УДК 517.98

О. Ю. Дейнека

УМОВИ ІСНУВАННЯ І ЄДИНОСТІ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ТЕЛЕГРАФНИХ РІВНЯНЬ З ЛІНІЙНИМИ НЕОДНОРІДНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

O. Yu. Dejneka. *Condition of existence and unity of restricted solutions for system of telegraph equations with linear nonhomogeneous boundary conditions*, Matematychni Studii, **17** (2002) 59–66.

Necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of bounded solutions of linear boundary value problem for system of telegraph equations are obtained.

О. Ю. Дейнека. *Условия существования и единственности ограниченных решений системы телеграфных уравнений с линейными неоднородными граничными условиями* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №1. – С.59–66.

Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений системы телеграфных уравнений с линейными неоднородными граничными условиями.

Задача про існування єдиного обмеженого роз'язку системи телеграфних рівнянь з лінійними відносно невідомих функцій крайовими умовами для одновимірного випадку вивчалась в [1] за допомогою відомого переходу ([2]) від даної задачі до відповідного диференціально-різницевого рівняння з подальшим зведенням її до задачі про оборотність с-неперервних операторів. У цій статті розглядається n-вимірний аналог такої задачі із сталими коефіцієнтами в лінійних неоднорідних крайових умовах.

1. Постановка задачі. Нехай $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $z=z(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ та нормою $\|z\|_{C^0}=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}$, $C^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — простір p-раз диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій $z=z(t)\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, для яких $z',\dots,z^{(p)}\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ $(p\in\mathbb{N})$, з нормою $\|z\|_{C^p}=\max\left\{\|z\|_{C^0},\|z'\|_{C^0},\dots,\|z^{(p)}\|_{C^0}\right\}$ і $C^{1,1}([0,l]\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — простір неперервних і обмежених на $[0,l]\times\mathbb{R}$ функцій $z=z(x,t)$ із значеннями в $\mathbb{R}^n$, частинні похідні $z'_x(x,t)$ та $z'_t(x,t)$ яких також неперервні і обмежені на $[0,l]\times\mathbb{R}$, з нормою

$$\|z\|_{C^{1,1}}=\max\left\{\sup_{x\in[0,l],t\in\mathbb{R}}\|z(x,t)\|_{\mathbb{R}^n},\ \sup_{x\in[0,l],t\in\mathbb{R}}\left(\|z'_x(x,t)\|_{\mathbb{R}^n}+\|z'_t(x,t)\|_{\mathbb{R}^n}\right)\right\},\ l>0.$$

Розглянемо систему рівнянь

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35F15.

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \\ A\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \end{cases} \quad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

з лінійними крайовими умовами

$$\begin{cases} Cu(0,t) + Dv(0,t) = f(t), \\ E\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t} + Fu(l,t) + Gv(l,t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

де $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $a_j > 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$; l — фіксоване додатне число; C, D, E, F, G — дійсні сталі матриці n-го порядку; $f(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ і $g(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

З'ясуємо умови існування та єдиності обмеженого розв'язку $u(x,t)$, $v(x,t) \in C^{1,1}([0;l] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ задачі (1), (2) для будь-яких функцій $f(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ і $g(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

2. Основний результат. Нехай $\det(D + C) \neq 0$. Введемо в розгляд матричнозначну функцію

$$H(\varphi) = \sum_{\nu,k=1}^{n} \exp\{-i\varphi(a_\nu + a_k)\} P_\nu (D + C)^{-1}(D - C) P_k, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

де $P_k = \operatorname{diag}(\delta_{k1}, \dots, \delta_{kn})$, δ_{pq} — символ Кронекера, i — уявна одиниця.

Справедливе твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\det E \neq 0$ *і* $\det(D + C) \neq 0$. *Для того, щоб задача (1), (2) мала єдиний обмежений розв'язок для довільних* $f(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $g(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *необхідно і достатньо, щоб*

$$\inf_{\varphi \in \mathbb{R}} |\det(I + H(\varphi))| > 0 \tag{3}$$

та

$$\inf_{\varphi \in \mathbb{R}} \left|\det(i\varphi(I + H(\varphi)) + E^{-1}(G - F) + E^{-1}(F + G)H(\varphi))\right| > 0, \tag{4}$$

де I *— одинична матриця.*

Для доведення цього твердження скористаємося відомим методом, описаним, наприклад, у книзі [2]. В основі цього методу лежить перехід від задачі (1), (2) до відповідної задачі для диференціально-різницевого рівняння.

3. Зв'язок між крайовою задачею (1), (2) та диференціально-різницевим рівнянням. Як відомо з [3], будь-який розв'язок системи (1) у випадку, коли $n = 1$, можна подати у вигляді

$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi(t - a_1 x) + \theta(t + a_1 x), \\ v(x,t) = \varphi(t - a_1 x) - \theta(t + a_1 x), \end{cases}$$

де $\varphi, \theta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Подібно, для довільного $n > 1$ загальний розв'язок системи (1) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(\varphi(t - a_k x) + \theta(t + a_k x)), \\ v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(\varphi(t - a_k x) - \theta(t + a_k x)), \end{cases} \tag{5}$$

де $\varphi, \theta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, а P_k $(k \in \{1, \ldots, n\})$ — матриці проектування з п.2.

Оскільки $\det[(C+D)E] \neq 0$ то, враховуючи (5), перепишемо крайові умови (2) у вигляді

$$(C+D)\varphi(t) + (C-D)\theta(t) = f(t), \tag{6}$$

$$E\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\mathrm{d}\varphi(t-a_k l)}{\mathrm{d}t} + E\sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\mathrm{d}\theta(t+a_k l)}{\mathrm{d}t} + \\ +(F+G)\sum_{k=1}^{n} P_k \varphi(t-a_k l) + (F-G)\sum_{k=1}^{n} P_k \theta(t+a_k l) = g(t). \tag{7}$$

Далі, з (6) знаходимо, що

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \varphi(t-a_k l) = \sum_{k=1}^{n} P_k (C+D)^{-1}(D-C)\theta(t-a_k l) + \\ + \sum_{k=1}^{n} P_k (C+D)^{-1} f(t-a_k l). \tag{8}$$

Тепер зробимо заміну

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k \theta(t+a_k l) \tag{9}$$

і виразимо $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k (C+D)^{-1}(D-C)\theta(t-a_k l)$ через функцію $y(t)$. З (9) випливає, що $\theta(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_k y(t-a_k l)$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} P_k (C+D)^{-1}(D-C)\theta(t-a_k l) = \sum_{k,\nu=1}^{n} P_k (C+D)^{-1}(D-C) P_\nu y(t-(a_k+a_\nu)l).$$

Отже, використовуючи останню рівність, а також (7), (8) і (9), отримаємо, систему

$$(C+D)\varphi(t) + (C-D)\sum_{k=1}^{n} P_k y(t-a_k l) = f(t), \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{\nu,k=1}^{n} P_k (C+D)^{-1}(D-C) P_\nu \frac{\mathrm{d}y(t-(a_k+a_\nu)l)}{\mathrm{d}t} + E^{-1}(F-G)y(t) +$$

$$+E^{-1}(F+G)\sum_{\nu,k=1}^{n} P_k(C+D)^{-1}(D-C)P_\nu y(t-(a_k+a_\nu)l)=\psi(t), \tag{11}$$

де

$$\psi(t)=E^{-1}g(t)-\sum_{k=1}^{n} P_k(C+D)^{-1}\frac{\mathrm{d}f(t-a_k l)}{\mathrm{d}t}-$$

$$-E^{-1}(F+G)\sum_{k=1}^{n} P_k(C+D)^{-1}f(t-a_k l). \tag{12}$$

Розглянемо диференціально-різницеве рівняння (11), в якому $\psi(t)\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Лема. *Нехай $f(t)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $g(t)\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Тоді задача (1), (2) має єдиний обмежений розв'язок в тому і лише в тому випадку, коли рівняння (11) за умови (12) має єдиний обмежений ров'язок.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що на підставі [3] загальний роз'язок (1) має вигляд (5), тому між простором обмежених розв'язків (u,v) рівняння (1) та простором пар функцій $(\varphi,\theta)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ існує взаємно-однозначна відповідність, задана правилом (5). Зрозуміло, що для довільних фіксованих $f(t)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $g(t)\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ пара (u,v) задовольняє умову (2) тоді і лише тоді, коли відповідна до неї пара (φ,θ) задовольняє систему рівнянь (6), (7). Система (6), (7) методом виключення і заміною (9) зводиться до еквівалентної до неї системи (10), (11) за умови (12).

Система (10), (11) за умови (12) має єдиний обмежений розв'язок тоді і лише тоді, коли рівняня (11) за умови (12) має єдиний обмежений розв'язок. Звідси випливає твердження леми.

Зрозуміло , що при дослідженні однозначної розв'язності рівняння (11) за умови (12), досить вивчити рівняння (11) з довільною правою частиною.

Зауважимо, що із співвідношень (5), (6), (9) розв'язок задачі (1), (2) визначається через розв'язок рівняння (11) у наступний спосіб

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{n} P_k\Bigg((C+D)^{-1}\Bigg(f(t-a_k x)+(D-C)\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu y(t-a_k x-a_\nu l)\Bigg)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu y(t+a_k x-a_\nu l)\Bigg),$$

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{n} P_k\Bigg((C+D)^{-1}\Bigg(f(t-a_k x)+(D-C)\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu y(t-a_k x-a_\nu l)\Bigg)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu y(t+a_k x-a_\nu l)\Bigg).$$

□

4. Допоміжні твердження. Для доведення теореми 1 нам потрібні деякі відомі результати, зокрема, стосовно властивостей c-неперервних операторів. Нагадаємо, що оператор $B \in L(C^p, C^q)$ називається c-неперервним, якщо для довільних $\varepsilon > 0, T > 0$ існують $\delta > 0, Q > 0$ такі, що $\sum_{k=0}^{q} \|\frac{\mathrm{d}^k (Bx)(t)}{\mathrm{d}t^k}\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$ для всіх $t \in [-T, T]$, коли $\sum_{k=0}^{p} \|\frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ для всіх $t \in [-Q, Q]$ і $\|x\|_{C^0} \leq 1$. c-неперервні оператори введені Е. Мухамадієвим [4]. Подальше вивчення цих операторів здійснене В. Ю. Слюсарчуком (див., наприклад, [5], [6], [7]).

Визначимо оператор $S_\Delta \in L(C^0, C^0)$ рівністю $\big(S_\Delta x\big)(t) = x(t + \Delta)$, де $\Delta \in \mathbb{R}$. Оператор $B \in L(C^m, C^0)$ називається майже-періодичним, якщо замикання множини $\{S_\Delta B S_{-\Delta} \colon \Delta \in \mathbb{R}\}$ компактне в $L(C^m, C^0)$. Коли для довільного $\Delta \in \mathbb{R}$ $S_\Delta B S_{-\Delta} = B$, то оператор є автономним.

Справедливе твердження.

Теорема 2 [5]. *Нехай для деякого $m \in \mathbb{N}$:*

1) B — c-неперервний оператор простору $L(C^{m-1}, C^0)$;

2) $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} + B$ — майже-періодичний оператор простору $L(C^m, C^0)$;

3) $\inf\limits_{\|x\|_{C^m}=1} \left\| \left(\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} + B\right) x \right\|_{C^0} > 0$.

Тоді оператор $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} + B$ має c-неперервний, майже-періодичний обернений оператор $\left(\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} + B\right)^{-1} \in L(C^0, C^m)$.

Для довільного комплексного банахового простору E з нормою $\|\cdot\|_E$ позначимо через $[E]$ алгебру лінійних неперервних операторів і задамо оператор B рівністю

$$(Bx)(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} A_{pq} \frac{\mathrm{d}^p x(t + \Delta_{pq})}{\mathrm{d}t^p},$$

де $A_{pq} \in [E]$, $\Delta_{pq} \in \mathbb{R}$ для довільних $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $x = x(t)$ належить до простору функцій $C_\omega^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, для яких $(\forall m \in \mathbb{N})$: $\frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ і $\sup\limits_{m \geq 1} \omega^{-m} \left\| \frac{\mathrm{d}^m x(t)}{\mathrm{d}t^m} \right\|_{C^0} < +\infty$ $(\omega > 0)$. Тоді справедливе таке твердження.

Теорема 3 [8].

$$\sigma_{[C_\omega^\infty(\mathbb{R},E)]}(B) = \bigcup_{\varphi \in [-\omega, \omega]} \sigma_{[E]} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} (i\varphi)^p \exp\{i\varphi\Delta_{pq}\} A_{pq} \right),$$

де $\sigma_{[E]}(B)$ — спектр елемента B алгебри $[E]$.

Твердження наступної теореми справедливе на підставі результатів робіт [6], [9].

Теорема 4. *Нехай $\sum\limits_{\Delta \in G} \|A_\Delta\|_{[\mathbb{R}^n]} < \infty$ та $\inf\limits_{\varphi \in \mathbb{R}} \left| \det \sum\limits_{\Delta \in G} \exp\{i\varphi\Delta\} A_\Delta \right| > 0$, де G — зліченно адитивна група дійсних чисел. Тоді існують елементи $B_\tau \in [\mathbb{R}^n]$, для яких $\sum\limits_{\tau \in G} \|B_\tau\|_{[\mathbb{R}^n]} < \infty$, і рівняння*

$$\sum_{\Delta \in G} A_\Delta y(t + \Delta) = \alpha(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

для кожної функції $\alpha = \alpha(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ має єдиний розв'язок $y = y(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, який подається у вигляді $y(t) = \sum_{\tau \in G} B_\tau \alpha(t + \tau)$.

5. Доведення теореми 1. *Достатність.* Для оператора, визначеного рівністю

$$(Ny)(t) = y(t) + \sum_{k,\nu=1}^{n} P_k(C+D)^{-1}(D-C)P_\nu y(t-(a_\nu+a_k)l),$$

умова (3) теореми 1 і теорема 4 гарантують існування неперервного оберненого оператора $(N^{-1}x)(t) = \sum_{\tau\in G} B_\tau x(t+\tau)$, де G — адитивна група, породжена елементами $\{(a_\nu+a_k)l\colon k,\nu\in\{1,\ldots,n\}\}$. Тому потрібно довести, що отримане з (11) рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + (My)(t) = (N^{-1}\psi)(t),$$

де

$$(My)(t) = \sum_{\tau\in G} B_\tau (E^{-1}(F-G)y(t+\tau) +$$

$$+E^{-1}(F+G)\sum_{k,\nu=1}^{n} P_k(C+D)^{-1}(D-C)P_\nu y(t+\tau-(a_\nu+a_k)l),$$

має єдиний обмежений розв'язок $y(t)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ для кожної функції $(N^{-1}\psi)(t)\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, якщо виконуються умови теореми 1. Тоді використання леми завершить доведення її достатності.

Зауважимо, що автономний оператор $M\in L(C^0,C^0)$ є c-неперервним. Це випливає з означення c-неперервного оператора, якщо вибрати
$Q = T + \max\limits_{\nu,k}(a_\nu+a_k)l$ і

$$\delta = \varepsilon\frac{1+\|(C+D)^{-1}(D-C)\|_{[\mathbb{R}^n]}}{\|E^{-1}(F-G)\|_{[\mathbb{R}^n]} + \|E^{-1}(F+G)(C+D)^{-1}(D-C)\|_{[\mathbb{R}^n]}}.$$

Тепер, згідно з теоремою 2, оператор $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+M$ має неперервний обернений у випадку, коли

$$\inf_{\|x\|_{C^0}=1}\left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+M\right)\right\|_{C^0} > 0. \tag{13}$$

Отже, для доведення теореми 1 достатньо отримати, що з умов (3), (4) теореми 1 випливає нерівність (13). Для цього розглянемо рівняння

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+M\right)x\right)(t) = 0.$$

Якщо переписати це рівняння у вигляді $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -(Mx)(t)$, то з оцінки
$\|x\|_{C^m} = \|M\|_{L(C^0,C^0)}\|x\|_{C^{m-1}}$ і оборотності оператора N випливає, що $\ker\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+M\right) = \ker\left(N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+NM\right)\subset C^\infty_\omega(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, де $\omega = \|M\|_{L(C^0,C^0)}$.

Далі розглянемо звуження оператора $N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+NM$ на підпростір C^∞_ω. Тоді, згідно з теоремою 3,

$$\sigma_{L(C^\infty_\omega,C^\infty_\omega)}\left(N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+NM\right) =$$

$$= \bigcup_{\varphi\in[-\omega,\omega]} \sigma_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\Big(i\varphi(I+H(\varphi)) + E^{-1}(G-F) + E^{-1}(F+G)H(\varphi)\Big).$$

Отже, з останньої рівності та з умови (4) теореми 1 випливає, що $\ker\left(N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+NM\right)=\{0\}$, тобто (13) виконується. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай задача (1), (2) має єдиний обмежений розв'язок у просторі $C^1\left([0,l]\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n\right)$. Тоді, на підставі леми, рівняння (11) також має єдиний обмежений розв'язок $z=z(t)$. Отже, за теоремою Банаха про обернений оператор [10], існує така стала $K>0$, що

$$\|z\|_{C^1}\le K\|\psi\|_{C^0}. \tag{14}$$

Доведемо, що виконуються умови (3), (4) теореми 1.

Доведення будемо проводити від супротивного. Припустимо протилежне, тобто, що (3) не виконується. Тоді

$$\inf_{\varphi\in\mathbb{R}}|\det(I+H(\varphi))|=0. \tag{15}$$

З майже-періодичності оператора $I+H(\varphi)$ випливає існування послідовностей чисел $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\dots$ та одиничних векторів $e_1,\dots,e_n,\dots$ з $\mathbb{R}^n$ таких, що $\lim\limits_{m\to\infty}|\varphi_m|=\infty$ і $\lim\limits_{m\to\infty}\|(I+H(\varphi_m))e_m\|_{\mathbb{R}^n}=0$. Розглянемо послідовність функцій $x_m(t)=(\varphi_m)^{-1}e^{i\varphi_m t}e_m$. Очевидно, що $\|x_m\|_{C^1}=1$ для всіх $m\in\mathbb{N}$ і $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\left(N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+NM\right)x_m\right)(t)=0$, що суперечить (14).

Отже, припущення про правильність рівності (15) є хибним.

Тепер перевіримо, чи виконується умова (4) теореми 1. Припустимо супротивне, тобто, що не виконується (4). Тоді існує число φ_0 таке, що

$$\det\Big(i\varphi_0(I+H(\varphi_0))+E^{-1}(G-F)+E^{-1}(F+G)H(\varphi_0)\Big)=0.$$

Справді, за зробленим припущенням існує послідовність $\{\varphi_m\}_{m\ge1}$ така, що

$$\lim_{m\to\infty}\det\Big(i\varphi_m(I+H(\varphi_m))+E^{-1}(G-F)+E^{-1}(F+G)H(\varphi_m)\Big)=0.$$

З умови (3) теореми 1 та нашого припущенням випливає, що ця послідовність є обмеженою. Тому існує границя $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=\varphi_0$. Поклавши $x_0(t)=\exp\{i\varphi_0 t\}e$, де $\|e\|_{\mathbb{R}^n}=1$, отримаємо $\left(\left(N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+NM\right)x_0\right)(t)=0$, що суперечить (14), тобто припущення хибне.

Отже, якщо задача (1), (2) має єдиний обмежений розв'язок $u==u(x,t)$, $v=v(x,t)\in C^1([0,l]\times\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, то умови (3), (4) теореми 1 виконуються.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 1. У випадку, коли існує найменше спільне кратне φ_0 чисел $a_1,\dots,a_n$, функція $H(\varphi)$ є періодичною і в умові (3) теореми 1 достатньо вимагати, щоб φ пробігало значення від 0 до $2\pi/\varphi_0$.

Зауваження 2. Враховуючи те, що умови теореми вимагають оборотність операторів $I+H(\varphi)$ та $i\varphi(I+H(\varphi))+E^{-1}(G-F)+E^{-1}(G++F)H(\varphi))$, то можна їх послабити вимагаючи, щоб спектральний радіус операторів $H(\varphi)$ та $(\varphi E)^{-1}(F+G)-2F(\varphi E(I+H(\varphi)))^{-1}$ був меншим за одиницю. Ще більш слабшою є умова, щоб їх норми були меншими за одиницю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Слюсарчук В. Ю., Ярмуш Я. І., Дейнека О. Ю. *Обмежені розв'язки крайових задач для систем телеграфних рівнянь*// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. научн. труд. – Киев, 1995. – С.82–83.
2. Колесов Ю. С., Швитра Д. И. Автоколебания в системах с запаздыванием. — Вильнюс: Моксклас, 1974. – 147 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т.II. – М.: Наука, 1974.-656 с.
4. Мухамадиев Э. *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций*// Матем. заметки. – 1972. – Т.11, №3. – С.269–274.
5. Слюсарчук В. Е. *Обратимость с-непрерывных почти-периодических операторов*// Мат. сб. – 1981. – №4. – С.483–501.
6. Слюсарчук В. Е. *Ограниченные и почти-периодические решения линейных функциональных уравнений*// Качественное исследование дифференциально-функциональных уравнений: Сб. научн.труд. – Киев: Наукова думка, 1980. – С.144–148.
7. Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно с-непрерывных функционально-дифференциальных операторов* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, №2. – С.201–205.
8. Слюсарчук В. Е. *Оценки спектров и обратимость функциональных операторов* // Мат. сб. – 1978. – №2. – С.271–288.
9. Слюсарчук В. Е. *Ограниченные решения линейных функциональных уравнений.* – В кн.: Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К., 1977.– С.124–129.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1989. – 624 с.

Рівненський державний технічний університет

Надійшло 26.06.2000
Після переробки 1.02.2002