УДК 512.54

Е. В. Мунтян

ВЕРБАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ ОДНОРОДНЫХ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Ye. V. Muntyan. *Verbal subgroups of the automorphism groups of homogeneous rooted trees*, Matematychni Studii, **17** (2002) 117–126.

The verbal subgroups of the automorphism group of homogeneous rooted tree of odd valency are described.

Е. В. Мунтян. *Вербальные подгруппы групп автоморфизмов однородных корневых деревьев* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №2. – С.117–126.

Описаны вербальные подгруппы группы автоморфизмов однородного корневого дерева нечётной валентности.

Корневым деревом называется дерево с отмеченной вершиной — корнем дерева. Всякое корневое дерево является естественным образом градуированным: k-тым *уровнем* корневого дерева ($k > 0$) назы того дерева,фиксирующий его корень. Группу всех автоморфизмов корневого дерева T будем обозначать $\operatorname{Aut} T$. Если $\mathcal{T}_n$ — n-адическое дерево, то вместо $\operatorname{Aut}\mathcal{T}_n$ для упрощения будем писать $\mathcal{G}_n$.

Группы $\mathcal{G}_n, n \in \mathbb{N}$, образуют одну из стандартных серий проконечных групп. Они содержат различные примеры экстремальных групп, как-то группы бернсайдового типа, группы промежуточного роста, строго бесконечные (just infinite) группы и др. (см. обзор [1]). Это является одной из основных причин повышенного к ним интереса: исследованию строения групп $\mathcal{G}_n$ при различных n посвящены работы многих авторов. В частности, в работе [2] и монографии [3] исследовалось их нормальное строение, в работах [4], [5], [6] изучались классы сопряжённых элементов, в [6], [7], [8] — проблема представимости групп автоморфизмами корневых деревьев. В статье [9] изучены вербальные подгруппы группы финитарных (то есть действующих нетривиально лишь до некоторого уровня) автоморфизмов 2-адического дерева; позже ([10]) отмечено, что результат без изменений переносится на группу всех его автоморфизмов.

Основным результатом данной работы является описание всех вербальных подгрупп группы $\mathcal{G}_n$ при нечётных $n \geq 3$. Оказалось, что они образуют цепь, элементы которой строятся как геометрические прямые степени коммутанта группы $\mathcal{G}_n$ и его подгруппы, стабилизирующей первый уровень. Результаты работы были частично анонсированы в [11].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20E08, 20E18, 20F65.
Keywords:verbal subgroups, automorphism group, odd valency

doi:10.30970/ms.17.2.117-126

1. Вспомогательные сведения. Дерево $\mathcal{T}_n$ удобно реализовывать при помощи следующей конструкции. Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$ — n-элементный алфавит, X^* — множество всех конечных слов в алфавите X, включающее пустое слово Λ. На множестве X^* вводим отношение инцидентности, полагая, что два слова v_1 и v_2 из X^* соединены ребром в том и только в том случае, если одно из них получается из другого приписыванием справа буквы из алфавита X (слово Λ соединяем с однобуквенными словами). Легко видеть, что полученный граф с отмеченной вершиной Λ является n-адическим деревом, поэтому в дальнейшем мы будем говорить как о вершинах $\mathcal{T}_n$, так и о словах над алфавитом X. Очевидно, k-тый уровень дерева в таком представлении — это в точности множество всех слов длины k.

Если v — вершина $\mathcal{T}_n$, то поддеревом T_v, исходящим из вершины v называется поддерево $\mathcal{T}_n$, вершины которого — слова, начинающиеся на v; корневая вершина T_v — это слово v.

Из определения автоморфизма корневого дерева следует, что уровни дерева $\mathcal{T}_n$ инвариантны относительно действия группы $\mathcal{G}_n$, причём если $g \in \mathcal{G}_n$ — автоморфизм $\mathcal{T}_n$, то для любых $v_1, v_2 \in X^*$ длины общего начала для пар слов v_1, v_2 и $g(v_1), g(v_2)$ совпадают. Поддеревья T_x для всех $x \in X$ изоморфны дереву $\mathcal{T}_n$, поэтому для любого автоморфизма $g \in \mathcal{G}_n$ найдутся такие $g_1, \dots\ g_n \in \mathcal{G}_n$ и перестановка $\pi \in \mathrm{S}_n$, что

$$g(xv) = \pi(x) g_x(v), \quad x \in X, v \in X^*.$$

Это правило действия автоморфизма g будем записывать следующим образом:

$$g = (g_1, \dots, g_n)\pi. \tag{$*$}$$

Тождественную перестановку из S_n в такой записи мы будем опускать. Правило умножения для так записанных элементов $\mathcal{G}_n$ запишется следующим образом (преобразования действуют слева направо):

$$(g_1, \dots, g_n)\pi \cdot (h_1, \dots, h_n)\rho = (g_1 h_{\pi(1)}, \dots, g_n h_{\pi(n)})\pi\rho.$$

Элементы $\mathcal{G}_n$, которые в каждом слове могут менять только первую букву, составляют, очевидно, подгруппу, изоморфную S_n. Мы будем отождествлять эти автоморфизмы и перестановки, которые они индуцируют на множестве X.

Стабилизатором k-го уровня дерева $\mathcal{T}_n$ называется подгруппа $\mathrm{St}(k)$, состоящая в точности из тех элементов $\mathcal{G}_n$, которые не изменяют в словах из X^* начало длины k. Очевидно, группы $\mathrm{St}(k), k \in \mathbb{N}$, образуют нормальный ряд группы $\mathcal{G}_n$ с единичным пересечением и при любом $k \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\mathcal{G}_n/\mathrm{St}(k) \cong \mathrm{Aut}\, \mathcal{T}_n^{(k)},$$

где $\mathcal{T}_n^{(k)}$ — поддерево $\mathcal{T}_n$, вершинами которого являются слова длины $\le k$. Из вышесказанного следует, что для любого $g \in \mathrm{St}(k)$ существуют такие $g_i \in \mathcal{G}_n$, $i \in \{1, \dots, n^k\}$, что для любых слов $v \in X^k$ и $w \in X^*$

$$g(vw) = v g_i(w),$$

где i — номер слова v в лексикографическом упорядочении слов длины k. Символически будем изображать это следующим образом:

$$g = (g_1, \dots, g_{n^k}),$$

для $k = 1$ эта запись совпадает с $(*)$.

Определение 1. *Геометрическим произведением на k-ом уровне подгрупп G_i, $i \in$* $\{1, \ldots, n^k\}$, группы $\mathcal{G}_n$ называется подгруппа $(G_1, \ldots, G_{n^k}) \le \mathrm{St}(k)$, которая состоит в точности из таких $g = (g_1, \ldots, g_{n^k}) \in \mathcal{G}_n$, что $g_i \in G_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n^k\}$.

В частности, $\mathrm{St}(k) = (\underbrace{\mathcal{G}_n, \ldots, \mathcal{G}_n}_{n^k})$ и $\mathcal{G}_n = (\underbrace{\mathcal{G}_n, \ldots, \mathcal{G}_n}_{n})\mathrm{S}_n$.

2. Описание коммутанта. Если автоморфизм g из $\mathcal{G}_n$ представлен в виде $(*)$, то для каждого g_i, в свою очередь, найдутся $g_{i1}, \ldots, g_{in} \in \mathcal{G}_n$ и $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \mathrm{S}_n$ такие, что

$$g_i = (g_{i1}, \ldots, g_{in})\pi_i.$$

Неограниченно продолжая этот процесс, мы получаем описание элементов $\mathcal{G}_n$ с помощью их *портретов* — деревьев $\mathcal{T}_n$, вершины которых помечены перестановками из S_n (см. [1]). Например, группа $\mathrm{St}(k)$ состоит в точности из тех элементов $\mathcal{G}_n$, в портретах которых корневая вершина и вершины первых k уровней помечены тождественной перестановкой; в портрете единичного элемента группы $\mathcal{G}_n$ тождественной перестановкой помечены все вершины.

Определим отображение P из группы $\mathcal{G}_n$ в декартову сумму $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ счётного числа копий $\mathbb{Z}_2$ следующим образом:

$$P(g) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots),$$

где ε_k — чётность числа нечётных перестановок на k-ом уровне портрета g, или, что равносильно, чётность произведения перестановок k-того уровня портрета g. Из правила умножения элементов группы $\mathcal{G}_n$ и определения P легко следует, что P — эпиморфизм, причём

$$\ker P = \{(g_1, \ldots, g_n)\pi | g_1 g_2 \cdots g_n \in \ker P, \pi \in \mathrm{A}_n\},$$

где A_n — группа чётных перестановок на множестве X.

Образ гомоморфизма P — абелева группа, поэтому коммутант $\mathcal{G}_n'$ группы $\mathcal{G}_n$ лежит в $\ker P$. Ниже мы убедимся, что ядро гомоморфизма P совпадает с $\mathcal{G}_n'$. Для доказательства этого нам понадобится понятие сферической транзитивности автоморфизмов (см. напр. [3]).

Определение 2. Автоморфизм g дерева $\mathcal{T}_n$ называется *сферически транзитивным*, если он действует транзитивно на каждом уровне $\mathcal{T}_n$.

В [3] показано, что автоморфизм из $\mathcal{G}_n$ сферически транзитивен тогда и только тогда, когда он сопряжён в $\mathcal{G}_n$ со специальным автоморфизмом t, называемым “adding machine”и определяемым по правилу

$$t = (1, \ldots, 1, t)\sigma,$$

где σ — цикл $(12 \ldots n)$. Отсюда легко следует

Лемма 1. *Пусть $a \in \mathcal{G}_n$ определяется по правилу*

$$a = (1, \ldots, 1, a_1)\pi_1, \quad a_k = (1, \ldots, 1, a_{k+1})\pi_{k+1},\ k \ge 1,$$

где π_k — циклы длины n. Тогда a сферически транзитивен.

Доказательство. Покажем, что a сопряжен с adding machine t, то есть существует такой $x \in \mathcal{G}_n$, что $a^x = t$.

Поскольку π_k — циклы длины n, они сопряжены в S_n с циклом σ, т.е. для каждого $k \geq 1$ существует такая перестановка α_k, что $\alpha_k(n) = n$ и $\pi^{\alpha_k} = \sigma$. Определим $x \in \mathcal{G}_n$ следующим образом:

$$x = (x_1, \ldots, x_1)\alpha_1, \quad x_k = (x_{k+1}, \ldots, x_{k+1})\alpha_{k+1},\ k \geq 1.$$

Тогда

$$a^x = (1, \ldots, 1, a_1^{x_1})\sigma, \quad a_k^{x_k} = (1, \ldots, 1, a_{k+1}^{x_{k+1}})\sigma.$$

Каждый автоморфизм из $\mathcal{G}_n$ однозначно определяется своим портретом, поэтому $a^x = t$. $\square$

Лемма 2. *Любая чётная перестановка на n точках представляется в виде произведения двух циклов длины n.*

Доказательство. Индукция по n. Утверждение для $n \in \{1, 2, 3\}$ тривиально. Предположим, оно доказано для всех $k < n$, π — перестановка из A_n. Возможны три случая.

1) $\pi = \pi_1\pi_2$, где π_1 — чётная перестановка на множестве $\{a_1, \ldots, a_k\}$, π_2 — чётная перестановка на $\{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$, множество $\{1, \ldots, n\}$ — дизъюнктное объединение $\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $\{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$, причём $1 < k < n$. По предположению индукции

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (a_1 a_2 \ldots a_k)(a_1 b_2 \ldots b_k), & \{b_2, \ldots, b_k\} &= \{a_2, \ldots, a_k\}, \\ \pi_2 &= (a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_n)(a_{k+1} c_{k+2} \ldots c_n), & \{c_{k+2}, \ldots, c_n\} &= \{a_{k+2}, \ldots, a_n\}. \end{aligned}$$

Тогда $\pi = (a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_n)(a_1 c_{k+2} \ldots c_n a_{k+1} b_2 \ldots b_k)$.

2) n нечётно, π — цикл длины n. Тогда $\pi = \pi^2 \cdot \pi^{-1}$.

3) n чётно, $\pi = (a_1 \ldots a_{2k})(a_{2k+1} \ldots a_n)$, где $1 \leq k \leq \frac{n}{4}$. Тогда

$$\begin{aligned} \pi = {} & (a_1 a_{2k+1} a_2 a_{2k+2} \ldots a_{2k} a_{4k} a_{\frac{n}{2}+2k+1} a_{4k+1} a_{\frac{n}{2}+2k+2} a_{4k+2} \ldots a_n a_{\frac{n}{2}+2k}) \times \\ & \times (a_{2k+1} a_2 a_{2k+2} a_3 a_{2k+3} \ldots a_{2k} a_{4k} a_1 a_{\frac{n}{2}+2k+1} a_{4k+1} a_{\frac{n}{2}+2k+2} a_{4k+2} \ldots a_n a_{\frac{n}{2}+2k}). \end{aligned}$$

$\square$

Теорема 1. *Коммутант $\mathcal{G}_n'$ группы $\mathcal{G}_n$ совпадает с ядром гомоморфизма P, т.е. состоит в точности из тех автоморфизмов, в портретах которых произведение перестановок каждого уровня чётно.*

Каждый элемент $\mathcal{G}_n'$ является коммутатором. Более того, каждый элемент $\mathcal{G}_n'$ является произведением двух сферически транзитивных автоморфизмов.

Доказательство. В [4] показано, что каждый элемент группы $\mathcal{G}_n$ сопряжён в ней со своим обратным, поэтому коммутатор любых двух элементов $\mathcal{G}_n$ является произведением некоторых двух сопряжённых в $\mathcal{G}_n$ автоморфизмов. Таким образом, достаточно показать, что любой элемент из $\ker P$ является произведением двух сферически транзитивных автоморфизмов.

Итак, пусть $g \in \ker P$. Это означает, что $g = (g_1, \ldots, g_n)\pi$, где $g_1 g_2 \cdots g_n \in \ker P$, $\pi \in \mathrm{A}_n$. Будем строить $x \in \mathcal{G}_n$ и сферически транзитивный $u \in \mathcal{G}_n$ такие, что $g = uu^x$, индуктивно, уровень за уровнем. π — чётная перестановка, поэтому по лемме 2 существуют такие $\alpha, \beta \in S_n$, что α — цикл длины n и $\alpha\alpha^{\beta} = \pi$. Построим u и x такого вида:

$$u = (1, \ldots, 1, v)\alpha, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)\beta.$$

Прямым вычислением получаем

$$uu^x = (1, \ldots, 1, v)\alpha\beta^{-1}(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})(1, \ldots, 1, v)\alpha(x_1, \ldots, x_n)\beta =$$

$$= (x^{-1}_{\alpha\beta^{-1}(1)} v^{\delta(\alpha\beta^{-1}(1))} x_{\alpha\beta^{-1}\alpha(1)}, \ldots, x^{-1}_{\alpha\beta^{-1}(n-1)} v^{\delta(\alpha\beta^{-1}(n-1))} x_{\alpha\beta^{-1}\alpha(n-1)},$$

$$v x^{-1}_{\alpha\beta^{-1}(n)} v^{\delta(\alpha\beta^{-1}(n))} x_{\alpha\beta^{-1}\alpha(n)})\pi,$$

где $\delta(k) = 0$, если $k < n$ и $\delta(n) = 1$. Равенство $uu^x = g$ перепишем в виде системы

$$\begin{cases} x^{-1}_{\alpha\beta^{-1}(k)} v^{\delta(\alpha\beta^{-1}(k))} x_{\alpha\beta^{-1}\alpha(k)} = g_k, \ k \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ v x^{-1}_{\alpha\beta^{-1}(n)} v^{\delta(\alpha\beta^{-1}(n))} x_{\alpha\beta^{-1}\alpha(n)} = g_n. \end{cases}$$

Обозначим $\alpha\beta^{-1}(i) = k_i$. α — цикл длины n, поэтому $\alpha = (k_n k_{i_2} \ldots k_{i_n})$, где $\{i_2, \ldots, i_n\}$ — некоторая перестановка чисел $1, \ldots, n-1$. Тогда полученную систему можно переписать так

$$\begin{cases} v x^{-1}_{k_n} v^{\delta(k_n)} x_{k_{i_2}} &= & g_n, \\ x^{-1}_{k_{i_2}} v^{\delta(k_{i_2})} x_{k_{i_3}} &= & g_{i_2}, \\ \ldots & & \\ x^{-1}_{k_{i_{n-1}}} v^{\delta(k_{i_{n-1}})} x_{k_{i_n}} &= & g_{i_{n-1}}, \\ x^{-1}_{k_{i_n}} v^{\delta(k_{i_n})} x_{k_n} &= & g_{i_n}. \end{cases}.$$

Отсюда последовательно получаем

$$\begin{array}{rcl} x_{k_{i_n}} &=& v^{\delta(k_{i_n})} x_{k_n} g^{-1}_{i_n}, \\ x_{k_{i_{n-1}}} &=& v^{\delta(k_{i_{n-1}})} v^{\delta(k_{i_n})} x_{k_n} g^{-1}_{i_n} g^{-1}_{i_{n-1}}, \\ & & \ldots \\ x_{k_{i_2}} &=& v^{\delta(k_{i_2})} \ldots v^{\delta(k_{i_n})} x_{k_n} g^{-1}_{i_n} \cdots g^{-1}_{i_2}, \\ v x^{-1}_{k_n} v x_{k_n} &=& g_n g_{i_2} \cdots g_{i_n} \end{array}.$$

Таким образом, нахождение u и x свелось к нахождению v и x_{k_n} таких, что $vv^{x_{k_n}} = g_n g_{i_2} \cdots g_{i_n}$, причём произведение $g_n g_{i_2} \cdots g_{i_n}$ лежит в ядре гомоморфизма P.

Неограниченно продолжая этот процесс, мы получим искомые u и x, причём построенный таким образом u удовлетворяет условиям леммы 1, в силу чего является сферически транзитивным. □

Замечание 1. В случае группы автоморфизмов бинарного дерева $\mathcal{T}_2$ построенный в доказательстве теоремы 1 автоморфизм u совпадает с adding machine t. Поэтому каждый элемент $\mathcal{G}_2'$ является коммутатором $[t, x]$, где x — некоторый автоморфизм из $\mathcal{G}_2$.

Замечание 2. В силу теоремы 1 получаем рекуррентное соотношение для коммутанта группы $\mathcal{G}_n$:

$$\mathcal{G}_n' = \{(g_1, \ldots, g_n)\pi | g_1 g_2 \cdots g_n \in \mathcal{G}_n', \pi \in \mathrm{A}_n\} = \left(\mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1)\right) \cdot \mathrm{A}_n.$$

3. Вербальные подгруппы. Перейдем теперь к описанию вербальных и эндоморфно допустимых подгрупп группы $\mathcal{G}_n$. Определим следующую систему подгрупп

$$M_1 = \mathcal{G}_n',\ M_2 = \mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1),\ M_{k+2} = (\underbrace{M_k, \ldots, M_k}_{n}),\ k \geq 1.$$

В силу замечания 2 подгруппа $M_3 = (\underbrace{\mathcal{G}_n', \ldots, \mathcal{G}_n'}_{n}) = \{g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{St}(1) | g_i \in\ \mathcal{G}_n'\}$ содержится в M_2, поэтому группы M_k образуют убывающую цепь; её пересечение единично, поскольку

$$M_{2k+1} = (\underbrace{\mathcal{G}_n', \ldots, \mathcal{G}_n'}_{n^k}) < \mathrm{St}(k), M_{2k+2} = (\underbrace{\mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1), \ldots, \mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1)}_{n^k}) = M_{2k+1} \cap \mathrm{St}(k+1).$$

Лемма 3. *В любом смежном классе группы $\mathcal{G}_n$, $n \geq 3$ по коммутанту содержится элемент, квадрат которого равен 1.*

Доказательство. Пусть $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots) \in \mathbb{Z}_2$. Определим следующий элемент a группы $\mathcal{G}_n$:

$$a = (1, \ldots, 1, a_1)(12)^{\varepsilon_0}; \quad a_k = (1, \ldots, 1, a_{k+1})(12)^{\varepsilon_k},\ k \geq 1.$$

Очевидно, что $a^2 = 1$ и $P(a) = \overline{\varepsilon}$. $\square$

Наименьшую эндоморфно допустимую подгруппу группы $\mathcal{G}_n$, содержащую данный элемент $g \in \mathcal{G}_n$ назовём *эндоморфным замыканием* g и будем обозначать $\langle\langle g \rangle\rangle$; $\langle g \rangle^{\mathcal{G}_n}$ обозначает наименьшую нормальную в $\mathcal{G}_n$ подгруппу, содержащую g.

Лемма 4. *а) Если $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{St}(1)$, то $\langle g \rangle^{\mathcal{G}_n} \ni (g_{\pi(1)}^{x_1}, \ldots, g_{\pi(n)}^{x_n})$ для любых $x_i \in \mathcal{G}_n$ и $\pi \in \mathrm{S}_n$, в частности, $\langle g \rangle^{\mathcal{G}_n} \ni (g_1^{\varepsilon_1}, \ldots, g_n^{\varepsilon_n})$ $\varepsilon_i = \pm 1$;*

б) если $g = (g_1, 1, \ldots, 1) \in (\mathcal{G}_n, 1, \ldots, 1)$, то $\langle\langle g \rangle\rangle \geq (\langle\langle g_1 \rangle\rangle, \ldots, \langle\langle g_1 \rangle\rangle)$;

в) если $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathrm{St}(1)$, то для любого $h_1 \in \langle\langle g_1 \rangle\rangle$ существуют такие $h_2, \ldots, h_n \in \mathcal{G}_n$, что $\langle\langle g \rangle\rangle \ni (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)\pi$, тогда

$$g^x = \pi^{-1}(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})(g_1, \ldots, g_n)(x_1, \ldots, x_n)\pi = (g_{\pi^{-1}(1)}^{x_{\pi^{-1}(1)}}, \ldots, g_{\pi^{-1}(n)}^{x_{\pi^{-1}(n)}}),$$

откуда следует утверждение а). Из амбивалентности группы $\mathcal{G}_n$ следует, что $\langle g \rangle^{\mathcal{G}_n}$ содержит $(g_1^{\varepsilon_1}, \ldots, g_n^{\varepsilon_n})$.

Для доказательства утверждений б) и в) достаточно заметить, что если φ — эндоморфизм группы $\mathcal{G}_n$, то отображение $\overline{\varphi}$, определённое по правилу

$$\overline{\varphi}((g_1, \ldots, g_n)\pi) = (\varphi(g_1), \ldots, \varphi(g_n))\pi,$$

также является эндоморфизмом. $\square$

Лемма 5. *Если автоморфизм $g \in \mathcal{G}_n$, $n \geq 3$, не принадлежит $\mathcal{G}_n'$, то его эндоморфное замыкание $\langle\langle g \rangle\rangle$ совпадает со всей группой $\mathcal{G}_n$.*

Доказательство. Понятно, что $g \notin \mathcal{G}_n'$, тогда и только тогда, если $\Gamma(g) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$, где $\varepsilon_k \neq 0$ для некоторого k. Легко видеть, что множество H_g, состоящее в точности из тех элементов $\mathcal{G}_n$, в портрете которых произведение перестановок k-ого уровня чётно, является нормальной подгруппой в $\mathcal{G}_n$, причём $|\mathcal{G}_n : H_g| = 2$ и $g \notin H_g$. Поэтому для любого $a \in \mathcal{G}_n$ такого, что $a^2 = 1$, отображение φ, определённое по правилу

$$\varphi(h) = \begin{cases} 1, & h \in H_g, \\ a, & h \notin H_g, \end{cases}$$

будет гомоморфизмом, причём g не лежит в его ядре, если $a \neq 1$. Таким образом, в силу леммы 3, $\langle\langle g \rangle\rangle$ содержит полную систему представителей $\mathcal{G}_n$ по $\mathcal{G}_n'$.

Покажем теперь, что $\langle\langle g \rangle\rangle$ содержит коммутант $\mathcal{G}_n'$. Так как эта подгруппа содержит транспозицию $\tau = (1, \ldots, 1)(12)$, достаточно показать, что эндоморфное замыкание τ содержит $\mathcal{G}_n'$. Итак, покажем, что $\langle\langle \tau \rangle\rangle > \mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1)$ и $\langle\langle \tau \rangle\rangle > \mathrm{A}_n$ (см. замечание 2).

Пусть $a \in \mathcal{G}_n$. Тогда

$$\tau^{(a^{-1}, 1, \ldots, 1)}\tau = (a, 1, \ldots, 1)(12)(a^{-1}, 1, \ldots, 1)(12) = (a, a^{-1}, 1, \ldots, 1),$$

поэтому, по лемме 4, нормальное замыкание τ в группе $\mathcal{G}_n$ содержит $(a, a^x, 1, \ldots, 1)$ для любых $a, x \in \mathcal{G}_n$.

Если $h = aa^x$, то

$$(h, 1, \ldots, 1) = (a, a, 1, \ldots, 1)(a^x, a^{-1}, 1, \ldots, 1) \in \langle \tau \rangle^{\mathcal{G}_n}.$$

Следовательно, $\langle \tau \rangle^{\mathcal{G}_n} > (\mathcal{G}_n', 1, \ldots, 1)$, откуда по лемме 4 получаем, что $\langle \tau \rangle^{\mathcal{G}_n} > (\mathcal{G}_n', \ldots, \mathcal{G}_n'$
Пусть теперь $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathcal{G}_n'$. Тогда $h \in \langle \tau \rangle^{\mathcal{G}_n}$, поскольку

$$h = (h_1, h_1^{-1}, 1, \ldots, 1)(1, h_1h_2, h_2^{-1}h_1^{-1}, 1, \ldots, 1) \cdots \\ (1, \ldots, 1, h_1h_2 \cdots h_{n-1}, h_{n-1}^{-1} \cdots h_2h_1)(1, \ldots, 1, h_1h_2 \cdots h_n),$$

причём $h_1h_2 \cdots h_n \in \mathcal{G}_n'$.

Вместе с тем, $\langle \tau \rangle^{\mathcal{G}_n} \geq \langle \tau \rangle^{\mathrm{S}_n} = \mathrm{S}_n > \mathrm{A}_n$. $\square$

Лемма 6. *Если $h = (h_1, h_1, 1, \ldots, 1)$, где $h_1 \notin \mathcal{G}_n'$, то $\langle\langle h \rangle\rangle \geq \mathcal{G}_n \cap \mathrm{St}(1)$.*

Доказательство. $h_1 \notin \mathcal{G}_n'$, поэтому, по лемме 5, $\langle\langle h_1 \rangle\rangle = \mathcal{G}_n$. Отсюда, в силу леммы 4 $\langle\langle h \rangle\rangle \geq \{(a, a, 1, \ldots, 1) | a \in \mathcal{G}_n\}$. В доказательстве леммы 5 было установлено, что в этом случае $\langle\langle h \rangle\rangle$ содержит $\mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1)$. $\square$

Лемма 7. *Если $g \in \mathcal{G}_n' \setminus \mathrm{St}(1)$, то $\langle\langle g \rangle\rangle = \mathcal{G}_n$, $n \notin \{2, 4\}$.*

Доказательство. Очевидно, что отображение φ из $\mathcal{G}_n$ в себя, действующее по правилу

$$\varphi((g_1, \ldots, g_n)\pi) = \pi,$$

является эндоморфизмом с ядром $\mathrm{St}(1)$, поэтому, в силу того, что нормальное замыкание неединичной чётной перестановки в группе S_n, $n \neq 4$ совпадает с A_n, достаточно показать, что $\langle\langle \theta \rangle\rangle \geq \mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1)$, где θ — тройной цикл $(1, \ldots, 1)(123)$. Это включение следует из леммы 6 и из того, что для любого $a \in \mathcal{G}_n$

$$\theta^{(a^{-1}, 1, a^{-1}, 1, \ldots, 1)}\theta^{-1} = (a, a^{-1}, 1, \ldots, 1).$$

$\square$

Теорема 2. *При нечётном $n \geq 3$ все нетривиальные эндоморфно допустимые подгруппы группы $\mathcal{G}_n$ исчерпываются группами ряда $\mathcal{G}_n > M_1 > M_2 > \ldots$. Все эти подгруппы являются вербальными.*

Доказательство. I) Покажем, что если $g \in M_k \setminus M_{k+1}$, то $\langle\langle g \rangle\rangle \geq M_k$. Для $k = 1$ это лемма 7.

Пусть $g \in M_{2k} \setminus M_{2k+1}$, $k \geq 1$. Тогда $g = (g_1, \ldots, g_{n^k})$, где $g_i \notin \mathcal{G}_n'$ для некоторого i. В силу леммы 4 можно считать, что $i = 1$.

Поскольку n нечётно, то $P(g_j) \neq P(g_1)$ при некотором $j \in \{2, \ldots, n\}$ можно считать, что $j = 2$. Отсюда

$$\langle\langle g \rangle\rangle \ni (g_1 g_2, g_1 g_2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n^k - 2}),$$

причём $g_1 g_2 \notin \mathcal{G}_n'$. Из леммы 6 получаем, что

$$\langle\langle g \rangle\rangle \geq (\underbrace{\mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1), \ldots, \mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1)}_{n^{k-1}}) = M_{2k}.$$

Пусть теперь $g \in M_{2k+1} \setminus M_{2k+2}$. Тогда

$$g = (g_1, \ldots, g_{n^k}), \quad g_i \in \mathcal{G}_n', \ i \in \{1, \ldots, n^k\},$$

причём $g_k \notin \mathrm{St}(1)$ для некоторого k; можно считать, что $k = 1$. Существует такой $x \in \mathcal{G}_n$, что $g_1 g_1^x \notin \mathrm{St}(1)$, поэтому

$$\langle\langle g \rangle\rangle \ni (g_1 g_1^x, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n^k - 1}) = (g_1, g_2, \ldots, g_{n^k})(g_1^x, g_2^{-1}, \ldots, g_{n^k}^{-1}).$$

Следовательно, по лемме 4, поскольку $g_1 g_1^x \in \mathcal{G}_n' \setminus \mathrm{St}(1)$, имеем $\langle\langle g \rangle\rangle \geq (\underbrace{\mathcal{G}_n', \ldots, \mathcal{G}_n'}_{n^k}) = M_{2k+1}$.

II) Пусть e_n — экспонента группы A_n, то есть минимальное $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\pi^k = 1$ для любой перестановки π из A_n. Степень, в которой 2 входит в разложение числа e_n на простые множители, равна максимальному k такому, что цикл длины 2^k входит в состав какой-то перестановки из A_n. Поэтому для нечётного n

$$e_n = \begin{cases} 2^{k-1} o_n &, \quad n = 2^k + 1, \\ 2^k o_n &, \quad n = 2^k + p, 1 < p < 2^k, \end{cases}$$

где o_n нечётно. Покажем, что $M_2 = M_1^{e_n}$, то есть M_2 — группа, порождённая e_n-тыми степенями элементов M_1. В самом деле, $M_1^{e_n} \leq \mathcal{G}_n' \cap \mathrm{St}(1) = M_2$, поскольку $\mathrm{A}_n^{e_n} = 1$. Докажем обратное включение.

а) Пусть $n = 2^k + 1$. Тогда $e_n = 2^{k-1} o_n$ и

$$((\underbrace{\tau, 1, \ldots, 1}_{2^{k-1}}, \underbrace{\tau, 1, \ldots, 1}_{2^{k-1}}, 1)(12 \ldots 2^{k-1})(2^{k-1} + 1 \ldots 2^k))^{e_n} = (\underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{2^k}, 1)^{o_n} = (\underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{2^k}, 1),$$

так как $\tau^2 = 1$. Поэтому

$$M_1^{e_n} \ni (\tau, \tau, \underbrace{1, \ldots, 1}_{2^k - 1}) = (\tau, 1, \underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{2^k - 1})(1, \tau, \underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{2^k - 1}).$$

Отсюда, по пункту I, $M_1 \geq M_2$, так как M_1 — вербальная, а значит и эндоморфно допустимая подгруппа группы $\mathcal{G}_n$.

б) Пусть $n = 2^k + p, 1 < p < 2^k$. Тогда $e_n = 2^k o_n$ и

$$((\underbrace{\tau, 1, \ldots, 1}_{2^k}, \tau, \tau, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p-3}, \tau)(12 \ldots 2^k)(2^k + 12^k + 2))^{e_n} =$$

$$= (\underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{2^k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p})^{o_n} = (\underbrace{\tau, \ldots, \tau}_{2^k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p}).$$

Отсюда, как и в а), получаем, что $M_1^{e_n} \geq M_2$.

III) Имеет место равенство $M_3 = M_2^2$. Действительно, $\mathcal{G}_n / \mathcal{G}_n^{'}$ является элементарной абелевой 2-группой. Поэтому $M_3 \geq M_2^2$, так как если $g \in M_2$, то $g \in \mathrm{St}(1)$ и

$$(g_1, \ldots, g_n)^2 = (g_1^2, \ldots, g_n^2) \in (\mathcal{G}_n^{'}, \ldots, \mathcal{G}_n^{'}) = M_3.$$

С другой стороны, по лемме 3 для каждого g из $\mathcal{G}_n$ найдётся такой элемент $h_g \in \mathcal{G}_n$, что $P(h_g) = P(g)$, $h_g^2 = 1$.

Поэтому для любого $g \in \mathcal{G}_n$

$$(g^2, 1, \ldots, 1) = (g, h_g, 1, \ldots, 1)^2 \in M_2^2.$$

$\mathcal{G}_n / \mathcal{G}_n^{'}$ — группа периода 2, поэтому $\mathcal{G}_n^{'}$ порождается квадратами элементов $\mathcal{G}_n$. Отсюда $M_2^2 \geq (\underbrace{\mathcal{G}_n^{'}, \ldots, \mathcal{G}_n^{'}}_{n}) = M_3$.

IV) Покажем теперь, что M_{k+1} является степенью группы M_k для любого k.

Пусть $k \geq 1$. Тогда из пунктов II, III и определения групп M_k получаем, что

$$M_{2k+1} = (\underbrace{\mathcal{G}_n^{'}, \ldots, \mathcal{G}_n^{'}}_{n^k}) = (\underbrace{(\underbrace{\mathcal{G}_n^{'}, \ldots, \mathcal{G}_n^{'}}_{n}), \ldots, (\underbrace{\mathcal{G}_n^{'}, \ldots, \mathcal{G}_n^{'}}_{n})}_{n^{k-1}}) =$$

$$= (\underbrace{M_3, \ldots, M_3}_{n^{k-1}}) = (\underbrace{M_2, \ldots, M_2}_{n^{k-1}})^2 = M_{2k}^2$$

и

$$M_{2k+2} = (\underbrace{\mathcal{G}_n^{'} \cap \mathrm{St}(1), \ldots, \mathcal{G}_n^{'} \cap \mathrm{St}(1)}_{n^k}) = (\underbrace{M_2, \ldots, M_2}_{n^k}) = (\underbrace{M_1, \ldots, M_1}_{n^k})^{e_n} = M_{2k+1}^{e_n},$$

что и завершает доказательство теоремы. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И. *Автоматы, динамические системы и группы* // Труды мат. института им. Стеклова.- 2000.– Т.231.– С.134–214.

2. Сущанский В. И. *Нормальное строение групп изометрий полуконечных бэровских метрик* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры.– Институт математики АН Украины: Киев, 1993. 269–289.

3. Bass H., Otero-Espinar M. and others. Cyclic renormalization and the automorphism groups of rooted trees Lecture Notes in Mathematics. – V.1621.– Berlin:Springer, 1995.

4. Безущак О. О., Сущанский В. И. *Сопряженность в группах изометрий Бэровских метрик* // Укр. мат. журн. – 1991. – Т.43, №9. – С.1148–1155.

5. Гаврон П., Некрашевич В. В., Сущанский В. И. *Классы сопряженности группы автоморфизмов дерева* // Мат. заметки. – 1999. – Т.64, №6. – С.938–941.

6. Sidki Said. Regular Trees and their Automorphisms Monografias de Matematica. №56, Rio De Janeiro: IMPA, 1998.– 46 p.

7. Brunner A. M., Sidki S. *The generation of* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ *by finite state automata* // Int. J. of Algebra and Computation. – 1998. – №8. – C.127–139.

8. Сущанський В. І. *Вінцеві добутки за послідовностями груп підстановок та фінітно апроксимовні групи* // Доп. АН УРСР. – 1984. – №2. – С.19–21.

9. Сметанюк Н. В., Сущанский В. И. *Вербальные подгруппы группы финитарных автоморфизмов 2-адического дерева* // Фундамент. и прикл. математика. – 2000. – Т.6, №3. – С.875–888.

10. Одрибец Н. В., Сущанский В. И. *Вербальные подгруппы силовской p-подгруппы группы автоморфизмов p-адического дерева* // Матеріали III Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні.– Суми, 2001. – С.217–219.

11. Мунтян Е. В. *Вербальные подгруппы групп автоморфизмов деревьев* // Матеріали III Міжнародної алгебраїчної конференції в Україні. – Суми, 2001. – С.215–216.

Киевский национальный университет им. Т.Шевченка,
механико-математический факультет
muntyan@mail.univ.kiev.ua

Поступило 3.10.2001