29), (26) и равенство $\zeta = \max(2p + 2, \max\limits_{j=1,\dots,T}\rho_j)$, получаем

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \frac{3|b_j z^{\rho_j-1}|}{2} < |z|^{\zeta},$$

что противоречит (21).

Выберем R_1 достаточно большое, такое, что $f(R_1 e^{i\theta}) \neq 0, \infty, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$,

$$0 < c \leqslant |f(R_1 e^{i\theta})| \leqslant C, \ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta; \ c, C = \text{const}\,. \tag{32}$$

Множество E_1 замкнутое. Пусть E_1^0 — внутренность E_1, ∂E_1 — граница E_1, рассматриваемые в области $g_{\alpha\beta}$. Тогда $E_1 = E_1^0 \cup \partial E_1$. Учитывая непрерывность функций $|f(z)|, |z|^{\varkappa+\sigma}$ и определение E_1,

$$|f(z)| = |z|^{\varkappa+\sigma}, \ z \in \partial E_1. \tag{33}$$

Выберем некоторое $\varphi, \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Рассмотрим луч

$$S = S(\varphi, R_1) = \{z = re^{i\varphi} : \ \varphi = \text{const}, \ r \geqslant R_1\} \subset g_{\alpha\beta}.$$

Может случиться, что $E_1^0 \cap S = \varnothing$. Тогда из (27), (33) следует

$$|f(z)| \leqslant |z|^{\varkappa+\sigma}, \quad z \in S(\varphi, R_1).$$

Пусть $E_1^0 \cap S \neq \varnothing$. Множество $E_1^0 \cap S$ представляет собой [9, с. 73] сумму конечного или счётного числа попарно непересекающихся интервалов $\omega_t = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const}, \ r_{1t} < r < r_{2t}\} \subset E_1^0 \cap S$, таких, что

$$|f(z)| \geqslant |z|^{\varkappa+\sigma}, \ z \in \omega_t \subset E_1^0, \tag{34}$$

а на концах интервала (если $r_{1t} > R_1, \ r_{2t} < +\infty$), (см.(33))

$$|f(r_{1t}e^{i\varphi})| = r_{1t}^{\varkappa+\sigma}, \ |f(r_{2t}e^{i\varphi})| = r_{2t}^{\varkappa+\sigma}. \tag{35}$$

Известно [8, т. 1, с. 92], что если Q — часть топологического пространства X, то любое связное подмножество B, имеющее общие точки с внутренностью множества Q и внешностью множества Q, пересекает границу Q. Интервал ω_t- связное множество. На границе ∂Q множества Q выполняется (31), поэтому, учитывая (34), $\partial Q \cap \omega_t = \varnothing$. Следовательно, либо $\omega_t \subset Q$, либо $\omega_t \cap (Q \cup \partial Q) = \varnothing$, и тогда $\omega_t \subset E_1 \setminus Q$. Отбросим все интервалы ω_t, для которых $\omega_t \subset Q \subset E$ (E — множество кругов с конечной суммой радиусов). Далее будем рассматривать только интервалы $\omega_t \subset E_1 \backslash Q$; обозначим множество всех таких интервалов ω_t через $\{\omega_t\}$. Связное множество ω_t принадлежит некоторой связной компоненте $E_0 \subset E_1 \backslash Q$, поэтому для $\forall z \in \omega_t$ выполняется либо соотношение (29), либо неравенство (30). Через ω_t^+ обозначим те из отрезков $\omega_t \in \{\omega_t\}$, для которых в (29) $\rho > 0$, а через ω_t^- обозначим те из отрезков ω_t, для которых либо в (29) $\rho \leqslant 0$, либо выполняется (30).

В соответствии с (29), (30) для $s \in \omega_t^-$, $|f'(s)/f(s)| < (|b| + \delta)/|s|$. Поэтому, интегрируя (29) и (30) на ω_t^-, получим (далее, используя формулы (34), (35) индекс t не пишем; $|z| = r, \ |z_1| = r_1 > 1$)

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right| \leqslant \left|\int_{r_1}^{r} \frac{f'(xe^{i\varphi})}{f(xe^{i\varphi})} dx\right| < (|b| + \delta)\int_{r_1}^{r} \frac{dx}{x} = (|b| + \delta)\ln\left(\frac{r}{r_1}\right), (\delta < \varepsilon). \tag{36}$$

Если $r_1 > R_1$, то из (36), (26) получаем

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right| < (|b| + \delta)\ln(r/r_1) < (\varkappa + \sigma)\ln(r/r_1).$$

Согласно (35) $\ln|f(z_1)| < (\varkappa+\sigma)\ln r_1$, поэтому из предыдущего неравенства следует $\ln|f(z)| < (\varkappa+\sigma)\ln r$. Если $r_1 = R_1$, то из (27), (32), (36) следует $\ln|f(z_1)| < \ln C$, и

$$\ln|f(z)| < (|b|+\delta)\ln r + \ln C < (\varkappa+\sigma)\ln r,\ |z| = r > R_2.$$

Окончательно получаем $|f(z)| < |z|^{\varkappa+\sigma},\ z \in \omega_t^-,\ |z| > R_2 \geqslant R_1$, что противоречит (34). Поэтому

$$\omega_t^- \cap \{z : z \in g_{\alpha\beta},\ |z| > R_2\} = \varnothing, \tag{37}$$

R_2 не зависит от $\varphi,\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

Если в (28) переменная z входит только с неположительными степенями (все $d_s \leqslant 0$), то в (29) для всех решений $\rho \leqslant 0$. Поэтому на луче S отрезков ω_t^+ нет. Следовательно, учитывая (37), (34), (27) луч $\{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const}, r \geqslant R_2\} \setminus Q \subset E_2$. Поскольку $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \varphi$ — произвольное, то в рассматриваемом случае на множестве $\{z : z \in g_{\alpha\beta}, |z| > R_2\} \setminus Q$ выполняется (9) и теорема доказана.

Предположим, что существует $\omega_t^+ \in \{\omega_t\}$. Интегрируя (29) на отрезке ω_t^+ при $r_1 \leqslant \nu < r \leqslant r_2$, выделяя действительные части, получим ($b = |b|e^{i\tau}$).

$$\begin{gathered}
\ln\frac{f(re^{i\varphi})}{f(\nu e^{i\varphi})} = [(re^{i\varphi})^\rho - (\nu e^{i\varphi})^\rho)](b + v(r,\varphi))/\rho, \quad re^{i\varphi} \in \omega_t^+,\\
\ln\left|\frac{f(re^{i\varphi})}{f(\nu e^{i\varphi})}\right| = \rho^{-1}(r^\rho - \nu^\rho)(|b|\cos(\rho\varphi+\tau) + w(r,\varphi)),
\end{gathered} \tag{38}$$

$r_1 \leqslant \nu < r \leqslant r_2;\ |v(r,\varphi)|, |w(r,\varphi)| < \delta;\ v(r,\varphi), w(r,\varphi)$— некоторые функции.

Есть две возможности: а) все отрезки ω_t^+ имеют конечную длину (тогда, с учётом предыдущего, все отрезки из множества $\{\omega_t\}$ имеют конечную длину); б) один из отрезков ω_t^+ имеет бесконечную длину. Рассмотрим случай а). Пусть в (38) $\cos(\rho\varphi+\tau) = 0$; это возможно только при значениях $\varphi = \varphi_\varsigma$,

$$\varphi_\varsigma = (\pi + 2\pi\varsigma)/2\rho - \tau/\rho,\ \alpha < \varphi_\varsigma < \beta, \tag{39}$$

ς — целые числа; τ, ρ, ς принимают конечное число возможных значений ($\alpha < \varphi_\varsigma < \beta$); φ_ς совпадает с некоторыми из чисел α_j, β_j, определенными в (21). Тогда из (38), (35) следует ($|w(r,\varphi_\varsigma)| < \delta$)

$$\ln|f(re^{i\varphi_\varsigma})| \leqslant \rho^{-1}r^\rho|w(r,\varphi_\varsigma)| + (\varkappa+\sigma)\ln r_1 < \delta_1 r^\rho,\ R < r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \tag{40}$$

$\delta_1 > 0,\ \delta_1$ — заданное число, $R = R(\delta_1)$. Теперь предположим, что в (38) $\cos(\rho\varphi+\tau) \neq 0$, тогда из (38), (35) следует

$$(\varkappa+\sigma)\ln\frac{r_2}{r_1} = \ln\left|\frac{f(r_2e^{i\varphi})}{f(r_1e^{i\varphi})}\right| = (|b|\cos(\rho\varphi+\tau) + w(r_2,\varphi))\rho^{-1}(r_2^\rho - r_1^\rho), \quad |w| < \delta. \tag{41}$$

Существует такое $r(\varphi)$, что

$$\{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \geqslant r(\varphi)\} \cap \omega_t^+ = \varnothing,\ \cos(\rho\varphi+\tau) \neq 0,\ r_{2t} < +\infty. \tag{42}$$

Действительно, выберем δ такое, что $0 < \delta < |b\cos(\rho\varphi+\tau)|/2$. Пусть r_* настолько большое, что в (29), (38) выполняется $|u(z)|, |w(z)| < |b\cos(\rho\varphi+\tau)|/2,\ |z| > r_*$. Тогда из (41) следует $(\varkappa+\sigma)\ln(r_2/r_1) > |b|2^{-1}\rho^{-1}|\cos(\rho\varphi+\tau)|(r_2^\rho - r_1^\rho)$, то есть

$$c(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1,\ x_1 = r_1^\rho,\ x_2 = r_2^\rho,\ c = 2\frac{\varkappa+\sigma}{|b\cos(\rho\varphi+\tau)|},\ r_1 > r_*. \tag{43}$$

Функция u — она строго возрастающая на $[0, +\infty)$, поэтому соотношение (43) не возможно, если r_1 (x_1) достаточно большое, то есть $r_1 > r(\varphi)$. Поэтому выполняется (42).

Из (37) следует, что если R достаточно большое, то на луче $S(\varphi, R) = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \mathrm{const},\ r \geqslant R\}$ отрезков ω_t^- нет. Значит точки луча $S(\varphi, R)$ могут принадлежать либо множеству $E_2 \cup \partial E_1$ (см. (27), (33)), либо Q, либо отрезкам ω_t^+ конечной длины. Для каждого отрезка $\omega_t^+ \subset S(\varphi, R)$ выполняется (38), где $b = b_j, \rho = \rho_j, \tau = \tau_j$ — некоторые из конечного множества чисел, определённых в (29). Из (42) следует, что при достаточно большом $r(\varphi)$ луч $S(\varphi, r(\varphi)) = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \mathrm{const},\ r \geqslant r(\varphi)\}$ не содержит отрезков ω_t^+ конечной длины, для которых в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) \neq 0$. Значит, если $\varphi \neq \varphi_\varsigma$, φ_ς — одно из конечного множества чисел, определённых в (39), то $S(\varphi, r(\varphi)) \subset E_2 \cup \partial E_1 \cup Q$, $Q \subset E$ — множеству кругов с конечной суммой радиусов. Поэтому, учитывая определение E_2 (см. (27)) и (33),

$$|f(re^{i\varphi})| \leqslant r^{\varkappa+\sigma},\ r \geqslant r(\varphi),\ \varphi = \mathrm{const} \neq \varphi_\varsigma,\ r \notin \Delta,\ \mathrm{mes}\,\Delta < +\infty, \tag{44}$$

$\Delta = S(\varphi, r(\varphi)) \cap Q$, $Q \subset E$, Δ – некоторое множество интервалов на луче $S(\varphi, r(\varphi))$. Так как E — множество кругов с конечной суммой радиусов, то $\mathrm{mes}\,\Delta < +\infty$.

Если луч $S(\varphi, r(\varphi))$ содержит отрезки ω_t^+ конечной длины, для которых в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) = 0$, то $\varphi = \varphi_\varsigma$, (см. (39)), и на ω_t^+ имеет место оценка (40), а на множестве $E_2 \cup \partial E_1$ выполняется (27), (33). Поэтому из (27), (33), (40) следует

$$\ln|f(re^{i\varphi_\varsigma})| = o(r^\rho), \quad r \notin \Delta,\ \mathrm{mes}\,\Delta < +\infty,\ r \to +\infty,\ \rho = \max \rho_j, \tag{45}$$

максимум берётся по ρ_j, которые соответствуют отрезкам $\omega_t^+ \subset S(\varphi, r(\varphi))$.

Предположим теперь, что один из отрезков ω_t^+ имеет бесконечную длину. Если в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) = 0$ (это возможно только для значений $\varphi = \varphi_\varsigma$, определённых в (39)), то на луче $S = S(\varphi, R_1)$ выполняется соотношение

$$\ln|f(re^{i\varphi_\varsigma})| = o(r^\rho),\ r \to +\infty. \tag{46}$$

Пусть в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) < 0$. Выберем δ так, чтобы $0 < \delta < -|b|\cos(\rho\varphi + \tau)$, и пусть для $|z| > R$, $R = R(\delta)$ в (38) выполняется $|w(z)| < \delta < -|b|\cos(\rho\varphi + \tau)$. Тогда получаем

$$\ln\left|\frac{f(z)}{f(z_1)}\right| < (|b|\cos(\rho\varphi + \tau) + \delta)\rho^{-1}(r^\rho - r_1^\rho) < 0,$$
$$\ln|f(re^{i\varphi})| < \ln|f(z_1)|,\ \forall r > r_1 = |z_1| > R,$$

что противоречит определению ω_t (см. (34)). Поэтому в (38) $\cos(\rho\varphi + \tau) > 0$, и на отрезке бесконечной длины ω_t^+ выполняется

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = r^\rho\rho^{-1}(|b|\cos(\rho\varphi + \tau) + o(1)),\ \rho > 0,\ \cos(\rho\varphi + \tau) > 0,\ r \to +\infty.$$

Существует такое целое k, что $|\rho\varphi + \tau - 2\pi k| < \pi/2$. Возьмём φ', удовлетворяющее условиям

$$|\rho\varphi + \tau - 2\pi k| < \rho\varphi' + \tau - 2\pi k < \pi/2,$$

k — определённое выше число. Тогда

$$\cos(\rho\psi + \tau) \geqslant \cos(\rho\varphi' + \tau) > 0,\ \varphi < \psi \leqslant \varphi'. \tag{47}$$

Из определения ω_t^+ следует, что $\omega_t^+ \subset E_0$, E_0 — связная компонента $E_1\setminus Q$, причём на E_0 в (29) $\rho, b = \text{const}$. Покажем, что если ν достаточно большое, то этой же компоненте принадлежит угловая область

$$\{z = re^{i\theta} : \varphi \leqslant \theta \leqslant \varphi',\ r \geqslant \nu\} \subset E_0. \tag{48}$$

Действительно, пусть ψ — наибольшее значение такое, что дуга

$$\lambda = \{z = re^{i\theta} : \varphi \leqslant \theta \leqslant \psi,\ r = \text{const} \geqslant \nu\} \subset E_0.$$

Предположим, что $\psi < \varphi'$. Напомним, что если $z \in \partial Q$ – границе Q, то выполняется (31) и $z \in E_2$. Поэтому, учитывая определение точки $re^{i\psi}$ и определение связной компоненты E_0 множества $E_1\setminus Q$, получаем, что $re^{i\psi} \in \partial E_1$, и из (33) следует

$$|f(re^{i\psi})| = r^{\varkappa+\sigma}. \tag{49}$$

Проинтегрируем (29) по λ; выделяя действительные части, получим

$$\ln\left|\frac{f(re^{i\psi})}{f(re^{i\varphi})}\right| = (|b|\rho^{-1}(\cos(\rho\psi+\tau) - \cos(\rho\varphi+\tau)) + u_1(r,\psi,\varphi))r^{\rho}, \tag{50}$$

$|u_1(r,\psi,\varphi)| < \delta(\beta-\alpha)$, $u_1(r,\psi,\varphi)$ – некоторая функция, $r \geqslant \nu$. Из (50), (49), (38), (47) следует

$$\begin{gathered}\ln r^{\varkappa+\sigma} \geqslant (|b|\rho^{-1}(\cos(\rho\psi+\tau) - \cos(\rho\varphi+\tau)) - \delta(\beta-\alpha))r^{\rho} + \\ +(|b|\cos(\rho\varphi+\tau) - \delta)(r^{\rho} - \nu^{\rho})\rho^{-1} + \ln|f(\nu e^{i\varphi})| \geqslant \\ \geqslant r^{\rho}(|b|\rho^{-1}\cos(\rho\varphi'+\tau) - \delta(\beta-\alpha) - \delta\rho^{-1}) - |b|\rho^{-1}\nu^{\rho}\cos(\rho\varphi+\tau) + \ln|f(\nu e^{i\varphi})|, \quad r > \nu.\end{gathered} \tag{51}$$

Учитывая (47), $\cos(\rho\varphi'+\tau) > 0$. Выберем $\delta > 0$ настолько малое, что в ()

$$|b|\rho^{-1}\cos(\rho\varphi'+\tau) - \delta(\beta-\alpha) - \delta\rho^{-1} > 0. \tag{52}$$

Отрезок ω_t^+ бесконечной длины, поэтому ν можно выбрать таким, чтобы соотношения (29), (38), (52) выполнялись с указанным δ. Если r достаточно большое, то из (52) следует, что неравенство () невозможно. Поэтому $\psi \geqslant \varphi'$ и (48) доказано.

Обозначим $(\tau = \tau_j, \rho = \rho_j$,(см. (29), (21))

$$\alpha_j = \frac{2\pi k - \tau_j - \frac{\pi}{2}}{\rho_j},\ \beta_j = \frac{2\pi k - \tau_j + \frac{\pi}{2})}{\rho_j}, \tag{53}$$

k — определённое выше целое число. Из (48) следует, что

$$(\forall\vartheta > 0)\ (\exists\nu > 0) : \{z = re^{i\theta} : \alpha_j + \vartheta \leqslant \theta \leqslant \beta_j - \vartheta, r \geqslant \nu\} \subset E_0 \subset E_1\setminus Q. \tag{54}$$

Поэтому для любого $\theta \in [\alpha_j + \vartheta, \beta_j - \vartheta]$ на луче $S(\theta) = \{z = re^{i\theta} : \theta = \text{const},\ r \geqslant \nu\} \subset E_0$ выполняются все условия, необходимые для доказательства равенства (38). Следовательно, имеет место равенство

$$\ln\frac{f(re^{i\theta})}{f(\nu e^{i\theta})} = [(re^{i\theta})^{\rho_j} - (\nu e^{i\theta})^{\rho_j}](b_j + v(r,\theta))\rho_j^{-1}, \quad \alpha_j + \vartheta \leqslant \theta \leqslant \beta_j - \vartheta,$$

$r \geqslant \nu$, $|v(r,\theta)| < \delta$. Поэтому $(\forall \vartheta > 0)(\forall \delta > 0)(\exists \nu = \nu(\vartheta,\delta) > 0)$

$$\begin{gathered}\ln f(re^{i\theta}) = (b_j + v(r,\theta))(re^{i\theta})^{\rho_j}\rho_j^{-1} + W(r,\theta),\ r \geqslant \nu;\\ \ln|f(re^{i\theta})| = (|b_j|\cos(\rho_j\theta + \tau_j) + w(r,\theta))r^{\rho_j}\rho_j^{-1} + H(r,\theta),\ r \geqslant \nu; \\ \alpha_j + \vartheta \leqslant \theta \leqslant \beta_j - \vartheta;\ |v(r,\theta)|, |w(r,\theta)| < \delta;\ |W(r,\theta)|, |H(r,\theta)| < \mathrm{const}\,.\end{gathered} \tag{55}$$

Итак, если луч $S(\varphi, R)$ содержит отрезок ω_t^+ бесконечной длины, то на этом луче справедливо соотношение (38), где $\cos(\rho\varphi + \tau) \geqslant 0$. Если $\cos(\rho\varphi + \tau) = 0$, то $\varphi = \varphi_\varsigma$, (39) и имеет место оценка (46), а тем более выполняется (45). Если $\cos(\rho\varphi + \tau) > 0$, то выполняется

$$\ln f(z) = z^\rho(b\rho^{-1} + o(1)),\ z \in \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \mathrm{const},\ r \geqslant \nu\}. \tag{56}$$

В этом случае существует также отрезок (α_j, β_j), $\varphi \in (\alpha_j, \beta_j)$, на котором справедлива равномерная асимптотическая оценка (55). Так как числа ρ_j, b_j, τ_j принимают конечное число возможных значений (см.(29)), то для взятых α, β; $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ промежуток $[\alpha, \beta]$ содержит не более конечного числа значений $\varphi_\varsigma, \alpha_j, \beta_j$, определённых в (39), (53), следовательно, существует не более конечного числа отрезков (α_j, β_j), $(\alpha_j, \beta_j) \cap [\alpha, \beta] \neq \varnothing$, на которых имеет место оценка подобная (55). Пусть имеется всего s таких отрезков, $s \geqslant 1$. Если $(\alpha_j, \beta_j), (\alpha_\iota, \beta_\iota)$ – любые два из указанных отрезков, то они либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, если $\exists\, \theta_0$, $\alpha_j < \theta_0 < \beta_j$, $\alpha_\iota < \theta_0 < \beta_\iota$, то выберем такое $\vartheta > 0$, что $\alpha_j + \vartheta < \theta_0 < \beta_j - \vartheta$, $\alpha_\iota + \vartheta < \theta_0 < \beta_\iota - \vartheta$. Из определения отрезков (α_j, β_j), $(\alpha_\iota, \beta_\iota)$ следует, что в областях

$$\begin{gathered} g_j = \{z = re^{i\theta} :\ \alpha_j + \vartheta \leqslant \theta \leqslant \beta_j - \vartheta,\ r \geqslant \nu\}, \\ g_\iota = \{z = re^{i\theta} :\ \alpha_\iota + \vartheta \leqslant \theta \leqslant \beta_\iota - \vartheta,\ r \geqslant \nu\} \end{gathered}$$

выполняются соотношения аналогичные (55). Луч $\{z :\ z = re^{i\theta_0},\ r \geqslant \nu\} \subset g_j \cap g_\iota$. Поэтому области g_j и g_ι принадлежат одной и той же связной компоненте E_0 (см. (54)). Для компоненты E_0 в формуле (29) числа $\rho = \rho_j$, $b = b_j = |b_j|e^{i\tau_j}$ остаются неизменными $\forall z \in E_0$. Поэтому числа α_j, β_j; $\alpha_\iota, \beta_\iota$ определяются формулами (53) при одних и тех же значениях ρ_j, τ_j. Следовательно, отрезки (α_j, β_j), $(\alpha_\iota, \beta_\iota)$ могут пересекаться только в случае, когда в формулах (53) целое число k принимает для α_j, β_j то же значение, что и для $\alpha_\iota, \beta_\iota$. Учитывая предыдущее, из (53) следует, что $\alpha_j = \alpha_\iota$, $\beta_j = \beta_\iota$.

Указанные отрезки (α_j, β_j) можно перенумеровать так, что будут выполняться неравенства $\alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_s < \beta_s$. Обозначим

$$D(r) = \{z = |z|e^{i\theta} :\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ R_1 \leqslant |z| \leqslant r\},\ \ B(r) = D(r)\backslash Q, \tag{57}$$

где Q определено в (23); $B(r)$ – замкнутое множество. Пусть $\tilde{B}(r)$ – та связная компонента множества $B(r) \cup Q \cup \partial Q$, которая содержит $B(r)$. Тогда $\tilde{B}(r) = B(r) \cup Q(r)$, $Q(r) \subset Q \cup \partial Q \subset E$; $Q(r)$ — замкнутое множество; $B(r) \subset D(r) \subset B(r) \cup Q(r)$. На замкнутом множестве $\tilde{B}(r)$ аналитическая функция $f(z)$, $z \in g_{\alpha\beta}$ достигает наибольшего значения на границе в некоторой точке η. Если наибольшее значение достигается на $Q(r)$, то $\eta \in \partial Q$ и из (31) следует $|f(\eta)| < |\eta|^{\varkappa+\sigma}$. Поскольку $Q(r) \subset E$ – множеству кругов с суммой радиусов $< K$, то учитывая определение связной компоненты, получаем $|\eta| < r + 2K$. Таким образом

$$\max_{z \in Q(r)} |f(z)| = |f(\eta)| < |\eta|^{\varkappa+\sigma} < (r + 2K)^{\varkappa+\sigma} < r^{\varkappa+2\sigma}, r > R_2. \tag{58}$$

Пусть наибольшее значение функции достигается на множестве $B(r)$,

$$\max_{z\in B(r)}|f(z)|=|f(\eta)|\overset{def}{=}M_*(r). \tag{59}$$

Предположим, что для некоторого a,

$$\max_{z\in B(r)}|f(z)|\leqslant r^{\varkappa+\sigma},\ \forall r\geqslant a. \tag{60}$$

Поскольку

$$D(r)=\{z:z=|z|e^{i\theta},\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,R_1\leqslant|z|\leqslant r\}\subset(B(r)\cup Q(r)),$$

то, учитывая (58), (60), получаем

$$M_{\alpha\beta}(r,f)=\max_{z\in D(r)}|f(z)|<r^{\varkappa+2\sigma},\ r>a, \tag{61}$$

a – достаточно большое, $\sigma>0$ – заданное число; оценка (9) доказана.

Предположим, что

$$(\forall\ a>0)\ (\exists\ r>a):\ \max_{z\in B(r)}|f(z)|=|f(\eta)|>r^{\varkappa+\sigma}. \tag{62}$$

Множество $B(r)$ — замкнутое, поэтому в (62) точка η принадлежит границе области $B(r)$. Так как, лучи $S(\alpha)=\{z:z=re^{i\alpha},\ r\geqslant R\}$, $S(\beta)=\{z:z=re^{i\beta},\ r\geqslant R\}$ не пересекаются с кругами из множества E, $Q\subset E$, то точки этой границы принадлежат лучам $S(\alpha)$, $S(\beta)$, дугам $\lambda(r)=\{z=re^{i\theta}:\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\ r=\mathrm{const}\}$, $\lambda(R_1)=\{z=R_1e^{i\theta}:\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$ и множеству ∂Q — границе Q. Из (31), (32), (62) следует, что $\eta\notin\partial Q\bigcup\lambda(R_1)$. Как показано выше, на любом луче $S(\varphi,R_1)=\{z=re^{i\varphi}:\varphi=\mathrm{const},\ r\geqslant R_1\}$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, выполняется одна из оценок (44), (45), (56).

Если $\eta\in S(\alpha)$, то учитывая (62), (27), (37), $\eta\notin(E_2\cup\omega_t^-)$, $r>a$, a – достаточно большое. Поэтому $\eta\in\omega_t^+$. Поскольку $\alpha\neq\varphi_\varsigma$, то из (42) следует, что ω_t^+ имеет бесконечную длину, если $r>a>r(\alpha)$ (см.(42) и определение $r(\varphi)$). Выполняются также равенства (38) и (55). Равенство (38) в нашем случае запишется так

$$\ln|f(re^{i\alpha})|=(|b_j|\rho_j^{-1}\cos(\rho_j\alpha+\tau_j)+o(1))r^{\rho_j}. \tag{63}$$

Аналогично, если $\eta\in S(\beta)$, $r>a>r(\beta)$, то $\eta\in\omega_t^+$, $r_{2t}=+\infty$ и

$$\ln|f(re^{i\beta})|=(|b_\iota|\rho_\iota^{-1}\cos(\rho_\iota\beta+\tau_\iota)+o(1))r^{\rho_\iota}. \tag{64}$$

Если $\eta\notin(S(\alpha)\cup S(\beta))$, то $\eta\in\{z=re^{i\theta}:\ \alpha<\theta<\beta,\ r=\mathrm{const}\}\setminus(Q\cup\partial Q)$. Поэтому выполняется формула Макинтайра [10, с. 59–62]

$$\frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)}=\frac{rM_*'(r)}{M_*(r)}=K(r)\geqslant0,\ |\eta|=r, \tag{65}$$

$K(r)$– производная справа от $\ln M_*(r)$ по $\ln r$. Учитывая (59), (62), (27), (33), (65), получаем, что $\eta\in E_0$ и в точке η выполняется (29). Из (65), (29) получаем

$$(b+u(\eta))\eta^\rho=K(r)\geqslant0,\quad b=|b|e^{i\tau},\ \eta=re^{i\varphi},\ \varphi=\varphi(r),\ \eta\in E_0,\ |u(\eta)|<\delta/2,$$

$|\eta| > R$. Из предыдущего следуют асимптотические соотношения для аргумента

$$\rho\varphi + \tau = 2\pi n(1 + o(1)),\ r \to +\infty,$$
$$\cos(\rho\varphi + \tau) = 1 + o(1), \quad \cos(\rho\varphi + \tau) > 1/2, \tag{66}$$

n – целое число, ρ, τ, n принимают конечное число возможных значений ($\alpha < \varphi < \beta$). Так как $\eta \in E_0$, то $\eta \in \omega_t^-$ или $\eta \in \omega_t^+$. Из (37) следует, что если $r > R_2$, то $\eta \notin \omega_t^-$. Следовательно, $\eta \in \omega_t^+$. Если ω_t^+ – отрезок конечной длины, то выполняется (41), (43). Согласно (66), $\cos(\rho\varphi + \tau) > 1/2$. Поэтому из (43) следует

$$c(\ln x_2 - \ln x_1) > x_2 - x_1,\ x_1 = r_1^\rho,\ x_2 = r_2^\rho,\ c = 4(\varkappa + \sigma)|b|^{-1}. \tag{67}$$

Так как функция $x - c\ln x$ возрастает на промежутке $(c, +\infty)$, то (67) возможно, если $x_1 = r_1^\rho < x_* = \text{const}$. Поэтому существует r_* такое, что

$$(\forall\, \varphi \in (\alpha, \beta))\ (\forall\, \omega_t^+ \subset S(\varphi),\ \cos(\rho_t\varphi + \tau_t) > 1/2,\ r_{2t} < +\infty) \Longrightarrow S(\varphi) \cap \omega_t^+ = \varnothing,$$
$$S(\varphi) = \{z = re^{i\varphi} : \varphi = \text{const},\ r \geqslant r_*\}. \tag{68}$$

Точка $\eta \in S(\varphi)$. Учитывая (62), можно считать, что $|\eta| > a > r_*$, где r_* определено в (68) и не зависит от φ , следовательно, $\eta \in \omega_t^+$– отрезку бесконечной длины. Поэтому на луче $S(\varphi)$ выполняется (38). Тогда справедлива также формула (55). Таким образом для точки $\eta = re^{i\varphi,}$ в которой достигается максимум, аргумент φ, $\varphi = \varphi(r)$ принадлежит одному из s отрезков (α_j, β_j), на которых выполняются соотношения (55). Из (66) следует, что когда во второй из формул (55) $\theta = \varphi$ – аргументу точки максимума $\eta = re^{i\varphi}$, то $\cos(\rho\varphi + \tau) = 1 + o(1)$. Поэтому в точке η формула (55) запишется так

$$\ln|f(\eta)| = (|b| + o(1))r^\rho/\rho. \tag{69}$$

Таким образом, либо точка максимума $\eta \in (S(\alpha) \cup S(\beta))$, и выполняются равенства (63), (64), либо η принадлежит одной из s областей $\{z :\ \alpha_j \leqslant \arg z \leqslant \beta_j :\ |z| \geqslant a\}$, и выполняется (69). Из (63), (64), (69) следует оценка

$$\ln M_*(r) = (c + o(1))r^\rho, \quad c = \text{const} > 0,\ r \to +\infty,\ M_*(r) = \max_{z \in B(r)} |f(z)|. \tag{70}$$

Как уже отмечалось, из (57) и определения связной компоненты $\tilde{B}(r)$ следует $B(r) \subset D(r) \subset B(r) \cup Q(r)$. Поэтому, учитывая (58), (70),

$$M_*(r) = \max_{z \in B(r)} |f(z)| \leqslant M_{\alpha\beta}(r, f) = \max_{z \in D(r)} |f(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \max(\max_{z \in B(r)} |f(z)|, \max_{z \in Q(r)} |f(z)|) = \max_{z \in B(r)} |f(z)| = M_*(r).$$

Таким образом, $M_*(r) = M_{\alpha\beta}(r, f)$ и из (70) следует

$$\ln M_{\alpha\beta}(r, f) = (c + o(1))r^\rho, \quad c = \text{const} > 0,\ r \to +\infty.$$

Формула (10) доказана. □

Доказательство теоремы 3 в основных чертах повторяет доказательство теоремы 2, при этом вместо равенства (19) используется равенство

$$L(z) = (b + u(z))z^\rho \ln^\tau z, \quad z \in E_0,\ |z| \geqslant r_0,\ |u(z)| < \varepsilon_1;\ \rho, \tau \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{C},\ b \neq 0;$$

E_0– связная компонента множества $E_1 \backslash Q$ (см. [7] , форм. (17)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
3. Валирон Ж. Аналитические функции. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 235 с.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. В 2-х т.: т. 2. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
5. Mokhon'ko A.Z., Mokhon'ko V.D. *On order of growth of analytic solutions for algebraic differential equations having logarithmic singularity* // Matematychni Studii. – 2000. – V.13, №2. – P. 203–218.
6. Гольдберг А.А., Мохонько А.З. *О скорости роста решений алгебраических дифференциальных уравнений в угловых областях* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т.11, №9. – С.1568–1574.
7. Мохонько А.З., Мохонько В.Д. *Асимптотические оценки роста мероморфных решений дифференциальных уравнений в угловых областях* // Сиб. матем. журн. – 2000. – Т.41, №1. – С.185–199.
8. Шварц Л. Анализ. В 2-х т.: т.1. – М.: Мир, 1972. – 824 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.
10. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 467 с.

Национальный университет "Львовская политехника"

Поступило 21.02.2002