УДК 517.98

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк

ПРО ЗБІГ ПРОСТОРІВ КЕТЕ З СІМ'Ї $(L_P(R) : 0 < P \leq \infty)$

V. K. Maslyuchenko, V. V. Mykhailyuk *On the coincidence of Kete's spaces from the family* $(l_p(r) : 0 < p \leq \infty)$, Matematychni Studii, **17** (2002) 67–74.

We study cases when the spaces $l_p(R)$ of multipliers from R to l_p by $0 < p \leq \infty$ coincide. In particular, it is shown that the condition $l_p(R) = l_q(R)$ for some $0 < p < q < \infty$ implies $l_p(R) = l_\infty(R)$.

В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк. *О совпадении просторов Кете из семьи* $(l_p(r) : 0 < p \leq \infty)$ // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №1. – С.67–74.

Исследуются возможные случаи совпадения пространств $l_p(R)$ мультипликаторов из R в l_p при $0 < p \leq \infty$. В частности, показано, что если $l_p(R) = l_q(R)$ для некоторых $0 < p < q < \infty$, то $l_p(R) = l_\infty(R)$.

1. Розглянемо алгебру $\Omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ всіх послідовностей $x = (\xi_k : k \in \mathbb{N})$ елементів з поля скалярів $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ відносно операцій покоординатного додавання, множення і множення на скаляр. Для простору послідовностей L, тобто векторного підпростору алгебри Ω, і множини $R \subseteq \Omega$ приймемо

$$L(R) = R^*_L = \{x \in \Omega : xR \subseteq L\},$$

де $xR = \{xr : r \in R\}$. Множина $L(R)$ є простором послідовностей, елементами якої є мультиплікатори з множини R у простір L. Ми називаємо $L(R)$ *простором Кете з твірною L і ваговою множиною R* або *дуальним до R відносно L простором.*

Символом l_p, при $0 < p < \infty$ позначаємо простір всіх послідовностей $x = (\xi_k) \in \Omega$, для яких ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ збігається, і при $p = \infty$ — простір обмежених послідовностей. Простір l_p при $1 \leq p \leq \infty$ є банаховим простором відносно норми

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \textit{ при } 1 \leq p < \infty \ \textit{ і } \ \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| \textit{ при } p = \infty,$$

а при $0 < p < 1$ — p-банаховим простором відносно p-норми $|x|_p = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$.

Якщо множина R складається з одного елемента r з алгебри Ω, то замість $L(\{r\})$ ми пишемо $L(r)$ і називаємо $L(r)$ *простором L з вагою r*. Якщо R — множина значень деякої послідовності $\mathbf{r} = (r_m : m \in \mathbb{N})$ елементів $r_m = (\rho_{m,k} : k \in \mathbb{N})$ алгебри Ω, то замість $L(R)$ пишемо $L(\mathbf{r})$. Зрозуміло, що $L(R) = \bigcap_{r \in R} L(r)$ і $L(\mathbf{r}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} L(r_m)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46A45.

Теорія просторів Кете з твірною l_1 чи, інакше, *досконалих просторів*, започаткована в праці Г.Кете і О.Тепліца [1] і розвинута в серії подальших праць Г.Кете (див. [2,3] і вказану там літературу). Зокрема, $l_1(\mathbf{r})$ — це так званий *східчастий* чи *зважений* простір Кете [4; 5, с. 155], який сам Г.Кете називав "gestufte Raum". Простори $l_p(\mathbf{r})$ при $1 < p < \infty$ вперше розглянули Ж. Дьєдонне і А.Гомес [6]. Загальне поняття дуального простору відносно довільного простору послідовностей L увів Л.Ладиженський [7]. Подальші аналоги і узагальнення досконалих просторів Кете-Тепліца вивчалися в працях багатьох математиків (див. [7-11] і вказану там літературу). Зокрема, розглядалися і функціональні аналоги просторів Кете [12-15].

2. Простори Кете часто зустрічаються в теорії функцій (див., наприклад, [3, 4, 9, 16]). Зокрема, простір A_ρ всіх послідовностей тейлорових коефіцієнтів аналітичних в крузі $|\zeta| < \rho$ функцій збігається з простором Кете $l_1(\mathbf{r})$, де $\mathbf{r} = (r_m)$ — послідовність степеневих ваг, тобто $r_m = (\rho_m^k)$, де (ρ_m) – строго зростаюча послідовність додатних чисел, яка прямує до числа $\rho \in (0, \infty]$. До того ж, для такої послідовності ваг $l_p(\mathbf{r}) = l_\infty(\mathbf{r})$ при будь-якому p (див., наприклад, [17, с.192]), отже, в цьому випадку простори сім'ї $(l_p(\mathbf{r}) : 0 < p \le \infty)$ збігаються між собою.

У зв'язку з цією обставиною природно виникли питання: які необхідні і достатні умови повинна задовольняти послідовність $\mathbf{r}$, щоб збігалися деякі два простори $l_p(\mathbf{r})$ і $l_s(\mathbf{r})$ для фіксованих $p, s \in (0, \infty]$, чи збігалися всі простори $l_p(\mathbf{r})$ при $0 < p \le \infty$? Відповідь на ці питання (навіть у значно загальнішій постановці) отримана в працях [14, 15, 18], де, зокрема, з'ясовано, що для довільної зростаючої послідовності $\mathbf{r}$ додатних ваг r_m виконується така альтернатива: або всі простори $l_p(\mathbf{r})$ при $0 < p \le \infty$ збігаються, або всі вони різні. Для довільної вагової множини R ця альтернатива вже порушується і в [11] сформульовано таку задачу: для яких зростаючих функцій $\varphi : (0, \infty] \to (0, \infty]$ існує така вагова множина R_φ, що $l_{p_1}(R_\varphi) = l_{p_2}(R_\varphi)$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$ при $p_1, p_2 \in (0, \infty]$? В [11] позитивну відповідь на поставлене питання отримано для функцій чотирьох типів: $\varphi_1(p) \equiv const$, $\varphi_2(p) \equiv p$, $\varphi_3(p) = p$ при $p \le s$ і $\varphi_3(p) = s$ при $p > s$, $\varphi_4(p) = p$ при $p \le s$ і $\varphi_4(p) = s + 1$ при $p > s$. Крім цього, там з'ясовано, що з рівності $l_s(R) = l_\infty$ випливає, що $l_p(R) = l_\infty$ для кожного $p \ge s$. Виявляється, що розглянуті в [11] випадки вичерпують всі можливості. Саме ці результати про збіг просторів $l_p(R)$ з довільною фіксованою ваговою множиною R при різних $p \in (0, \infty]$ і є предметом даної публікації.

3. Почнемо з доведення допоміжних, але цікавих і самих по собі тверджень, які розвивають деякі результати робіт [19-21] і [14-15].

Простором Целлера ми називаємо повний метризовний топологічний векторний простір послідовностей L, топологія якого мажорує топологію покоординатної збіжності на L. Всі простори l_p при $0 < p \le \infty$ є просторами Целлера.

Теорема 1. *Нехай X і Y — простори Целлера, $a \in \Omega$ і $aX \subseteq Y$. Тоді оператор множення $m_a : X \to Y$, $m_a(x) = ax$, неперервний.*

Доведення. Застосуємо теорему про замкнений графік [22, с.35; 5, с.102]. Нехай $a = (\alpha_k)$, $x_n = (\xi_{n,k})$, $x = (\xi_k)$, $y_n = m_a(x_n) = (\eta_{n,k})$, $y = (\eta_k)$ і при цьому x_n, $x \in X$ і $x_n \to x$ в X. Тоді $y_n \in Y$ і $\eta_{n,k} = \alpha_k \xi_{n,k}$ для довільних $n, k \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $y \in Y$ і $y_n \to y$ в Y. З того, що топології просторів X і Y мажорують топологію покоординатної збіжності, випливає, що $\xi_{n,k} \to \xi_k$ і $\eta_{n,k} \to \eta_k$ при $n \to \infty$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді, перейшовши у співвідношенні $\eta_{n,k} = \alpha_k \xi_{n,k}$ до границі при $n \to \infty$, ми одержуємо, що $\eta_k = \alpha_k \xi_k$ для кожного k, тобто $y = m_a(x)$. Отже, графік оператора m_a замкнений, отже, m_a неперервний. □

Теорема 2. *Нехай* $0 < s \le p \le \infty$ *і* $1/p + 1/q = 1/s$ *(*$q = s$ *при* $p = \infty$ *і* $q = \infty$ *при* $p = s$*). Тоді* $(l_p)^*_{l_s} = l_q$.

Доведення. Включення $(l_p)^*_{l_s} \supseteq l_q$ при $s < p < \infty$ випливає з відомої нерівності Гельдера, а при $s = p$ чи $p = \infty$ — очевидне. Нехай $y = (\eta_k) \in (l_p)^*_{l_s}$. Припустимо спочатку, що $s = 1$. За теоремою 1 оператор множення $m_y : l_p \to l_1$ неперервний. Оскільки лінійниий функціонал $\sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ неперервний на l_1, то і функціонал $\varphi_y = \sigma \circ m_y$ неперервний на l_p. Тоді, як добре відомо, $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q = \|\varphi_y\|^q < \infty$, отже, $y \in l_q$.

Якщо $0 < s < \infty$, то, $|y|^s = (|\eta_k|^s) \in (l_{p/s})^*_{l_1}$. Оскільки $(p/s)^{-1} + (q/s)^{-1} = 1$, то за доведеним $|y|^s \in l_{q/s}$, звідки негайно випливає, що $y \in l_q$.

У випадках $s = p < \infty$ і $s = p = \infty$ міркування ще простіші. □

Нагадаємо [5, с.44], що топологічний векторний простір Y називається *локально обмеженим*, якщо в Y існує обмежений окіл нуля V. Зауважимо, що в такому випадку система всіх кратних εV, де $\varepsilon > 0$, утворює базу околів нуля в Y, звідки легко випливає, що кожний локально обмежений простір метризовний. Нормовані і p-нормовані простори, очевидно, є локально обмеженими.

Теорема 3. *Нехай* $(X_m : m \in \mathbb{N})$ *— спадна послідовність просторів Целлера, така, що простір* $X = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m$ *щільний у кожному* X_m, *і* Y *— локально обмежений простір Целлера. Тоді* $X^*_Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} (X_m)^*_Y$.

Доведення. Нехай $a \in X^*_Y$, тобто $aX \subseteq Y$. Наділимо простір X проективною топологією відносно тотожних вкладень $X \to X_m$. Легко перевірити, що X з цією топологією є простором Целлера. Згідно з теоремою 1 оператор множення $m_a : X \to Y$ є неперервним. Нехай V — обмежений окіл нуля в Y. Існує такий набір околів нуля $U_1, ..., U_m$ відповідно в просторах $X_1, ..., X_m$, що $m_a(U_1 \bigcap ... \bigcap U_m \bigcap X) \subseteq V$. З теореми 1 випливає, що тотожні вкладення $X_m \to X_k$ при $k = 1, .., m$ неперервні. Тому для кожного такого k існує окіл нуля W_k в просторі X_m, для якого $W_k \subseteq U_k$. Покладаючи $U = \bigcap_{k=1}^{m} W_k$, ми отримаємо такий окіл нуля U в просторі X_m, для якого $m_a(U \bigcap X) \subseteq V$. Тоді і $m_a(\varepsilon U \bigcap X) \subseteq \varepsilon V$ для кожного $\varepsilon > 0$, отже, оператор m_a неперервний в топології, індукованій на X з простору X_m. Оскільки X щільний в X_m, то оператор $m_a : X \to Y$ можна продовжити за неперервністю до оператора $\tilde{m}_a : X_m \to Y$, при цьому, як легко перевірити, продовжений оператор $\tilde{m}_a$ також буде оператором множення на ту ж послідовність a. Отже, $aX_m \subseteq Y$, тобто, $a \in (X_m)^*_Y$. Оскільки обернене включення очевидне, то теорему доведено. □

4. Ми кажемо, що послідовності x і y з Ω *знаходяться у відношенні* $<_p$, якщо існує така послідовність $z \in l_p$, що $x = yz$. Оскільки множина l_p мультиплікативно замкнена, то відношення $<_p$ транзитивне, отже, воно є відношенням порядку в розширеному сенсі [23, с.29]. Вагова множина R *має властивість* O_p, якщо для кожного $r \in R$ існує таке $\overline{r} \in R$, що $r <_p \overline{r}$.

Теорема 4. *а) Якщо* $0 < s < p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1/s$ *і вагова множина* R *має властивість* O_q, *то* $l_p(R) = l_s(R)$.

б) Властивості O_q *при* $0 < q < \infty$ *еквівалентні.*

в) Якщо вагова множина R має властивість O_q при деякому $q \in (0;\infty)$, то всі простори $l_p(R)$ при $0 < p \le \infty$ збігаються.

Доведення. а) Включення $l_s(R) \subseteq l_p(R)$ випливає з включення $l_s \subseteq l_p$, яке справджується при $s \le p$. Навпаки, нехай $x \in l_p(R)$ і $r \in R$. Існують такі $\overline{r} \in R$ і $a \in l_q$, що $r = a\overline{r}$. Тоді $rx = a(\overline{r}x) \in l_s$, бо $a \in l_q$ і $\overline{r}x \in l_p$. Отже, $x \in l_s(R)$.

б) Для двох підмножин X і Y алгебри Ω покладемо $X \cdot Y = \{xy : x \in X \text{ і } y \in Y\}$. З нерівності Гельдера легко випливає, що $l_p \cdot l_q = l_{pq/(p+q)}$. Зокрема,

$$l_p \cdot l_p = l_{\frac{p}{2}},\ \ l_p \cdot l_p \cdot l_p = l_{\frac{p}{2}} \cdot l_p = l_{\frac{p}{3}},\ \dots,\ \underbrace{l_p \cdot \dots \cdot l_p}_{n \text{ раз}} = l_{\frac{p}{n}}.$$

Нехай $0 < p < q < \infty$. Імплікація $O_p \Rightarrow O_q$ випливає з включення $l_p \subseteq l_q$. Доведемо, що $O_q \Rightarrow O_p$. Розглянемо множину R, яка має властивість O_q, і візьмемо довільний елемент $r_0 \in R$. Існує такий номер n, що $q/n \le p$. Знайдемо один за одним n елементів $r_1, \dots, r_n \in R$, такі, що $r_{i-1} <_q r_i$ при $i = 1, \dots, n$. Тоді $r_{i-1} = a_i r_i$ при $i = 1, \dots, n$ для деяких $a_i \in l_q$. В такому разі $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \in l_{\frac{q}{n}} \subseteq l_p$ і $r_0 = a r_n$. Отже, $r_0 <_p r_n$, тобто R має властивість O_p.

в) Негайно випливає з а) і б). □

5. Для послідовностей $x = (\xi_k)$ і $y = (\eta_k)$ дійсних чисел ми пишемо $x \le y$, якщо $\xi_k \le \eta_k$ для кожного номера k. У відповідності з цим послідовність $\mathbf{x} = (x_m)$ елементів $x_m \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ називається зростаючою, якщо $x_m \le x_{m+1}$ для кожного m. Вага $r = (\rho_k)$ називається додатною, якщо $\rho_k > 0$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і невід'ємною, якщо $\rho_k \ge 0$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Напрямлена відношенням $\le$ множина R має зліченну конфінальність, якщо існує така зліченна множина $R' \subseteq R$, що для кожного $r \in R$ існує таке $r' \in R'$, що $r \le r'$.

Наступна теорема з [18] допоможе нам дослідити необхідність виконання умови O_q для збігу всіх просторів $l_p(R)$ при $0 < p \le \infty$. Для повноти викладу ми подамо її доведення, яке базується на ідеях з [15].

Теорема 5. *Нехай $0 < s < p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1/s$ і $\mathbf{r} = (r_m)$ — зростаюча послідовність додатних ваг r_m. Тоді $l_p(\mathbf{r}) = l_s(\mathbf{r})$ у тому і тільки в тому випадку, коли для кожного m існує n, таке, що $r_m/r_n \in l_q$.*

Доведення. Достатність випливає з твердження а) теореми 4. Доведемо необхідність. Нехай $l_p(\mathbf{r}) = l_s(\mathbf{r})$ і $m \in \mathbb{N}$.

Припустимо спочатку, що $p < \infty$. Оскільки $l_p(\mathbf{r}) \subseteq l_s(\mathbf{r})$, то $r_m l_p(\mathbf{r}) \subseteq l_s$. Наділимо кожний простір $l_p(r_n)$ топологією, яка переноситься з простору l_p з допомогою ізоморфізму $m_{r_n} : l_p(r_n) \to l_p$, а простір $l_p(\mathbf{r})$ проективною топологією, що породжується мультиплікаторами $m_{r_n} : l_p(\mathbf{r}) \to l_p$ чи, що те ж саме, тотожними вкладеннями $l_p(\mathbf{r}) \to l_p(r_n)$. Легко переконатись в тому, що всі простори $l_p(\mathbf{r})$ і $l_p(r_n)$ є целлеровими відносно введених топологій, при цьому $l_p(\mathbf{r})$ щільний у кожному $l_p(r_n)$, бо він містить всі фінітні послідовності. Крім цього, $l_p(r_n) \supseteq l_p(r_{n+1})$ для кожного n, адже послідовність $\mathbf{r}$ зростає. В такому разі з теореми 3 випливає, що існує таке n, що $r_m l_p(r_n) \subseteq l_s$. Але $r_m l_p(r_n) = (r_m/r_n) l_p$. Отже, на основі теореми 2 одержуємо, що $r_m/r_n \in l_q$. □

Нехай $p = \infty$. Розглянемо простір c_0 збіжних до нуля послідовностей, який є целлеровим простором з топологією, індукованою з l_∞. Оскільки $c_0 \subseteq l_\infty$ і $l_\infty(\mathbf{r}) \subseteq l_s(r_m)$, то $r_m c_0(\mathbf{r}) \subseteq l_s$. Звідси, як і раніше, на основі теореми 3 виводимо, що існує такий номер n, для якого $(r_m/r_n)c_0 \subseteq l_s$. Але легко перевірити, що $(c_0)^*_{l_s} = l_s$, отже, $r_m/r_n \in l_s = l_q$, бо в цьому випадку $s = q$.

Теорема 6. *Нехай R — напрямлена відношенням $\leq$ множина невід'ємних ваг, яка має зліченну конфінальність, $0 < s < p \leq \infty$ і $1/p + 1/q = 1/s$. Тоді*

а) $l_p(R) = l_s(R) \iff R$ має властивість O_q;

б) для сім'ї просторів $(l_p(R) : 0 < p \leq \infty)$ виконується альтернатива: або всі простори $l_p(R)$ при $0 < p \leq \infty$ збігаються, або всі вони різні.

Доведення. а) Достатність випливає з теореми 4 а). Доведемо необхідність. Нехай $l_p(R) = l_s(R)$. Покажемо, що R має властивість O_q. Легко побудувати таку зростаючу послідовність $\mathbf{r} = (r_m)$ ваг $r_m \in R$, що для кожного $r \in R$ існує таке m, що $r \leq r_m$. Нехай $r = (\rho_k) \in R$. Розглянемо множину $A = \{k \in \mathbb{N} : \rho_k > 0\}$. Якщо A — скінченна, то $r <_q r$. Припустимо, що A — нескінченна. Виберемо таке $m_0 \in \mathbb{N}$, що $r \leq r_{m_0}$. Покладемо $\mathbf{r}' = (r_m|_A : m \geq m_0)$. Оскільки $l_p(R) = l_p(\mathbf{r})$ і $l_s(R) = l_s(\mathbf{r})$, то $l_p(\mathbf{r}) = l_s(\mathbf{r})$. Тому і $l_p(\mathbf{r}') = l_s(\mathbf{r}')$. Отже, згідно з теоремою 5 послідовність $\mathbf{r}'$ має властивість O_q. Зокрема, існує таке $m \geq m_0$, що $r_{m_0}|_A <_q r_m|_A$. Тоді $r <_q r_m$. Звідси, R має властивість O_q.

Твердження б) випливає з твердження а) і теореми 4. □

Обидві полярні можливості в твердженні б) теореми 6 насправді реалізуються для деякої множини R вказаного типу. Наприклад, для послідовності $\mathbf{r}$ степеневих ваг $r_m = (\rho_m^k)$, де (ρ_m) — строго зростаюча послідовність додатних чисел, всі простори $l_p(\mathbf{r})$ збігаються, бо $r_m/r_{m+1} \in l_1$ для кожного m. Якщо покласти $\rho_{m,k} = k^{-1/m}$, то всі простори $l_p(\mathbf{r})$ виявляються різними, адже для будь-яких номерів m і n ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/n-1/m}$ розбігається.

Крім цього, якщо покласти $w_{2m-1} = (1, m, 1, m^2, 1, m^3, ...)$, $w_{2m} = (m, 1, m^2, 1, m^3, 1, ...)$ і $R = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$, то, як легко перевірити, всі простори $l_p(R)$ збігаються, але R не має властивості O_q при жодному q. Цей приклад показує, що умова напрямленості множини R в теоремі 6 істотна. Зауважимо, що для довільної вагової множини R можна вказати таку напрямлену відношенням $\leq$ множину $\tilde{R}$ з невід'ємних ваг, що $l_p(R) = l_p(\tilde{R})$ для кожного $p \in (0, \infty]$.

Встановимо, що існує така напрямлена відношенням $\leq$ множина додатних ваг R, що всі простори $l_p(R)$ збігаються, але R не має властивості O_q при жодному q.

Нехай $\mathcal{F}$ — довільний нетривіальний ультрафільтр підмножин $\mathbb{N}$ і $\Omega^+ = \{x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} : (\forall k \in \mathbb{N})(\xi_k > 0)\}$. Розглянемо множину $R = \{x = (\xi_k) \in \Omega^+ : (\exists A \in \mathcal{F})(\forall k \in A)(\xi_k = 1)\}$ і покажемо, що вона є шуканою. Спочатку перевіримо, що R не має властивості O_1. Нехай це не так. Тоді існують $x = (\xi_k), y = (\eta_k) \in R$ і $z = (\zeta_k) \in l_1$, такі, що $x = yz$. Виберемо такі множини $A, B \in \mathcal{F}$, що $\xi_k = 1$ для кожного $k \in A$ і $\eta_k = 1$ для кожного $k \in B$. Оскільки $\mathcal{F}$ — нетривіальний ультрафільтр, то множина $C = A \bigcap B$ — нескінченна. Зрозуміло, що $\zeta_k = 1$ для кожного $k \in C$. Тому ряд $\sum_{k \in C} |\zeta_k|$ — розбіжний, а це суперечить тому, що $z \in l_1$.

Тепер доведемо, що $l_p(R) = \mathbb{K}^\infty$ для кожного $0 < p \leq \infty$, де $\mathbb{K}^\infty$ — це простір всіх фінітних послідовностей. Зрозуміло, що $\mathbb{K}^\infty \subseteq l_p(R)$, тому досить перевірити, що $l_\infty(R) \subseteq \mathbb{K}^\infty$. Припустимо, що існує $x = (\xi_k) \in l_\infty(R) \setminus \mathbb{K}^\infty$. Тоді множина $A = \{k \in \mathbb{N} : \xi_k \neq 0\}$ є нескінченною. Розіб'ємо множину A на дві диз'юнктні нескінченні множини

B і C. Множини B і C не можуть одночасно входити у фільтр $\mathcal{F}$. Вважатимемо, що $B \notin \mathcal{F}$. Оскільки $\mathcal{F}$ — ультрафільтр, то $B_1 = \mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{F}$. Розглянемо послідовність $r = (\rho_k)$, $\rho_k = 1$, якщо $k \in B_1$, і $\rho_k = \frac{k}{\xi_k}$, якщо $k \in B$. Зрозуміло, що $r \in R$. Але $\xi_k \rho_k = k$, якщо $k \in B$ і множина B — нескінченна, тому $xr \notin l_\infty$. Отже, $x \notin l_\infty(R)$ і ми отримали суперечність.

Зрозуміло, що щойно побудована множина R не має зліченної конфінальності.

6. Перейдемо тепер до розгляду основного результату.

Теорема 7. *Нехай R — довільна вагова множина. Для сім'ї просторів $(l_p(R) : 0 < p \leq \infty)$ виконується одна і лише одна з наступних можливостей:*

(i) *всі простори $l_p(R)$ різні;*

(ii) *всі простори $l_p(R)$ збігаються;*

(iii) *існує таке додатне число p_0, що всі простори $l_p(R)$ при $0 < p \leq p_o$ різні, а всі простори $l_p(R)$ при $p \geq p_0$ збігаються;*

(iv) *існує таке додатне число p_0, що всі простори $l_p(R)$ при $0 < p \leq p_0$ різні, а всі простори $l_p(R)$ при $p > p_0$ збігаються і відрізняються від простору $l_{p_0}(R)$.*

При цьому кожна з умов (i)-(iv) обов'язково реалізується для деякої множини R додатних ваг з довільним p_0 в умовах (iii) і (iv).

Доведення. Нехай $l_s(R) = l_p(R)$ для деяких $0 < s < p < \infty$. Покажемо, що тоді $l_p(R) = l_\infty(R)$. Нехай це не так, тобто існує $a \in l_\infty(R) \setminus l_p(R)$. Візьмемо таке число q, що $1/p + 1/q = 1/s$. Оскільки $a \notin l_p(R)$, то існує таке $r_0 \in R$, що $ar_0 \notin l_p$. З теореми 2 тоді випливає, що існує таке $b_1 \in l_q$, що $ar_0 b_1 \notin l_s$. В такому випадку $ab_1 \notin l_s(R)$, а тому, $ab_1 \notin l_p(R)$, отже, $ab_1 r_1 \notin l_p$ для деякого $r_1 \in R$. Повторивши цю побудову n раз, ми одержуємо елементи $b_1, ..., b_n \in l_q$ і $r_n \in R$, такі, що $a_n = ab_1 ... b_n r_n \notin l_p$. Але $b_1 ... b_n \in \underbrace{l_q \cdot ... \cdot l_q}_{n \text{ раз}} = l_{q/n}$ і $ar_n \in l_\infty$, бо $a \in l_\infty(R)$, отже, $a_n \in l_{q/n}$. Це приводить до суперечності, позаяк $l_{q/n} \subseteq l_p$ при досить великих n.

Отже, якщо (i) не виконується, тобто існують такі $p_1, p_2 \in (0, \infty]$, що $p_1 \neq p_2$ і $l_{p_1}(R) = l_{p_2}(R)$, то $l_p(R) = l_\infty(R)$ при $p \geq \min\{p_1, p_2\}$, адже простори $l_p(R)$ з ростом p зростають. Нехай $p_0 = \inf\{p > 0 : l_p(R) = l_\infty(R)\}$. Якщо $p_0 = 0$, то реалізується можливість (ii). Якщо $p_0 > 0$, то, як легко зрозуміти, всі простори $l_p(R)$ при $0 < p \leq p_0$ різні і $l_p(R) = l_\infty(R)$ для кожного $p > p_0$. Тоді при умові $l_{p_0}(R) = l_\infty(R)$ реалізується можливість (iii), а при умові $l_{p_0}(R) \neq l_\infty(R)$ — можливість (iv).

Перевіримо тепер, чи всі можливості (i)-(iv) обов'язково реалізуються для деякої множини R додатних ваг. Вище було зя'совано, що можливості (i) та (ii) реалізуються навіть для деякої зліченної множини R. Втім, ми могли б узяти $R = \{e\}$, де $e = (1, 1, ..., 1, ...)$, і тоді $l_p(R) = l_p$ для кожного p, отже, всі простори $l_p(R)$ були б різними; якщо вибрати $R = \Omega^+$, то всі простори $l_p(R)$ збігаються з простором всіх фінітних послідовностей.

Доведемо, що можливості (iii) і (iv) також реалізуються, прич цьому з довільним $p_0 = s \in (0, \infty)$. Ми будемо користуватися формулою

$$l_p(l_s) = \begin{cases} l_\infty, & p \geq s, \\ l_{sp/(s-p)}, & p < s. \end{cases}$$

яка є просто іншим записом теореми 2. З цієї формули випливає, що при $R = l_s$ всі простори $l_p(R)$ при $0 < p \le s$ різні, а всі простори $l_p(R)$ при $p \ge s$ збігаються, отже, реалізується можливість (iii) з $p_0 = s$. Легко перевірити, що $l_p(l_s) = l_p(l_s^+)$, де $l_s^+ = l_s \cap \Omega^+$, отже, вагову множину R можна формувати і з додатних ваг.

Введемо у розгляд простори

$$l_{p+0} = \bigcap_{q>p} l_q, \text{ де } 0 \le p < \infty, \quad \text{і} \quad l_{p-0} = \bigcup_{q>p} l_q, \text{ де } 0 < p \le \infty.$$

Зауважимо, що простір l_{p+0} щільний у кожному просторі l_q при $p < q < \infty$, при цьому $l_{p+0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} l_{q_n}$, де (q_n) — довільна послідовність чисел $q_n > p$, яка прямує до p. Подібно і $l_{p-0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} l_{q_n}$, де (q_n) — довільна послідовність чисел $q_n < p$, яка прямує до p. Крім цього, зазначимо, що коли числа q, спадаючи, прямують до числа $s \ge p$ справа, то числа $qp(q-p) = 1/(1/p - 1/q)$, зростаючи, прямують до числа $sp/(s-p)$ зліва. Виходячи з цих зауважень, на основі теорем 2 і 3 отримуємо:

$$l_p(l_{s+0}) = \left(\bigcap_{q>s} l_q\right)^*_{l_p} = \begin{cases} \bigcup_{q>s} l_{qp/(q-p)}, & p \le s, \\ l_\infty, & p > s, \end{cases} = \begin{cases} l_{sp/(s-p)-0}, & p < s, \\ l_{\infty-0}, & p = s, \\ l_\infty, & p > s. \end{cases}$$

Нехай $l^+_{s+0} = l_{s+0} \bigcap \Omega^+$. Позаяк $l_p(l^+_{s+0}) = l_p(l_{s+0})$, ми одержуємо, що для вагової множини $R = l^+_{s+0}$ реалізується умова (iv) з $p_0 = s$. □

7. У прикладах, наведених у доведенні теореми 6, як тільки $l_p(R) = l_\infty$, то і $l_q(R) = l_\infty$ для всіх $q > p$. Ця обставина не випадкова.

Теорема 8. *Нехай* $0 < s < \infty$ *і* $l_s(R) = l_\infty$. *Тоді* $l_p(R) = l_\infty$, *як тільки* $s < p \le \infty$.

Доведення. Нехай $s < p \le \infty$. Оскільки $l_s(R) \subseteq l_p(R)$, то $l_\infty \subseteq l_p(R)$. Навпаки, нехай $a \in l_p(R)$. Тоді і $|a| \in l_p(R)$. Крім цього, $e = (1, 1, ..., 1, ...) \in l_p(R)$, адже $e \in l_\infty$. Отже, і послідовність $b = e + |a| \in l_p(R)$. Перевіримо, чи $b \in l_\infty$. Маємо $bR \subseteq l_p$, отже, $R \subseteq l_p(b)$. Тому

$$l_\infty = l_s(R) = (R)^*_{l_s} \supseteq (l_p(b))^*_{l_s} = l_q(1/b) = bl_q,$$

де $1/p + 1/q = 1/s$. З включення $bl_q \subseteq l_\infty$ легко отримати, що $b \in l_\infty$. Але $|a| \le b$, отже, і $a \in l_\infty$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Köthe G., Toeplitz O. *Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen* // J. f. reine u. angew. Math.- 1934.- V.171.- S.193-226.
2. Köthe G. *Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume* // Math. Nachr.- 1951.- Bd.4.- S.70-80.
3. Köthe G. Topologische lineare Räume. I.- Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag,1960.
4. Köthe G. *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume* // Math. Zeitschr.- 1948.- Bd.52.- S.317-345.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971. - 360 с.
6. Dieudonné J., Gomes A.P. *Sur certain espaces vectoriels topologiques* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1950. – T. 230. – P.1129-1130.

7. Ruckle W.H. Sequence spaces. – Boston-London-Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1981. – 198 p.
8. Коробейник Ю.Ф. Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1983. – 156 с.
9. Драгилев М.М. Базисы в пространствах Кете. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1983. – 144 с.
10. Кондаков В.П. Вопросы геометрии ненормируемых прстранств. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1983. – 72 с.
11. Маслюченко В.К. Некоторые вопросы теории обобщённых пространств Кёте : Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Черновцы, 1983. – 131 с.
12. Dieudonné J. *Sur les espaces de Köthe* // J. Anal. Math. – 1951. – 1.– P.81-115.
13. Грибанов Ю.И. *Совершенные пространства функций* // Учён. зап. Казан. ун-та. – 1966. – Т.126 , №6. – С.70-84.
14. Маслюченко В.К. *Об условиях включения пересечений и объединений пространств* $L_p(\mu)$ *с весом* // Укр. мат. журн. – 1982. – Т.34 , №4. – С.518-522.
15. Маслюченко В.К. *Условие включения некоторых пространств (категорный подход)* // Укр. мат. журн. – 1984. – Т.36 , №3. – С.316-321.
16. Toeplitz O. *Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie* // Comm. Math. Helvetici. – 1949. – T.23. – S.222-242.
17. Rolevicz S. Metric linear spaces. – Warszawa, 1973. – 280 p.
18. Маслюченко В.К. Обобщённые пространства Кёте // Казань, 1983. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 31.X.1983, N5895-83ДЕП.
19. Landau E. *Über einen Konvergenzsatz* // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. - 1907. - S.25-27.
20. Zeller K. *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsferfahren* // Math. Zeitschr. – 1951. – T.53 , №3. – S.463-487.
21. Wilansky A., Zeller K. *FH-spaces and intersections of FK-spaces* // Michigan Math. J. – 1959. – V.6 , №4. – P.346-357.
22. Банах С. Курс функціонального аналізу. - К.: Радянська школа, 1948. - 216 с.
23. Келли Дж.Л. Общая топология. - М.: Наука, 1981. - 432 с.

Надійшло 23.07.01