УДК 517.51; 517.98

О. В. Маслюченко

СУКУПНА НЕПЕРВНІСТЬ KC-ФУНКЦІЙ

O. V. Maslyuchenko. *Joint continuity of KC-functions*, Matematychni Studii, **17** (2002) 75–80.

A problem on joint continuity of KC-functions (i.e. the functions which are quasicontinuous with respect to the first variable and continuous with respect to the second variable) is investigated. In particular, the following result is obtained: let X be an α-favourable space, Y a Valdivia compact space, and Z a metrizable space, then every KC-function $f\colon X\times Y\to Z$ has the Namioka property, i.e. there is a dense G_δ-set $A\subseteq X$ such that f is continuous at every point of $A\times Y$.

О. В. Маслюченко. *Совокупная непрерывность KC-функций* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №1. – С.75–80.

Изучается вопрос о совокупной непрерывности KC-функций, то есть функций, которые квазинепрерывные по первой переменной и непрерывные по второй. В частности, доказано, что если X — α-подходящее пространство, Y — компакт Валдивиа и Z — метризуемое пространство, то каждая KC-функция $f\colon X\times Y\to Z$ имеет свойство Намиоки, а именно, существует плотное G_δ-множество $A\subseteq X$, такое, что f непрерывна во всех точках множества $A\times Y$.

0. Вступ. При дослідженні множини $C(f)$ точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень $f\colon \prod_{i=1}^d X_i\to Z$ при $d>2$ часто бувають корисними теореми про сукупну неперервність *KC-функцій*, тобто функцій $f\colon X\times Y\to Z$, які квазінеперервні відносно першої змінної і неперервні відносно другої [1-9]. В теоремах такого типу на простір Y завжди накладаються деякі умови зліченності (перша або друга аксіома зліченності). Після праці Наміоки [10] з'явилося багато результатів [11-14], в яких теорема Наміоки узагальнювалася на випадок функцій багатьох змінних. Хоча в більшості з них [12-14] ідея квазінеперервності і відігравала значну роль, проте теорем про сукупну неперервність KC-функцій у випадку, коли на простір Y не накладаються умови зліченності, ці статті не містять. Тому, у зв'язку з цим постає, наприклад, таке питання: чи кожна KC-функція $f:X\times Y\to Z$ має *властивість Наміоки*:

$$\begin{array}{l}\text{існує всюди щільна } G_\delta\text{-множина } A\subseteq X, \text{ така,}\\ \text{що } f \text{ неперервна у всіх точках множини } A\times Y,\end{array}\tag{N}$$

якщо X — регулярний сильно зліченно повний, Y — компактний а Z — метризовний простори? Наскільки ми знаємо, це питання на сьогодні відкрите. Дуже добре відомо, що KC-функції мають властивість (N), якщо X — простір Бера, Y — метризовний

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46A45.

компакт і Z — метризовний. У цій статті ми, зокрема, доводимо, що властивість (N) мають KC-функції $f\colon X\times Y\to Z$, якщо X — α-сприятливий, Y — компакт Валдівіа і Z — метризовний простір. Зауважимо, що можна формулювати також питання про наявність точок сукупної неперервності KC-функцій на горизонталях. Зокрема В.Маслюченко і В.Михайлюк довели: якщо X — топологічний простір, Y — добуток континуальної сім'ї метризовних компактів, Z — метризовний простір і $f\colon X\times Y\to Z$ — KC-функція, то для кожного $y\in Y$ множина $C_y(f)=\{x\in X:(x,y)\in C(f)\}$ — залишкова. Цей результат у випадку, коли X — α-сприятливий, випливає і з нашої теореми. Крім цього, ми одержуємо споріднені результати про сукупну неперервність $\overline{K}C$-функцій і $\widetilde{K}C$-функцій і застосуємо їх до функцій багатьох змінних.

1. Основні означення та властивості. Нехай X, Y та Z — топологічні простори. Функція $f\colon X\to Y$ називається *квазінеперервною* якщо $x\in\overline{\mathrm{int} f^{-1}(V)}$ для довільних $x\in X$ і околу V точки $f(x)$. Розглянемо відображення $f:X\times Y\to Z$. Через f^x і f_y позначатимо функції, визначені рівністю $f^x(y)=f_y(x)=f(x,y)$. Покладемо $Y_K(f)=\{y\in Y\colon f_y$ — квазінеперервна $\}$. Функція f називається *K_BC-функцією*, де $B\subseteq Y$, якщо f неперервна відносно y і $Y_K(f)\supseteq B$. Якщо f є K_BC-функцією для деякої всюди щільної множини B (множини B, яка містить всюди щільну G_δ-підмножину) то функцію f називатимемо *$\overline{K}C$-функцією* (*$\widetilde{K}C$-функцією*).

Нехай $\Sigma(T)$ множина всіх функцій $x\in[0,1]^T$, для яких $x(t)=0$ всюди за винятком зліченної кількості $t\in T$. Компактний простір, гомеоморфний до деякого підпростору $X\subseteq[0,1]^T$, такого, що $X\subseteq\Sigma(T)$ ($\overline{X\cap\Sigma(T)}=X$) називається *компактом Корсона* (*компактом Валдівіа* [15]). Зрозуміло, що клас компактів Валдівіа ширший за клас компактів Корсона, який, в свою чергу, ширший за клас компактів Еберлейна.

Наступне означення є основним у подальшому викладі. Підмножина A топологічного простору X називається *відносно m-компактною в X*, якщо замикання в X будь-якої її зліченної підмножини є метризовним компактом. Якщо X — відносно m-компактний в собі, то казатимемо, що X — *m-компактний простір.* Якщо ж X має всюди щільну відносно m-компактну підмножину в X, то простір X називатимемо *$\overline{m}$-компактним.* Неважко переконатися, що кожна множина $A\subseteq\Sigma(T)$ є відносно m-компактною в $[0,1]^T$. Тому компакти Корсона є m-компактними, а компакти Валдівіа — $\overline{m}$-компактними просторами. Справедливе наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай A_t — відносно m-компактна підмножина топологічного простору X_t, для $t\in T$, $X=\prod_{t\in T}X_t$, $a\in\prod_{t\in T}A_t$ і A — підмножина Σ-добутку $\sum\prod_{t\in T}A_t=\{x\in X:|\{t\in T:x(t)\neq a(t)\}|\leq\aleph_0\}$. Тоді A — відносно m-компактна в X. Зокрема, m-компактність ($\overline{m}$-компактність) стабільна відносно зліченних (довільних) добутків, а також відносно Σ-добутків.*

Доведення. Нехай E — деяка зліченна підмножина A і $S=\bigcup_{x\in E}\{t\in T:x(t)\neq a(t)\}$. Зрозуміло, що S — зліченна. Нехай $Y_s=\overline{\mathrm{pr}_s(E)}$ для $s\in S$. Оскільки A_s — відносно m-компактні, то Y_s — метризовний компакт для кожного $s\in S$. Тоді, оскільки $\overline{E}$ гомеоморфний деякому підпростору добутку $\prod_{s\in S}Y_s$. то $\overline{E}$ — метризовний компакт. □

2. Зведення до дійснозначних функцій. В цьому пункті ми зведемо питання про сукупну неперервність відображень зі значеннями в довільному метризовному просторі до випадку дійсних функцій.

Лема. *Нехай T — топологічний, X — нормований простори, K — одинична куля в X^* зі слабкою* топологією і $f\colon T \to X$. Тоді відображення f неперервне в точці $t_0 \in T$ тоді і тільки тоді, коли відображення $g\colon T \times K \ni (t,k) \mapsto k(f(t)) \in \mathbf{R}$ неперервне у всіх точках множини $\{t_0\} \times K$.*

Доведення. Припустимо,що f — неперервна в t_0. Нехай $k_0 \in K$. Розглянемо напрямленість $(t_m, k_m) \to (t_0, k_0)$, $m \in M$. Тоді

$$|g(t_m,k_m) - g(t_0,k_0)| \le |k_m(f(t_0)) - k_0(f(t_0))| + |k_m(f(t_m) - f(t_0))| \le$$

$$\le |(k_m - k_0)(f(t_0))| + \|k_m\| \cdot \|f(t_m) - f(t_0)\| \to 0,$$

адже $k_m \to k_0$ слабко*, $f(t_m) \to f(t_0)$ за нормою і $\|k_m\| \le 1$.

Нехай тепер g неперервна на $\{t_0\} \times K$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і для кожного $k \in K$ виберемо околи U_k точки t_0 і V_k точки k, такі, що $|g(t,l) - g(t_0,k)| < \varepsilon/2$ для довільних $t \in U_k$ і $l \in V_k$. Оскільки K — компакт, то $K = V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_n}$ для деяких $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$. Приймемо $U = U_{k_1} \cap \dots \cap U_{k_n}$. Візьмемо довільні $t \in U$ і $k \in K$. Тоді $k \in V_{k_i}$ для деякого i. Оскільки $(t,k), (t_0,k) \in U_{k_i} \times V_{k_i}$, то

$$|g(t,k) - g(t_0,k)| \le |g(t,k) - g(t_0,k_i)| + |g(t_0,k_i) - g(t_0,k)| < \varepsilon.$$

Тепер, врахувавши, що $\|x\| = \sup_{k \in K} |k(x)|$ для $x \in X$, одержуємо

$$\|f(t) - f(t_0)\| = \sup_{k \in K} |k(f(t)) - k(f(t_0))| = \sup_{k \in K} |g(t,k) - g(t_0,k)| \le \varepsilon,$$

для довільного $t \in U$. □

Тепер ми можемо довести наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай X та Y — топологічні простори, а Z — метризовний простір ваги $\aleph$, K — одинична куля в $l_2(\aleph)$ зі слабкою топологією, B — щільна в Y, $\widetilde{Y} = Y \times K$, $\widetilde{B} = B \times K$. Тоді, якщо кожна $K_{\widetilde{B}}C$-функція $\tilde{f}: X \times \widetilde{Y} \to \mathbf{R}$ має властивість (N), то і кожна K_BC-функція $f\colon X \times Y \to Z$ має властивість (N).*

Доведення. Оскільки [16, с.427] $l_2(\aleph)$ універсальний для всіх метризовних просторів ваги $\le \aleph$, то без обмеження загальності можна вважати, що $Z \subseteq l_2(\aleph)$. Крім цього, оскільки $l_2(\aleph)$ лінійно ізометричний з $(l_2(\aleph))^*$, то можна вважати, що K — одинична куля в $(l_2(\aleph))^*$ зі слабкою* топологією. Розглянемо тепер деяку K_BC-функцію $f\colon X \times Y \to Z$ і приймемо $\tilde{f}(x,\tilde{y}) = k(f(x,y))$ для довільних $x \in X$ і $\tilde{y} = (y,k) \in \widetilde{Y}$. Оскільки функціонали $k \in K$ неперервні, то функції $\tilde{f}_{\tilde{y}} = k(f_y)$ квазінеперервні для довільного $\tilde{y} = (k,y) \in \widetilde{B}$. Крім цього, за лемою функції $\tilde{f}^x(\tilde{y}) = k(f^x(y))$ неперервні на $\widetilde{Y}$ для кожного $x \in X$. Отже, $\tilde{f}$ є дійснозначною $K_{\widetilde{B}}C$-функцією. Тому $\tilde{f}$ має властивість (N). Нехай A така всюди щільна G_δ-підмножина X, що $\tilde{f}$ — неперервна на $A \times \widetilde{Y} = (A \times Y) \times K$. Скориставшись знову лемою, одержуємо, що f неперервна на множині $A \times Y$.

□

3. Основий результат. Нехай X — топологічний простір. Через $\mathcal{U}_X$ позначимо систему всіх відкритих непорожніх його підмножин. Простір X називатимемо

α-сприятливим [17], якщо існує відображення $\sigma\colon \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_X^n \to \mathcal{U}_X$, таке, що $\sigma(U_1,\dots,U_n) \subseteq U_n$ і для довільної послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ перетин $\bigcap U_n \neq \emptyset$, у випадку, коли $U_{n+1} \subseteq \sigma(U_1,\dots,U_n)$. Як відомо [17], α-сприятливі простори є беровими. Крім того, локально компактні, повнометризовні, сильно зліченно повні простори є α-сприятливими. А також [18], α-сприятливість інваріантна відносно довільних добутків.

Перш ніж приступити до формулювання і доведення основного результату, нагадаємо деякі позначення. Приймемо, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$, $\Delta = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$. Множина $\{0,1\}^0$ складається з порожнього набору ϕ. Символом $|d|$ позначатимемо кількість елементів набору $d \in D$, а символом $d|n$ — набір з перших n елементів послідовності $d \in D \cup \Delta$ ($d|0 = \phi$). Крім цього, $d,i = (d_1,\dots,d_n,i)$ для $d = (d_1,\dots,d_n) \in D$ та $i = 0,1$.

Теорема. *Нехай X — α-сприятливий, Y — топологічний, Z — метризовний простори, B — щільна відносно m-компактна в Y і $f\colon X\times Y \to Z$ — K_BC-функція. Тоді f має властивість (N).*

Доведення. Оскільки одинична куля в $l_2(\aleph)$ зі слабкою топологією є компактом Еберлейна, а отже, і m-компактним простором, тому згідно з твердженнями 1 і 2 можна вважати, що $Z = \mathbf{R}$. Нехай $\varphi\colon X \to C(Y)$ — асоційоване з f відображення, тобто $\varphi(x) = f^x$. Зрозуміло, що $C(\varphi)\times Y \subseteq C(f)$. Отже, досить довести, що для кожного $\varepsilon > 0$ множина $D_\varepsilon = \{x \in X : \omega_\varphi(x) \geq \varepsilon\}$ ніде не щільна, де ω_φ — коливання φ. Припустимо, що це не так і для деякого $\varepsilon > 0$ множина $D_{2\varepsilon}$ щільна в деякій множині $U_\phi \in \mathcal{U}_X$. Оскільки $D_{2\varepsilon}$ — замкнена, то $U_\phi \subseteq D_{2\varepsilon}$. Тоді для довільної $U \in \mathcal{U}_X$ з $U \subseteq U_\phi$ існують $x_1, x_2 \in U$, такі, що $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| > \varepsilon$. Оскільки $\overline{B} = Y$ і $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \in C(Y)$, то

$$\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| = \sup_{y\in B}|f(x_1,y) - f(x_2,y)| > \varepsilon$$

Отже, $|f(x_1,b) - f(x_2,b)| > \varepsilon$ для деякого $b \in B$. Покладемо $\varepsilon_1 = (|f(x_1,b) - f(x_2,b)| - \varepsilon)/2$. Приймаючи до уваги квазінеперервність f_b отримаємо, що існують $U', U'' \in \mathcal{U}_X$ з $U', U'' \subseteq U_\phi$, такі, що $|f(x',b) - f(x_1,b)| < \varepsilon$ для $x' \in U'$ і $|f(x'',b) - f(x_2,b)| < \varepsilon$ для $x'' \in U''$. Тоді для $x' \in U'$ і $x'' \in U''$ маємо

$$|f(x',b) - f(x'',b)| \geq |f(x_1,b) - f(x_2,b)| - |f(x',b) - f(x_1,b)| -$$

$$-|f(x'',b) - f(x_2,b)| > |f(x_1,b) - f(x_2,b)| - 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Отже, ми довели наступну властивість:

$$\begin{gathered}(\forall\, U \subseteq U_\phi)\ (\exists\, b \in B)\ (\exists\, U', U'' \subseteq U)\ (\forall\, x' \in U')\ (\forall\, x'' \in U''):\\ |f(x',b) - f(x'',b)| > \varepsilon\end{gathered} \tag{2}$$

де $U, U', U'' \in \mathcal{U}_X$. Нехай σ — таке відображення, яке забезпечує α-сприятливість X. Побудуємо спадну діадичну сім'ю множин $U_d \in \mathcal{U}_X$, і точок $b_d \in B$, $d \in D$, таку, що $U_d \subseteq \sigma(U_{d|n} : n < |d|)$ і

$$\forall\, x' \in U_{d,0}\ \forall\, x'' \in U_{d,1} \quad |f(x', b_d) - f(x'', b_d)| > \varepsilon. \tag{2}$$

Множину U_ϕ вже визначено. Припустимо, що вже побудовані b_d для $|d| < n$ і U_d для $|d| \leq n$. Візьмемо d з $|d| = n$. За множини $U_{d,0}$, $U_{d,1}$ і точку b_d приймемо U', U'' і b, вибрані для множини $U = \sigma(U_{d|n} : n \le |d|)$ згідно з (1). Зрозуміло, що тоді виконується (2).

Тепер, оскільки $U_{\delta|n} \subseteq \sigma(U_{\delta|m} : m < n)$ для $\delta \in \Delta$ і $n \in \mathbf{N}$, то $\bigcap_n U_{\delta|n} \ne \emptyset$. Візьмемо $x_\delta \in \bigcap_n U_{\delta|n}$. Нехай $K = \overline{\{b_d : d \in D\}}$. Позаяк B — відносно m-компактна, то K — метризовний компакт. Приймемо $g_\delta = \varphi(x_\delta)|_K$. Нехай $\delta' \ne \delta'' \in \Delta$, $n = \max\{m : \delta'|m = \delta''|m\}$ і $d = \delta'|n = \delta''|n$. Оскільки $\delta'|(n+1) \ne \delta''|(n+1)$, то можна вважати, що $\delta'|(n+1) = d,0$ і $\delta''|(n+1) = d,1$. Тоді $x_{\delta'} \in U_{d,0}$ і $x_{\delta''} \in U_{d,1}$. Тому, згідно з (2) матимемо, що $|g_{\delta'}(b_d) - g_{\delta''}(b_d)| > \varepsilon$. Отже, $\|g_{\delta'} - g_{\delta''}\| > \varepsilon$. Але множина Δ континуальна, тому простір $C(K)$ — несепарабельний, що суперечить тому, що K — метризовний компакт. $\square$

З цієї теореми легко одержуються два наслідки про сукупну неперервність $\overline{K}C$- і $\widetilde{K}C$-функцій.

Наслідок 1. *Нехай X — α-сприятливий, Y — m-компактний (наприклад, компакт Корсона) і Z — метризовний простори. Тоді кожна $\overline{K}C$-функція $f\colon X \times Y \to Z$ має властивість (N).*

Доведення. Досить прийняти $B = Y_K(f)$ і скористатись теоремою. $\square$

Наслідок 2. *Нехай X — α-сприятливий, Y — регулярний $\overline{m}$-компактний (наприклад, компакт Валдівіа) і Z — метризовний простори. Тоді кожна $\widetilde{K}C$-функція $f\colon X \times Y \to Z$ має властивість (N).*

Доведення. Нехай Y_0 — відносно m-компактна щільна підмножина Y. Легко переконуємось, що множина $Y_1 = \bigcup\{\overline{S} : S \subseteq Y_0,\ |S| \le \aleph_0\}$ є щільним m-компактним підпростором Y. Зокрема, Y_1 — зліченно компактний, а отже, берів. Тому, оскільки $Y_K(f)$ залишкова в Y, то $B = Y_1 \cap Y_K(f)$ — щільна відносно m-компактна підмножина Y. Залишилось скористатися теоремою 3.1. $\square$

Наслідок 3. *Нехай X_1 — α-сприятливий, $X_2, \dots, X_d$ — регулярні $\overline{m}$-компактні, Z — метризовний простори і функція $f\colon \prod_{i=1}^d X_i \to Z$ квазінеперервна відносно першої змінної і неперервна відносно інших. Тоді $f\colon \prod_{i=1}^{d-1} X_i \times X_d \to Z$ має властивість (N).*

Доведення. У доведенні пепереднього наслідку одержали, що кожний регулярний $\overline{m}$-компактний простір містить щільний зліченно компактний підпростір, а тому він псевдокомпактний і α-сприятливий. Отже, всі добутки $\prod_{i=1}^n X_i$ з $n \le d$ є α-сприятливими. Тому, використовуючи попередній наслідок і індукцію по d, отримуємо потрібний результат. $\square$

На завершення хочу подякувати В.К. Маслюченку за постановку задачі і постійну увагу до роботи автора статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hahn H. *Über Funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind* // Math. Zeitshr. - 1919. - Bd.4. - S.306-319.

2. Hahn H. Reelle Funktionen.1. Punktfunktionen. - Leipzig: Academische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932. - 416 S.

3. Bögel K. *Über partiell differenzierbare Funktionen* // Math. Zeishr. - 1926. - Bd.25. - S.490-498.

4. Kempisty S. *Sur les fonctions quasicontinues* // Fund. Math. - 1932. - V.19. - P.184-197.

5. Martin N.F.G. *Quasi-continuous functions on product spaces* // Duke Math. J. - 1961. - V.28. - P.30-44.

6. Breckenridge J.C., Nishiura T. *Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces* // Bull. Inst. Acad. Sinica. - 1976. - V.4, N2. - P.191-203.

7. Маслюченко В.К. *Сукупна неперервність нарізно неперервних відображень* // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. Зб. наук. праць за ред. С.Д.Івасишена. - Чернівці, 1990. - С.143-159.

8. Маслюченко В.К. *Простори Гана і задача Діні* // Мат. методи і фіз-мех. поля. - 1998. - Т.41, №4. - С.39-45.

9. Маслюченко В.К. *Нарізно неперервні відображення від багатьох змінних зі значеннями в σ-метризовних просторах* // Нелінійні коливання. - 1999. - Т.2, №3. - С.337-344.

10. Namioka I. *Separate continuity and joint continuity* // Pacif. J. Math. - 1974. - V.51, №2. - P.515-531.

11. Talagrand M. *Espaces de Baire et espaces de Namioka* // Math. Ann. - 1985. - V.270, №2. - P.159-164.

12. Troallic J.P. *Qausicontinuité, continuité séparée et topologie extrémale* // Proc. Amer. Math. Soc. - 1990. - V.110, №3. - P.819-827.

bibitem13. Hansel G., Troallic J.-P. *Quasicontinuity and Namioka's theorem* // Topol. Appl. - 1992. - V.46, №2. - P.135-149.

13. Маслюченко О.В. *Неперервність нарізно неперервних функцій на графіках многозначних відображень* // Матеріали студентської наукової конференції ЧДУ. Кн.3. Фіз.-мат. науки. - Чернівці, 1999. - С.24-25.

14. Bouziad A. *Notes sur la propriété de Namioka* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1994. - V.344, №2. - P.873-883.

15. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986. - 752с.

16. Saint-Raymond J. *Jeux topologiques et espaces de Namioka* // Proc. Amer. Math. Soc. - 1983. - V.87, №3. - P.409-504.

17. Chtistensen J.P.R. *Joint continuity of separately continuous functions* // Proc. Amer. Math. Soc. - 1981. - V.82, №3. - P.455-461.

Чернівецький державний університет

Надійшло 23.07.01