УДК 517.53

Ю. С. Трухан, М. М. Шеремета

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ДОБУТКУ БЛЯШКЕ

Yu. S. Troukhan, M. M. Sheremeta. *Boundedness of l-index of Blaschke product*, Matematychni Studii, **17** (2002) 127–137.

We investigate conditions on zeros of a Blaschke product under which it is an analytic function of bounded l-index in the unit disc.

Ю. С. Трухан, М. Н. Шеремета. *Ограниченность l-индекса произведения Бляшке* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.127–137.

Исследованы условия на нули, при которых произведение Бляшке является аналитической в единичном круге функцией ограниченного l-индекса.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, а послідовність (a_k) чисел з $\mathbb{D}$ занумерована в порядку неспадання модулів і задовольняє умову $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|) < +\infty$. Тоді добуток Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}$$

задає аналітичну і обмежену в $\mathbb{D}$ функцію, яка має на $\partial\mathbb{D}$ принаймні одну особливу точку.

Нехай l — додатна і неперевна на $[0,1)$ функція. Як і в [1, с. 71], припустимо, що для всіх $r \in [0,1)$

$$l(r) > \frac{\beta}{1-r}, \quad \beta = \text{const} > 1, \tag{1}$$

і аналітичну в $\mathbb{D}$ функція f називатимемо функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}. \tag{2}$$

Зауважимо, що еквівалентне означення обмеженості l-індексу аналітичної в $\mathbb{D}$ функції наведено в [2], де замість $l(|z|)$ в (2) стоїть $l\left(\dfrac{1}{1-|z|}\right)$, при цьому l — додатна і неперевна на $[1,+\infty)$ функція така, що $l(x)/x > \beta > 1$ для всіх $x \in [1,+\infty)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

ції і в [1, с. 71], для $q \in [0, \beta)$ означимо

$$\lambda_1(q) = \inf\left\{ \frac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \le \frac{q}{l(r_0)},\, 0 \le r_0 < 1 \right\},$$
$$\lambda_2(q) = \sup\left\{ \frac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \le \frac{q}{l(r_0)},\, 0 \le r_0 < 1 \right\}$$

і вважатимемо, що $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, якщо l задовольняє умову (1) і $0 < \lambda_1(r) \le \lambda_2(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, \beta)$. Неважко перевірити, що функція $l(r) = \dfrac{p}{(1-r)^\rho}$ з $p > \beta$ і $\rho \ge 1$ належить до $Q_\beta(\mathbb{D})$.

Якщо добуток Бляшке має нулі зі зростаючими до $+\infty$ кратностями, то він не може бути обмеженого l-індексу, яка б не була додатна і неперевна на $[0,1)$ функція l. З іншого боку, якщо аналітична в $\mathbb{D}$ функція f є обмеженого l-індексу з $l(r) = p/(1-r)$, $p > 1$, то, оскільки $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ з $\beta < p$, за теоремою 3.3 з [2, с. 71]

$$\ln |f(z)| = O\left(\int_0^{|z|} l(t)dt \right) = O\left(\ln \frac{1}{1-|z|} \right), \quad |z| \to 1.$$

Але добуток Бляшке є обмеженою в $\mathbb{D}$ функцією. Тому природно очікувати, що якщо послідовність нулів функції B не є дуже щільною, то B є обмеженого l-індексу з $l(r) = p/(1-r)$, $p > 1$. Правильною є наступна теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб добуток Бляшке B був обмеженого l-індексу з* $l(r) = \dfrac{p}{1-r}$, $p > 1$, *досить, щоб* $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-|a_n|}{1-|a_{n+1}|} > 1$, *і у випадку додатних нулів необхідно, щоб* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-a_n}{1-a_{n+1}} > 1$.

З умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (1-|a_k|) < +\infty$ випливає, що $k(1-|a_k|) \to 0\,(k \to \infty)$. Тому накладена на a_n умова в наступній теоремі є природною і близькою до необхідної.

Теорема 2. *Якщо* $k(1-|a_k|) \searrow 0$ $(k \to \infty)$, *то добуток Бляшке B є обмеженого l-індексу з* $l(r) = \dfrac{p}{(1-r)^2}$, $p > 1$.

Наступна теорема стосується обмеженості l-індексу добутку Бляшке у випадку довільної неспадної функції $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ з $\beta > 1$.

Теорема 3. *Нехай неспадна на $[0,1)$ функція $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ з $\beta > 1$, а нулі добутку Бляшке такі, що:*

1) $l(|a_{n+1}|) = O(l(|a_n|))$, $\quad n \to \infty$;

2) послідовність $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ *опукла, де* $b_0 = 0$ *і* $b_k = \dfrac{1}{1-|a_k|}$ *для* $k \ge 1$;

3) $k \ln k = O((1-|a_k|)l(|a_k|))$, $\quad k \to \infty$;

4) $\sum\limits_{k=2n}^{\infty} (1-|a_k|) = O((1-|a_n|)^2 l(|a_n|))$, $\quad n \to \infty$.

Тоді функція B є обмеженого l-індексу.

Доведення усіх трьох теорем ґрунтується на одному критерії обмеженості l-індексу аналітичної функції в термінах її логарифмічною похідної та розподілу нулів.

Нехай $a_k \in \mathbb{D}$ – нулі аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f, $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ і $q \in (0, \beta)$. Позначимо

$$G_q(f) = \bigcup_k \left\{ z: \, |z - a_k| \le \frac{q}{l(|a_k|)} \right\} \quad \text{i} \quad n(r, z_0, 1/f) = \sum_{|a_k - z_0| \le r} 1.$$

Безпосереднім наслідком з теореми 2.1 із [1, с. 27] з $G = \mathbb{D}$ і $l(z) = l(|z|)$ є наступний критерій обмеженості l-індексу аналітичної в $\mathbb{D}$ функції.

Лема 1. *Нехай $\beta > 1$ і $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$. Аналітична в $\mathbb{D}$ функція f є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли:*

1) для кожного $q \in (0, \beta)$ існує таке $P(q) > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus G_q(f)$

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \le P(q) l(|z|);$$

2) для кожного $q \in (0, \beta)$ існує таке $n^*(q) \in \mathbb{N}$, що для кожного $z_0 \in \mathbb{D}$

$$n\left(\frac{q}{l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{f} \right) \le n^*(q).$$

Зауваження 1. Умова 2) леми 1 виконується, якщо $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, і $|a_{k+1}| - |a_k| > > 2q_0/l(|a_k|)$ для деякого $q_0 \in (0, \beta)$ і всіх $k \ge k_0$.

Справді, припустимо, що для деякого $r \in (0, 1)$

$$r - \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)} \le |a_k| < |a_{k+1}| \le r + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)}.$$

Тоді $|a_{k+1}| - |a_k| \le \dfrac{2q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)}$ і

$$l(|a_k|) \le \lambda_2 \left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)} \right) l(r) \le \lambda_2(q_0) l(r),$$

тобто $|a_{k+1}| - |a_k| \le \dfrac{2q_0}{l(|a_k|)}$, що неможливо. Звідси випливає, що

$$n\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(|z_0|)}, z_0, \frac{1}{B} \right) \le 1$$

для всіх досить близьких до 1 значень $|z_0|$. Але кожний круг радіуса $q/l(|z_0|)$, $q > q_0/\lambda_2(q_0)$, можна покрити скінченною кількістю $m = m\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}, q\right)$ кругів радіуса $q_0/\lambda_2(q_0) l(|z_0|)$. Тому $n\left(q/l(|z_0|), z_0, 1/B\right) \le m$, тобто для функції B виконується умова 2) леми 1.

2. *Доведення теореми 1.* Почнемо з необхідності умови $\displaystyle\varlimsup_{n \to \infty} \frac{1 - a_n}{1 - a_{n+1}} > 1$. Припустимо, що вона не виконується, тобто $(1 - a_n) \sim (1 - a_{n+1})$, $n \to \infty$, і через $n(a_k, q)$ позначимо кількість тих a_j, які задовольняють умову

$$\left(1 - \frac{q}{p}\right)(1 - a_k) \le 1 - a_j \le \left(1 + \frac{q}{p}\right)(1 - a_k), \quad q \in (0, \beta), \; \beta < p.$$

Тоді $n(a_k, q) \to \infty$ $(k \to \infty)$ і, оскільки останні нерівності можна записати у вигляді

$$a_k - \frac{q}{p}(1 - a_k) \le a_j \le a_k + \frac{q}{p}(1 - a_k),$$

то $n(a_k, q) = n\left(q/l(a_k), a_k, 1/B\right)$ з $l(r) = p/(1-r)$, то звідси випливає, що умова 2) леми 1 не виконується і функція B не є обмеженого l-індексу з $l(r) = \dfrac{p}{1-r}$.

Перейдемо до доведення достатності умови $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-|a_n|}{1-|a_{n+1}|} > 1$, з якої випливає, що $\dfrac{1-|a_n|}{1-|a_{n+1}|} \ge \eta > 1$ для всіх $n \ge n_0$. Тоді

$$|a_{n+1}| - |a_n| = (1-|a_n|) - (1-|a_{n+1}|) \ge (1-|a_n|) - (1-|a_n|)/\eta = \frac{p(\eta-1)}{\eta l(|a_n|)}, \quad n \ge n_0,$$

і згідно із зауваженням 1 виконується умова 2) леми 1.

Залишається довести, що виконується умова 1) цієї леми. Легко перевірити, що

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_k z|}. \tag{3}$$

Якщо $z \in C_n = \{z : |a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|\}$, $n \ge n_0$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_k z|} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)} \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|a_n|-|a_k|} = \frac{2}{1-|a_n|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\dfrac{1-|a_k|}{1-|a_n|} - 1} \le$$

$$\le \frac{2}{1-|a_n|} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\eta^{n-k}-1} = \frac{2}{1-|a_n|} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\eta^j(1-\eta^{-j})} \le$$

$$\le \frac{2\eta}{(\eta-1)(1-|a_n|)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\eta^j} \le \frac{2\eta^2}{(\eta-1)^2(1-|a_n|)} \le \frac{2\eta^2}{(\eta-1)^2(1-|z|)} \tag{4}$$

і

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_k z|} \le \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|z|)(1-|z||a_k|)} \le$$

$$\le 2\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|}{((1-|z|)-(1-|a_k|))((1-|z|)+(1-|a_k|)-(1-|z|)(1-|a_k|))} =$$

$$= \frac{2}{(1-|z|)^2} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|}{\left(1-\dfrac{1-|a_k|}{1-|z|}\right)\left(\dfrac{1-|a_k|}{1-|z|}+|a_k|\right)} \le$$

$$\le \frac{2}{1-|z|} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|}{(1-|z|)\left(1-\dfrac{1-|a_k|}{1-|z|}\right)|a_k|} \le$$

$$\leq \frac{2}{1-|z|}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1-|a_k|}{(1-|a_{n+1}|)\left(1-\dfrac{1-|a_k|}{1-|a_{n+1}|}\right)|a_{n+2}|}\leq$$

$$\leq \frac{2}{(1-|z|)|a_{n+2}|}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{\eta^{k-n-1}(1-\eta^{-(k-n-1)})}\leq$$

$$\leq \frac{4\eta}{(\eta-1)(1-|z|)}\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1}{\eta^{k-n-1}}\leq 4\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^2\frac{1}{(1-|z|)}. \tag{5}$$

Тому для того, щоб довести, що виконується умова 1) леми 1 з $f(z)=B(z)$ і $l(r)=\dfrac{p}{1-r}$, $p>1$, досить довести, що якщо $z\in C_n$, $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_n|)$ і $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_{n+1}|)$, $0<q<p$, то

$$\frac{1-|a_n|}{|z-a_n||1-z\overline{a}_n|}+\frac{1-|a_{n+1}|}{|z-a_{n+1}||1-z\overline{a}_{n+1}|)}=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\quad n\to\infty,$$

а це співвідношення правильне, якщо

$$\frac{1}{|z-a_n|}+\frac{1}{|z-a_{n+1}|}=O\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\quad n\to\infty. \tag{6}$$

Якщо $z\in C_n$, $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|z|)$ і $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q}{p}(1-|z|)$, то

$$\frac{1}{|z-a_n|}+\frac{1}{|z-a_{n+1}|}\leq \frac{2p}{q(1-|z|)}. \tag{7}$$

Позаяк з нерівності $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_n|)$ випливає нерівність $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|z|)$, то (7) виконується, якщо $z\in C_n$, $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_n|)$ і $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q}{p}(1-|z|)$.

Залишився випадок, коли $z\in C_n$, $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_{n+1}|)$ і $|z-a_{n+1}|\leq \dfrac{q}{p}(1-|z|)$. У цьому випадку, по-перше, $|a_{n+1}|\leq |z|+\dfrac{q}{p}(1-|z|)$,

$$1-|a_{n+1}|\geq \left(1-\frac{q}{p}\right)(1-|z|)=\frac{p-q}{p}(1-|z|)$$

та $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q(p-q)}{p^2}(1-|z|)$ і, по-друге,

$$|z-a_n|\geq |z|-|a_n|=(1-|z|)\left(\frac{1-|a_n|}{1-|z|}-1\right)\geq$$

$$\geq (1-|z|)\left(\frac{1-|a_n|}{1-|a_{n+1}|}\frac{p-q}{p}-1\right)\geq (1-|z|)\left(\frac{\eta(p-q)}{p}-1\right)$$

(можемо вважати, що $q<p(\eta-1)/\eta$). Отже,

$$\frac{1}{|z-a_n|}+\frac{1}{|z-a_{n+1}|}\leq \left(\frac{p^2}{q(p-q)}+\frac{p}{\eta(p-q)-p}\right)\frac{1}{1-|z|}. \tag{8}$$

З (7) і (8) випливає (6), а з (5) і (6) випливає, що $|B'(z)/B(z)| \le P_1(q)/(1-|z|)$ для всіх $z \in \left(\bigcup_{n\ge n_0} C_n\right) \setminus G_q(B)$, $q < p(\eta-1)/\eta$. Для всіх $z \in \{|z| \le a_{n_0}\} \setminus G_q(B)$ за принципом максимуму модуля маємо $|B'(z)/B(z)| \le P_2(q) \le P_2(q)/(1-|z|)$.

Отже, для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus G_q(B)$, $q < p(\eta-1)/\eta$, правильна нерівність $|B'(z)/B(z)| \le P(q)l(|z|)$, тобто виконується умова 1) леми 1 і за цією лемою B є обмеженого l-індексу. Теорему 1 доведено. $\square$

3. *Доведення теореми 2.* Позначимо $a_k = 1/(k(1-|a_k|)$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\alpha_k} < +\infty, \quad \alpha_k \nearrow +\infty, \quad \ln k = O(\alpha_k)$$

і

$$|a_{k+1}| - |a_k| = \frac{1}{k\alpha_k} - \frac{1}{(k+1)\alpha_{k+1}} = \frac{k(\alpha_{k+1}-\alpha_k)+\alpha_{k+1}}{k(k+1)\alpha_k\alpha_{k+1}} \ge$$
$$\ge \frac{1}{k(k+1)\alpha_k} = \frac{(1+o(1))\alpha_k}{k^2\alpha_k^2} = \frac{(1+o(1))\alpha_k}{k^2\alpha_k^2} = (1+o(1))\alpha_k(1-|a_k|)^2 = \frac{(1+o(1))\alpha_k}{pl(|a_k|)}$$

при $k \to \infty$. Тому згідно із зауваженням 1 виконується умова 2) леми 1 і, якщо $z \in C_n = \{z : |a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|\}$, $n \ge n_0$, то, як і у доведенні теореми 1,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_k z|} \le 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|z|-|a_k|} = \frac{2}{(1-|z|)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|z|}{\dfrac{1-|a_k|}{1-|z|} - 1} \le$$
$$\le \frac{2}{(1-|z|)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_n|}{\dfrac{1-|a_k|}{1-|a_n|} - 1} = \frac{2}{(1-|z|)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\alpha_k}{n\alpha_n(n\alpha_n - k\alpha_k)} \le$$
$$\le \frac{2}{(1-|z|)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k\alpha_k}{n\alpha_n(n\alpha_k - k\alpha_k)} = \frac{2}{(1-|z|)^2 n\alpha_n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)} \le$$
$$\le \frac{2n\ln n}{(1-|z|)^2 n\alpha_n} \le \frac{K_1}{(1-|z|)^2}, \quad K_1 = \text{const} > 0 \tag{9}$$

і

$$\sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_k z|} \le \frac{2}{(1-|z|)^2} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|}{\left(1 - \dfrac{1-|a_k|}{1-|z|}\right)|a_k|} \le$$
$$\le \frac{2}{(1-|z|)^2|a_{n+2}|} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|}{1 - \dfrac{1-|a_k|}{1-|a_{n+1}|}} = \frac{2}{(1-|z|)^2|a_{n+2}|} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k\alpha_k - (n+1)\alpha_{n+1}} \le$$
$$\le \frac{2}{(1-|z|)^2|a_{n+2}|} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{(k-(n+1))\alpha_k} = \frac{2}{(1-|z|)^2|a_{n+2}|} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j\alpha_{j+n+1}} \le$$
$$\le \frac{K_2}{(1-|z|)^2}, \quad K_2 = \text{const} > 0. \tag{10}$$

Як і у доведенні теореми 1, залишилось довести, що

$$\frac{1}{|z-a_n|}+\frac{1}{|z-a_{n+1}|}=O\left(\frac{1}{(1-|z|)^2}\right), \quad n\to\infty. \tag{11}$$

для всіх $z\in C_n$, $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_n|)^2$ і $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_{n+1}|)^2$, $0<q<p$. Зрозуміло, що якщо $z\in C_n$, $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_n|)^2$ (отже, $|z-a_n|\geq \dfrac{q}{p}(1-|z|)^2$) і $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q}{p}(1-|z|)^2$, то (11) виконується. Якщо ж $z\in C_n$, $|z-a_{n+1}|\geq \dfrac{q}{p}(1-|a_{n+1}|)^2$ і $|z-a_{n+1}|\leq \dfrac{q}{p}(1-|z|)^2$, то $|a_{n+1}|\leq |z|+\dfrac{q}{p}(1-|z|)^2$ і

$$|z-a_{n+1}|\geq \frac{q}{p}(1-|a_{n+1}|)^2\geq \frac{q}{p}\left(1-|z|-\frac{q}{p}(1-|z|)^2\right)^2\geq \frac{q}{p}(1-|z|)^2\left(1-\frac{q}{p}\right)^2,$$

а

$$|z-a_n|\geq |z|-|a_n|=|a_{n+1}|-|a_n|+|z|-|a_{n+1}|\geq (1+o(1))\alpha_n(1-|a_n|)^2-\frac{q}{p}(1-|z|)^2\geq$$
$$\geq\left((1+o(1))\alpha_n-\frac{q}{p}\right)(1-|z|)^2, \quad n\to\infty,$$

тобто знову виконується (11).

З (3), (9), (10) і (11) випливає, що $|B'(z)/B(z)|\leq P_1(q)/(1-|z|)$ для всіх $z\in \left(\bigcup_{n\geq n_0}C_n\right)\setminus G_q(B)$. Подальше доведення теореми 2 таке ж, як і теореми 1. □

4. Доведення теореми 3. Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 2. *Нехай неспадна на $[0,1)$ функція $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$, і нулі (a_n) добутку Бляшке B такі, що:*

1) $l(|a_{n+1}|)=O(l(|a_n|)), \quad n\to\infty;$

2) $|a_{k+1}|-|a_k|>\dfrac{2q_0}{l(|a_k|)}$ *для деякого* $q_0\in(0,\beta)$ *і всіх* $k\geq k_0$*;*

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|^2}{(|a_n|-|a_k|)(1-|a_k||a_{n+1}|)}=O(l(|a_n|)), \quad n\to\infty;$

4) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|a_n|)(1-|a_k||a_n|)}=O(l(|a_n|)), \quad n\to\infty.$

Тоді функція B є обмеженого l-індексу.

Доведення. З умови 2) згідно із зауваженням 1 для функції B виконується умова 2) леми 1. Тому для того, щоб можна було скористатись лемою 1 досить довести, що функція B задовольняє умову 1) з $q\leq q_0$. З умови 2) і неспадання функції l випливає, що

$$|a_k|+\frac{q_0}{l(|a_k|)}<|a_{k+1}|-\frac{q_0}{l(|a_{k+1}|)}, \quad k\geq k_0.$$

Для $n\geq k_0$ позначимо

$$A_n=\left\{z:\ ||z|-|a_n||\leq\frac{q}{l(|a_n|)}, \quad |z-a_n|\geq\frac{q}{l(|a_n|)}\right\}, \quad n\geq 1,$$

$$B_n = \left\{ z : \ |a_n| + \frac{q}{l(|a_n|)} \le |z| \le |a_{n+1}| - \frac{q}{l(|a_{n+1}|)} \right\}, \quad n \ge 1.$$

Нехай спочатку $z \in A_n$. Для $k = n$ маємо

$$\frac{1-|a_n|^2}{|z-a_n||1-\overline{a}_n z|} \le \frac{1-|a_n|^2}{|z-a_n|(1-|a_n||z|)} \le \frac{1-|a_n|^2}{|z-a_n||1-|a_n|)} =$$
$$= \frac{1+|a_n|}{|z-a_n|} \le \frac{2}{q} l(|a_n|). \tag{12}$$

Якщо $k < n$, то

$$|a_n| - |a_k| - \frac{q}{l(|a_n|)} = (|a_n| - |a_k|)\left(1 - \frac{q}{(|a_n| - |a_k|)l(|a_n|)}\right) \ge$$
$$\ge (|a_n| - |a_k|)\left(1 - \frac{q}{(|a_n| - |a_{n-1}|)l(|a_n|)}\right) \ge (|a_n| - |a_k|)\left(1 - \frac{ql(|a_{n-1}|)}{2q_0 l(|a_n|)}\right) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}(|a_n| - |a_k|)$$

і

$$1 - |a_k|\left(|a_n| + \frac{q}{l(|a_n|)}\right) = 1 - |a_k||a_n| - \frac{q|a_k|}{l(|a_n|)} \ge$$
$$\ge 1 - |a_k||a_n| - \frac{q}{l(|a_n|)} = (1 - |a_k||a_n|)\left(1 - \frac{q}{(1-|a_k||a_n|)l(|a_n|)}\right) \ge$$
$$\ge (1 - |a_k||a_n|)\left(1 - \frac{q}{(1-|a_n|)l(|a_n|)}\right) \ge (1 - |a_k||a_n|)\left(1 - \frac{q}{\beta}\right),$$

а тому

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_k z|} \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{(|z|-|a_k|)(1-|a_k||z|)} \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{\left(|a_n| - |a_k| - \frac{q}{l(|a_n|)}\right)\left(1 - |a_k|\left(|a_n| + \frac{q}{l(|a_n|)}\right)\right)} \le$$
$$\le \frac{2\beta}{\beta - q} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_n| - |a_k|)(1-|a_k||a_n|)} \le \frac{2\beta}{\beta - q} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_n| - |a_k|)(1-|a_k||a_{n+1}|)}. \tag{13}$$

Якщо ж $k > n$, то подібно

$$|a_k| - |a_n| - \frac{q}{l(|a_n|)} = (|a_k| - |a_n|)\left(1 - \frac{q}{(|a_n| - |a_k|)l(|a_n|)}\right) \ge$$
$$\ge (|a_k| - |a_n|)\left(1 - \frac{q}{(|a_{n+1}| - |a_n|)l(|a_n|)}\right) \ge \frac{1}{2}(|a_k| - |a_n|)$$

і

$$1 - |a_k|\left(|a_n| + \frac{q}{l(|a_n|)}\right) \ge 1 - |a_k||a_n| - \frac{q}{l(|a_n|)} =$$
$$= (1 - |a_k||a_n|)\left(1 - \frac{q}{(1-|a_k||a_n|)l(|a_n|)}\right) \ge (1 - |a_k||a_n|)\left(1 - \frac{q}{\beta}\right),$$

а тому

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_kz|}\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{\left(|a_k|-|a_n|-\frac{q}{l(|a_n|)}\right)\left(1-|a_k|\left(|a_n|+\frac{q}{l(|a_n|)}\right)\right)}\le$$

$$\le\frac{2\beta}{\beta-q}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|a_n|)(1-|a_k||a_n|)}. \tag{14}$$

З (3), (12), (13) і (14) бачимо, що для всіх $z\in A_n$

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right|\le\frac{2}{q}l(|a_n|)+\frac{2\beta}{\beta-q}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|^2}{(|a_n|-|a_k|)(1-|a_k||a_{n+1}|)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|a_n|)(1-|a_k||a_n|)}\right\},$$

звідки, завдяки умовам 3) і 4), отримуємо

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right|\le P_1(q)l(|a_n|),\quad z\in A_n,\ n\ge k_0. \tag{15}$$

(Тут і надалі через P_j позначатимемо додатні сталі, залежні від q).

Нехай тепер $z\in B_n$. Тоді

$$\frac{1-|a_n|^2}{|z-a_n||1-|a_n||z|)}\le\frac{l(|a_n|)(1-|a_n|^2)}{q(1-|a_n|)}\le\frac{2}{q}l(|a_n|). \tag{16}$$

і

$$\frac{1-|a_{n+1}|^2}{|z-a_{n+1}||1-|a_{n+1}||z|)}\le\frac{l(|a_{n+1}|)(1-|a_{n+1}|^2)}{q(1-|a_{n+1}|)}\le\frac{2}{q}l(|a_{n+1}|). \tag{17}$$

Якщо $k<n$, то

$$|z|-|a_k|\ge|a_n|+\frac{q}{l(|a_n|)}-|a_k|\ge|a_n|-|a_k|,$$

$$1-|a_k||z|\ge1-|a_k||a_{n+1}|+\frac{q|a_k|}{l(|a_{n+1}|)}\ge1-|a_k||a_{n+1}|,$$

а тому

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_kz|}\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1-|a_k|^2}{(|a_n|-|a_k|)(1-|a_k||a_{n+1}|)}. \tag{18}$$

Якщо ж $k>n+1$, то

$$|a_k|-|z|\ge|a_k|-|a_{n+1}|+\frac{q}{l(|a_{n+1}|)}\ge|a_k|-|a_{n+1}|,$$

$$1-|a_k||z|\ge1-|a_k||a_{n+1}|+\frac{q|a_k|}{l(|a_{n+1}|)}\ge1-|a_k||a_{n+1}|,$$

а тому

$$\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k||1-\overline{a}_kz|}\le\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|a_{n+1}|)(1-|a_k||a_{n+1}|)}. \tag{19}$$

З (9), (16), (17), (18) і (19) бачимо, що для всіх $z \in B_n$

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| \le \frac{2}{q} l(|a_n|) + \frac{2}{q} l(|a_{n+1}|) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_n|-|a_k|)(1-|a_k||a_{n+1}|)} + \\ + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|a_{n+1}|)(1-|a_k||a_{n+1}|)},$$

звідки, завдяки неспаданню функції l, скориставшись умовами 3) і 4), отримуємо

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| \le P_2(q) l(|a_{n+1}|), \quad z \in B_n,\ n \ge k_0. \tag{20}$$

Якщо $z \in A_n\,(n \ge k_0)$, то $\lambda_1(q) l(|a_n|) \le l(|z|) \le \lambda_1(q) l(|a_n|)$ і з (15) отримуємо нерівність $\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| \le \frac{P_1(q)}{\lambda_1(q)} l(|z|)$, а якщо $z \in B_n\,(n \ge k_0)$, то за умовою 1) $l(|a_{n+1}|) = O(l(|a_n|)) = O(l(|z|))$, $n \to \infty$, і з (20) отримуємо нерівність $\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| \le P_3(q) l(|z|)$. Тому для всіх $z \in G_q(B)$, $|z| \in [r_0, 1)$, $r_0 = |a_{k_0}| - q/l(|a_{k_0}|)$ правильна нерівність $\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| \le P_4(q) l(|z|)$. Для всіх $z \in G_q(B)$, $|z| \in [0, r_0]$ за принципом максимуму модуля маємо

$$\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right| \le P_5(q) = \frac{P_5(q) l(|z|)}{\min\{l(t) : 0 \le t \le r_0\}}.$$

Отже, для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus G_q(B)$ правильна нерівність $|B'(z)/B(z)| \le P_6(q) l(|z|)$, тобто виконується умова 1) леми 1 і за цією лемою, B є обмеженого l-індексу. $\square$

Щоб довести теорему 3, треба перевірити виконання умов 2)–4) леми 2. З опуклості послідовності $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ випливає, що $\frac{b_n - b_k}{n-k} \ge \frac{b_n}{n}$ для всіх $k < n$ і, зокрема, $b_{k+1} - b_k \ge \frac{b_{k+1}}{k+1}$ для всіх $k \ge 1$, а також $b_n/n \ge b_k/k$ для всіх $k < n$. Тому, завдяки умові 3),

$$|a_{k+1}| - |a_k| = \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+1}} = \frac{b_{k+1} - b_k}{b_{k+1} b_k} \ge \frac{b_{k+1}}{(k+1) b_{k+1} b_k} = \\ = \frac{(1+o(1))(1-|a_k|)}{k} \ge \frac{2q_0}{l(|a_k|)}, \quad k \to \infty,$$

для кожного $q_0 \in (0, \beta)$ і всіх $k \ge k_0$, тобто умова 2) леми 2 виконується.

Далі, як і вище,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_n|-|a_k|)(1-|a_k||a_{n+1}|)} \le 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|a_n|-|a_k|} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_n b_k}{b_n - b_k} \le \\ \le 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n b_n b_k}{(n-k) b_n} \le 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \frac{k b_n}{n} = 2 b_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} = 2 b_n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k} \le \\ \le 2 b_n n \ln n = O(l(|a_n|)), \quad n \to \infty,$$

тобто виконується умова 3) леми 2.

Нарешті,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|a_n|)(1-|a_k||a_n|)} \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_n^2 b_k}{(b_k-b_n)(b_k+b_n-1)} \leq 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_n^2 b_k}{b_k^2-b_n^2}.$$

Але

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{b_n^2 b_k}{b_k^2-b_n^2} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{b_n^2 b_k}{(b_k-b_n)(b_k+b_n)} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{b_n^2 k}{(k-n)(b_k+b_n)} \leq$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{b_n k}{k-n} \leq 2nb_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2nb_n \ln n = O(l(|a_n|)), \quad n \to \infty$$

і, оскільки $b_k \geq b_{2n} \geq 2b_n$ для $k \geq 2n$,

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \frac{b_n^2 b_k}{b_k^2-b_n^2} \leq \frac{4}{3} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{b_n^2 b_k}{b_k^2} = \frac{4b_n^2}{3} \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{1}{b_k} = \frac{4}{3(1-|a_n|)^2} \sum_{k=2n}^{\infty} (1-|a_n|) = O(l(|a_n|)), \quad n \to \infty,$$

то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{(|a_k|-|a_n|)(1-|a_k||a_n|)} = O(l(|a_n|)), \quad n \to \infty,$$

тобто виконується умова 4) леми 2 і за цією лемою, функція B є обмеженого l-індексу. Теорему 3 доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sheremeta M. M. Analytic functions of bounded index. — Lviv: VNTL Publishers. – 1999. – 141 pp.
2. Строчик С.М., Шеремета М.М. *Аналітичні в крузі функції обмеженого індексу* // Доп. НАН України. – 1993. – №1. – С.19–22.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 14.03.2002