Математичні Студії. Т.17, №1 Matematychni Studii. V.17, No.1

УДК 512.538

Р. А. Заторський

# ПРО ПАРАВИЗНАЧНИКИ ТА ПАРАПЕРМАНЕНТИ ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

R. A. Zatorskyi. *On paradeterminants and parapermanents of triangle matrices*, Matematychni Studii, **17** (2002) 3–17.

Properties of some functions on the set of triangular matrices are studied.

Р. А. Заторский. *О параопределителях и параперманентах треугольных матриц* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №1. – С.3–17.

Изучаются свойства некоторых функций на множестве треугольных матриц.

Розгляд деяких комбінаторних задач (наприклад, вивчення шляхів на діаграмах Ферре [1,2] або задачі, в яких з'являються лінійні рекурентні співвідношення [3]) приводять до необхідності вивчення специфічних функцій на множині дійсних трикутних матриць (нижніх або верхніх), які за своїми властивостями нагадують класичні визначник і перманент. Зокрема такі функції дають новий апарат для вивчення лінійних рекурентних послідовностей та зв'язаних з ними понять, який в деяких питаннях істотно доповнює відомі методи, типу методу генератрис [4]. У роботі описані основні властивості таких функцій.

## 1. Трикутні матриці та їх паравизначники і параперманенти.

**Означення 1.1.** Трикутну таблицю чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1.1}$$

назвемо *трикутною матрицею*, а число $n$ — її *порядком.* Елемент $a_{11}$ назвемо *верхнім елементом матриці.*

**Означення 1.2.** Матрицю вигляду $A = (\delta_{ij} \cdot a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i}$, де $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, назвемо *діагональною матрицею*; матрицю $I = (\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i}$ — *одиничною матрицею,* а

2000 *Mathematics Subject Classification:* 05A05.

матрицю вигляду

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & \\ 0 & M_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & M_s \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

в якій $M_i$, $i \in \{1, ..., s\}$ — деякі трикутні матриці, а у вигляді нулів записано деякі прямокутні таблиці нулів, назвемо *блочно-діагональною.*

Кожному елементу $a_{ij}$ матриці (1.1) поставимо у відповідність $(i - j + 1)$ елементів $a_{ik}$, $k \in \{j, ..., i\}$, які назвемо похідними елементами матриці, що породжені *ключовим елементом* $a_{ij}$. Ключовий елемент є одночасно і його похідним елементом. Добуток всіх похідних елементів породжених ключовим елементом $a_{ij}$ позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо *факторіальним добутком ключового елемента* $a_{ij}$, тобто $\{a_{ij}\} = \prod\limits_{k=j}^{i} a_{ik}$.

Елементи матриці (1.1) будемо схематично зображувати кружечками, ключові елементи — замальованими кружечками, а похідні — зірочками. На мал. 1 схематично зображена матриця 5-го порядку, в якій $a_{42}$ — ключовий елемент, а елементи $a_{42}, a_{43}, a_{44}$ — похідні, ним породжені.

$$\begin{pmatrix} \circ & & & & \\ \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & \circ & & \\ \circ & \bullet & * & * & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

Мал.1.

**Означення 1.3.** Набір ключових елементів матриці (1.1) назвемо нормальним набором цієї матриці, якщо вони породжують множину похідних елементів потужності $n$, кожні два з яких не лежать в одному стовпці цієї матриці.

Наприклад, для того, щоб ключовий елемент матриці, зображеної на мал. 1 доповнити до нормального набору ключових елементів, до нього потрібно приєднати ще два ключові елементи $a_{11}$ і $a_{55}$.

Розглянемо множину $\mathrm{A}(n)$ впорядкованих розбиттів $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ натурального числа $n$. Число впорядкованих $r$-розбиттів числа $n$ дорівнює $\binom{n-1}{r-1}$. Отже, кількість впорядкованих розбиттів числа $n \in \mathbb{N}$ дорівнює

$$|\mathrm{A}(n)| = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}. \tag{1.3}$$

Нехай $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ — деяке впорядковане $r$-розбиття із множини $\mathrm{A}(n)$. Кожній компоненті $\alpha_s$, $s \in \{1, ..., r\}$, цього розбиття поставимо у відповідність ключовий елемент $a_{ij}$ матриці (1.1) за допомогою алгоритму:

п.1. початок

п.2. $j := 1$; $s := 0$; $i := 0$

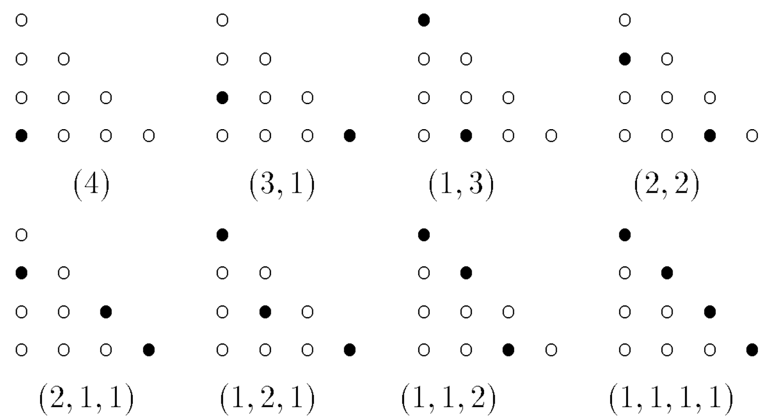
п.3. $s := s + 1; i := i + \alpha_s$ *ключел*$(s) := a_{ij}$

п.4. $s < r, j := j + \alpha_s$; перейти до п.3

п.5. кінець.

При цьому отримаємо нормальний набір ключових елементів, породжених розбиттям $\alpha$.

*Приклад 1.1.* Наведемо відповідність між впорядкованими розбиттями числа 4 і нормальними наборами ключових елементів матриці четвертого порядку на поданих нижче схемах




Мал. 2.

Кожному нормальному набору $a$ ключових елементів припишемо знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ — сума всіх індексів ключових елементів цього набору.

Якщо в матриці (1.1) $n = 6$, то нормальному набору ключових елементів $a = (a_{11}, a_{22}, a_{43}, a_{65})$ припишемо знак "+", позаяк сума всіх індексів цього набору дорівнює $\varepsilon(a) = 24$.

**Означення 1.4.** *Паравизначником* трикутної матриці (1.1) назвемо число

$$\operatorname{ddet}(A) = \diamondsuit_n = \left|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{matrix}\right|_{\diamondsuit} = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in \mathrm{A}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{i(s),j(s)}\right\}, \qquad (1.4)$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент, який відповідає $s$-тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$; $\varepsilon(a)$ — знак нормального набору $a$ ключових елементів.

Подібно означимо поняття параперманенту.

**Означення 1.5.** *Параперманентом* матриці (1.1) назвемо число

$$\operatorname{pper}(A) = i_n = \left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{matrix}\right] = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in \mathrm{A}(n)} \prod_{s=1}^{r} \left\{a_{i(s),j(s)}\right\}, \qquad (1.5)$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент, що відповідає $s$-тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ із множини розбиттів $\mathrm{A}(n)$.

Слід відзначити, що внаслідок (1.3) паравизначник (1.4) і параперманент (1.5) складаються із $2^{n-1}$ доданків.

*Приклад 1.2.* Обчислимо за допомогою схем (мал.2) наступний паравизначник:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \end{array}\right|_{\diamond} = \begin{array}{l} -a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} + a_{31}a_{32}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{42}a_{43}a_{44} + a_{21}a_{22}a_{43}a_{44} - \\ -a_{21}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{32}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \end{array}.$$

Кожному елементу $a_{ij}$ матриці (1.1) поставимо у відповідність трикутну таблицю елементів цієї матриці з цим елементом в лівому нижньому куті, яку назвемо рогом матриці і позначимо через $R_{ij}$. Очевидно, що ріг $R_{ij}$ є матрицею $i - j + 1$-го порядку. В ріг $R_{ij}$ входять тільки ті елементи $a_{rs}$ матриці (1.1), індекси яких задовольняють співвідношення $j \leqslant s \leqslant r \leqslant i$. Вважатимемо, що

$$\operatorname{ddet}(R_{01}) = \operatorname{ddet}(R_{n,n+1}) = \operatorname{pper}(R_{01}) = \operatorname{pper}(R_{n,n+1}) = 1. \tag{1.6}$$

*Приклад 1.3.* Якщо в матриці (1.1) $n = 5$, то ріг $R_{42}$ має вигляд

$$R_{42} = \left(\begin{array}{l} a_{22} \\ a_{32}a_{33} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{array}\right).$$

Якщо в розі $R_{ij}$ $j$-тий стовпець замінено відповідними елементами $k$-того стовпця $(k < j)$, а всі інші елементи рогу незмінні, то такий ріг позначимо, через $R_{i,j/k}$. Вважатимемо, що $\operatorname{ddet}(R_{n,\frac{n+1}{n}}) = \operatorname{pper}(R_{n,\frac{n+1}{n}}) = 0$.

В матриці (1.1) для $n = 5$ маємо

$$R_{4\frac{2}{1}} = \left(\begin{array}{l} a_{21} \\ a_{31}a_{33} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{array}\right).$$

**Означення 1.6.** Прямокутну таблицю елементів матриці (1.1) назвемо *вписаною в цю матрицю*, якщо одна її вершина збігається з елементом $a_{n1}$, а протилежна до неї — з елементом $a_{ii}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Цю таблицю позначимо, через $T(i)$.

*Зауваження.* Якщо в означенні 1.6 $i = 1$, або $i = n$, то прямокутна таблиця вироджується відповідно у перший стовпець чи $n$-тий рядок.

*Приклад 1.4.* Якщо в матриці (1.1) $n = 4$, то на її схематичному мал. 3, елементи вписаної таблиці $T(3)$ виділено прямокутником

$$\left(\begin{array}{llll} \circ & & & \\ \circ & \circ & & \\ \multicolumn{3}{|l|}{\circ \quad \circ \quad \circ} & \\ \multicolumn{3}{|l|}{\circ \quad \circ \quad \circ} & \circ \end{array}\right)$$

Мал. 3

При обчисленні паравизначників та параперманентів зручно користуватися відповідними алгебраїчними доповненнями

**Означення 1.7.** *Алгебраїчними доповненнями* $D_{ij}$, $P_{ij}$ до факторіального добутку ключового елемента $a_{ij}$ матриці (1.1) назвемо відповідно числа

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{ddet}(R_{j-1,1})\mathrm{ddet}(R_{n,i+1}), \quad P_{ij} = \mathrm{pper}(R_{j-1,1}) \cdot \mathrm{pper}(R_{n,i+1}),$$

де $R_{j-1,1}$ і $R_{n,i+1}$ — роги матриці (1.1).

## 2. Властивості паравизначників та параперманентів трикутних матриць.

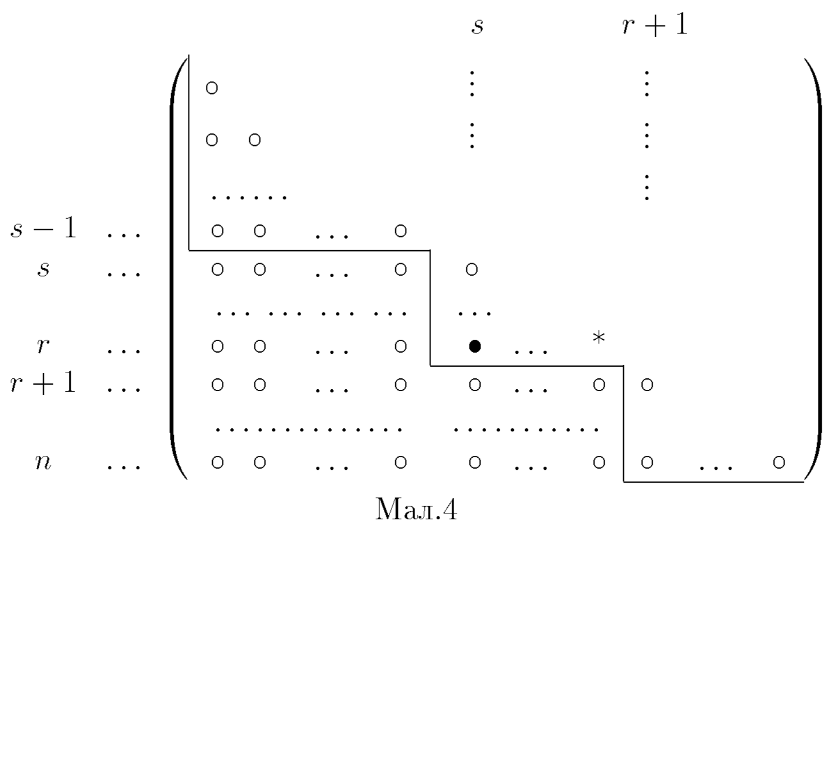
**Теорема 2.1.** (Розклад паравизначника та параперманента за елементами вписаної прямокутної таблиці). *Нехай $A$ — матриця (1.1), а $T(i)$ — деяка вписана в неї прямокутна таблиця елементів. Тоді виконуються рівності:*

$$ddet(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} D_{rs}, \tag{2.1}$$

$$pper(A) = \sum_{s=1}^{i} \sum_{r=i}^{n} \{a_{rs}\} P_{rs}, \tag{2.2}$$

*де $D_{rs}$ і $P_{rs}$ — відповідно алгебраїчні доповнення до фактор-добутку ключового елемента $a_{rs}$, що належить таблиці $T(i)$.*

*Доведення.* Роги $R_{s-1,1}$, $R_{n,r+1}$ складаються з різних елементів матриці (1.1), кожен з яких має відповідно порядок $(s-1)-1+1 = s-1$ і $n-(r+1)+1 = n-r$. Внаслідок означень 1.4, 1.5 паравизначник та параперманент цих рогів є сумою відповідно $2^{s-2}$ і $2^{n-r-1}$ різних доданків (тут згідно з домовленістю (1.6) зручно вважати, що $2^{-1} = 1$). Тому вирази $\{a_{rs}\} D_{rs}$, $\{a_{rs}\} P_{rs}$ для $n \in \{1, 2, \dots\}$ складаються із $2^{s-2} \cdot 2^{n-r-1}$ різних доданків. З мал.4 видно, що ключовий елемент $a_{rs}$ матриці (1.1) може входити в нормальний набір ключових елементів цієї матриці тільки в комбінації із нормальними наборами ключових елементів її рогів $R_{s-1,1}$, $R_{n,r+1}$. Зауважимо також, що кожен доданок, який входить до правої частини рівностей (2.1), (2.2) складається із добутку $n$ різних елементів матриці (1.1), позаяк $(s-1)+(r-s+1)+(n-r) = n$, де $s-1$ і $n-r$ — порядки рогів $R_{s-1,1}$ і $R_{n,r+1}$, а добуток $\{a_{rs}\}$ складається із $r-s+1$ співмножників (див. мал. 4).




Мал.4

Вирази, розташовані у правій частині рівностей (2.1), (2.2) складаються з $2^{n-1}$ доданків. Справді,

$$\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i}^{n} 2^{s-2}\cdot 2^{n-r-1} = (1+2^0+\ldots+2^{i-2})(2^{n-i-1}+2^{n-i-2}+\ldots+2^0+1) = 2^{n-1}.$$

Позаяк всі ці доданки різні, то теорему доведено. □

**Наслідок 1.** *Якщо $i=1$ або $i=n$, то вписаний прямокутник вироджується відповідно у перший стовпець чи останній рядок матриці (1.1). При цьому, враховуючи (1.5), (1.6) рівності (2.1), (2.2), у випадку $i=1$, запишуться у вигляді*

$$ddet(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\}\, D_{r1} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1}\{a_{r1}\}\cdot ddet(R_{n,r+1}),$$

$$pper(A) = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\}\, P_{r1} = \sum_{r=1}^{n} \{a_{r1}\}\cdot pper(R_{n,r+1}),$$

*а у випадку $i=n$ — у вигляді*

$$ddet(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\}\, D_{ns} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s}\{a_{ns}\}\cdot ddet(R_{s-1,1}),$$

$$pper(A) = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\}\, P_{ns} = \sum_{s=1}^{n} \{a_{ns}\}\cdot pper(R_{s-1,1}).$$

**Наслідок 2.** *Якщо у матриці $A$ всі елементи $i$-того стовпця ($i\in\{1,\ldots,n\}$) нулі, то $ddet(A) = pper(A) = 0$.*

Справедливість наслідку 2 випливає з того, що якщо всі елементи $i$-того стовпця дорівнюють нулю, то всі фактор-добутки елементів вписаної таблиці $T(i)$ дорівнюють нулю.

**Теорема 2.2.** (Розкладання за елементами $j$-того стовпця). *Нехай задана матриця (1.1), тоді справедливі рівності*

$$\sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\}\, D_{rj} = ddet(R_{j-1,1})ddet(R_{nj}), \tag{2.3}$$

$$\sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\}\, P_{rj} = pper(R_{j-1,1})pper(R_{nj}). \tag{2.4}$$

*Доведення.*

$$\sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\}D_{rj} = \sum_{r=j}^{n} \{a_{rj}\}\cdot(-1)^{r+j}\mathrm{ddet}(R_{j-1,1})\mathrm{ddet}(R_{n,r+1}) =$$

$$= \mathrm{ddet}(R_{j-1,1})\cdot\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r+j}\{a_{rj}\}\mathrm{ddet}(R_{n,r+1}).$$

Остання сума є розкладом паравизначника $\mathrm{ddet}(R_{nj})$ за елементами першого його стовпця, тому рівність (2.3) правильна.

Подібно доводиться рівність (2.4). □

**Теорема 2.3.** *Якщо всі елементи $a_{ri}$ $i$-того стовпця матриці (1.1) є сумою деяких двох елементів $b_{ri} + c_{ri}$, де $r \in \{i, \ldots, n\}$, то справедлива рівність*

$$\left|\begin{array}{l} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots b_{ii}+c_{ii} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots b_{ni}+c_{ni}\ldots a_{nn} \end{array}\right|_{\diamond} = \left|\begin{array}{l} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots b_{ii} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots b_{ni}\ldots a_{nn} \end{array}\right|_{\diamond} + \left|\begin{array}{l} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots c_{ii} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots c_{ni}\ldots a_{nn} \end{array}\right|_{\diamond} \qquad (2.5)$$

*Для параперманентів справедлива подібна рівність.*

*Доведення.* За означенням паравизначника кожен його доданок у правій стороні рівності (1.4) складається із добутку $n$ елементів матриці (1.1), при цьому в кожному з них присутній один і тільки один елемент із $i$-того стовпця. Тому в кожному із $2^{n-1}$ доданків паравизначника, розташованому у лівій стороні рівності (2.5), присутній множник $(b_{ri}+c_{ri})$, $r \in \{i, \ldots, n\}$. Розкриваючи дужки в кожному доданку і групуючи відповідно утворені доданки, отримаємо праву частину рівності (2.5). □

*Зауваження.* Спираючись на теорему 2.3, за індукцією можна довести справедливість подібної теореми у випадку суми $k$ доданків $b_{ri}^{(1)} + b_{ri}^{(2)} + \ldots + b_{ri}^{(k)}$, $r \in \{i, \ldots, n\}$. Якщо всі доданки рівні між собою і дорівнюють $b$, то рівність подібна до рівності (2.5) запишеться у вигляді

$$\left|\begin{array}{l} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots k\cdot b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots k\cdot b\ldots a_{nn} \end{array}\right|_{\diamond} = k\cdot \left|\begin{array}{l} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots b\ldots a_{nn} \end{array}\right|_{\diamond}$$

тобто справедливий наступний наслідок

**Наслідок.** *Якщо всі елементи деякого стовпця паравизначника мають спільний дільник, то його можна винести за знак цього паравизначника.*

Для параперманентів справедливі теорема та наслідок, подібні до теореми 2.3 і наслідку.

**Теорема 2.4.** *Якщо всі елементи першого стовпця матриці (1.1) $(n > 1)$ однакові і дорівнюють деякому числу $a$, то її паравизначник дорівнює нулю, а параперманент дорівнює подвоєному добутку цього числа на параперманент матриці, яка утворюється з матриці (1.1) внаслідок викреслювання її першого стовпця.*

*Доведення.* Розглянемо деяке впорядковане розбиття $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ числа $n$. Можливі два випадки: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 > 1$. У першому випадку розбиттю $\alpha$ поставимо у відповідність єдине корозбиття $\alpha' = (\alpha_2 + 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_r)$, а у другому — єдине корозбиття $\alpha' = (1, \alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. Отже, всі впорядковані розбиття числа $n$ можна розбити на пари $(\alpha, \alpha')$ розбиттів $\alpha$ і відповідних їм корозбиттів $\alpha'$. Позаяк всі елементи першого стовпця матриці (1.1) однакові, то розбиттям, що належать парі $(\alpha, \alpha')$ відповідають нормальні набори ключових елементів, добутки фактор-добутків яких однакові.

Нехай $(\alpha, \alpha')$ — деяка пара розбиттів, де $\alpha$ — корозбиття розбиття $\alpha'$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $\alpha = (1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$, $\alpha' = (\alpha_2 + 1, \alpha_3, \dots, \alpha_r)$. Порівняємо на парність суми індексів ключових елементів, які відповідають першим двом компонентам розбиття $\alpha$ з сумою індексів ключового елемента, який відповідає першій компоненті розбиття $\alpha'$. Компоненті 1 розбиття $\alpha$ відповідає ключовий елемент $a_{11}$, сума індексів якого не змінює парності. Нехай компоненті $\alpha_2$ розбиття $\alpha$ відповідає ключовий елемент $a_{i2}$, $i \in \{2, \dots, n\}$, тоді першій компоненті $\alpha_2 + 1$ розбиття $\alpha'$ відповідатиме ключовий елемент $a_{i1}$ з сумою індексів, яка відрізняється від суми індексів елемента $a_{i2}$ на одиницю. Отже, при обчисленні паравизначника, кожній парі розбиттів $(\alpha, \alpha')$ відповідатимуть два доданки рівні за абсолютною величиною, але протилежні за знаком і паравизначник за означенням 1.4 дорівнюватиме нулю.

При обчисленні параперманента заданої матриці за означенням 1.5 всі доданки, які відповідатимуть розбиттям із першою компонентою, що дорівнює одиниці, входитимуть у вираз $a \cdot \operatorname{pper}(R_{n2})$, тому перманент заданої матриці дорівнює $2 \cdot a \cdot \operatorname{pper}(R_{n2})$. □

**Теорема 2.5.** *Якщо відповідні елементи всіх рядків вписаної не виродженої таблиці деякого паравизначника однакові, то він дорівнює нулю.*

*Доведення.* Нехай у матриці (1.1) елементи вписаної, не виродженої таблиці $T(i)$ задовольняють умову теореми, тобто

$$a_{sr} = b_r, \quad s \in \{i, \dots, n\}; \quad r \in \{1, \dots, i.\} \tag{2.6}$$

Розглянемо суму $\sum\limits_{s=i}^{n} \{a_{sr}\} \, D_{sr}$. Враховуючи (2.6) і наслідок 1 із теореми 2.1, матимемо

$$\sum_{s=i}^{n} \{a_{sr}\} \, D_{sr} = (-1)^{r-i} b_r b_{r+1} \cdot \ldots \cdot b_{i-1} \operatorname{ddet}(R_{r-1,1}) \sum_{s=i}^{n} (-1)^{s+i} \{a_{si}\} \operatorname{ddet}(R_{n,s+1}) =$$
$$= (-1)^{r-i} b_r b_{r+1} \cdot \ldots \cdot b_{i-1} \cdot \operatorname{ddet}(R_{r-1,1}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{ni}).$$

Але за теоремою 2.4 $\operatorname{ddet}(R_{ni}) = 0$, що і доводить теорему. □

**Теорема 2.6.** *Якщо всі елементи $j$-того стовпця $(1 < j < n)$ матриці (1.1) однакові і дорівнюють $a$, то її паравизначник дорівнює добутку числа $(-a)$ на паравизначник матриці $B$, яка утворюється з матриці (1.1) внаслідок викреслювання $j$-того стовпця і $(j-1)$-го рядка, тобто справедлива рівність*

$$\left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,j-1} & & \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,j-1} & a & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a & \dots \; a_{nn} \end{array} \right|_{\diamond} = (-a) \cdot \left| \begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,j-1} & & & \\ \hline a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,j-1} & a & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a & \dots & a_{nn} \end{array} \right|_{\diamond}.$$

*Для параперманента цієї матриці справедлива рівність*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \dots & a_{j-1,j-1} & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j,j-1} & a & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a\cdot(2pper(R_{j-1,1})\cdot pper(R_{n,j+1}) + pper(B)).$$

*Доведення.* Розкладемо паравизначник даної матриці за елементами вписаної таблиці $T(j)$. В даний розклад ввійдуть всі доданки, які утворюються в результаті розкладу за елементами $j$-го стовпця. За теоремою 2.2 всі вони входять у вираз $\mathrm{ddet}(R_{j-1,1})\cdot \mathrm{ddet}(R_{nj})$, значення якого дорівнює нулю (теорема 2.4), позаяк $\mathrm{ddet}(R_{nj}) = 0$. Але до виразу $\mathrm{ddet}(R_{j-1,1})\cdot\mathrm{ddet}(R_{nj})$ входять всі доданки, співмножниками яких є принаймні один елемент $(j-1)$-го рядка, тому при обчисленні паравизначника матриці (1.1) $(j-1)$-й рядок можна викреслити. Решта доданків розкладу паравизначника за елементами вписаної таблиці матимуть своїм співмножником число $a$, тому винесення його за дужки рівнозначне викреслюванню $j$-того стовпця матриці (1.1). При цьому сума індексів ключового елемента, що належить вписаній таблиці, очевидно зменшиться на одиницю, а індекси решти ключових елементів не зміняться. Отже, викреслювання $j$-того стовпця змінює парність суми індексів ключових елементів кожного доданку, тому за дужки слід винести і число $(-1)$.

Розкладаючи параперманент даної матриці за елементами таблиці $T(j)$ ми отримаємо два вирази: перший вираз дорівнюватиме $\mathrm{pper}(R_{j-1,1})\cdot\mathrm{pper}(R_{nj}) = \mathrm{pper}(R_{j-1,1})\cdot 2a\cdot\mathrm{pper}(R_{n,j+1})$, а другий — $a\cdot\mathrm{pper}(B)$. □

*Приклад 2.1.* Обчислимо паравизначник вигляду

$$\diamondsuit_{n+1} = \left|\begin{matrix} z_1 \\ x_1 z_2 \\ x_1 x_2 z_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1 x_2 x_3 \dots z_n \\ x_1 x_2 x_3 \dots x_n 1 \end{matrix}\right|_{\diamondsuit}. \tag{2.7}$$

Подамо перший стовпець цього паравизначника у вигляді суми двох доданків, один з яких дорівнює $x_1$, тоді використовуючи теорему 2.3 отримаємо рівність

$$\diamondsuit_{n+1} = \left|\begin{matrix} z_1 - x_1 & & & & & \\ 0 & z_2 & & & & \\ 0 & x_2 & z_3 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & x_2 & x_3 & \dots & z_n & \\ 0 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \end{matrix}\right|_{\diamondsuit} + \left|\begin{matrix} x_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \end{matrix}\right|_{\diamondsuit}.$$

Другий паравизначник останньої рівності, внаслідок теореми 2.4, дорівнює нулю, тому розкладаючи перший паравизначник за елементами першого стовпця, отримаємо рівність

$$\diamondsuit_{n+1} = (z_1 - x_1)\cdot \left|\begin{matrix} z_2 \\ x_2 z_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_2 x_3 \dots z_n \\ x_2 x_3 \dots x_n 1 \end{matrix}\right|_{\diamond},$$

з якої, очевидно, випливає рівність

$$\diamondsuit_{n+1} = (z_1 - x_1)(z_2 - x_2)\cdot\ldots\cdot(z_n - x_n). \tag{2.8}$$

Якщо у (2.8) поміняти місцями $z_i$ і $x_i$, то отримаємо рівність

$$\diamondsuit_{n+1} = (z_1 - x_1)(z_2 - x_2)\cdot\ldots\cdot(z_n - x_n) = (-1)^n(x_1 - z_1)(x_2 - z_2)\cdot\ldots\cdot(x_n - z_n),$$

тобто, правильна рівність

$$\diamondsuit_{n+1} = \left|\begin{matrix} z_1 \\ x_1 z_2 \\ x_1 x_2 z_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1 x_2 x_3 \dots z_n \\ x_1 x_2 x_3 \dots x_n 1 \end{matrix}\right|_{\diamond} = (-1)^n \left|\begin{matrix} x_1 \\ z_1 x_2 \\ z_1 z_2 x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_1 z_2 z_3 \dots x_n \\ z_1 z_2 z_3 \dots z_n 1 \end{matrix}\right|_{\diamond}.$$

Якщо у рівності (2.8) прийняти $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = x$, то вона перепишеться у вигляді

$$\left|\begin{matrix} x \\ x_1 x \\ x_1 x_2 x \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1 x_2 x_3 \dots x \\ x_1 x_2 x_3 \dots x_n 1 \end{matrix}\right|_{\diamond} = (x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)\sigma_n x^0. \tag{2.9}$$

Отже, якщо многочлен $n$-того степеня з однією змінною подано у вигляді паравизначника, який лежить у лівій частині рівності (2.9), то тим самим знайдено корені цього многочлена. Позаяк справедлива рівність

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = \left|\begin{matrix} x & & & & & \\ 0 & x & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{0 \quad \dots \quad \dots \quad 0}_{n-1}} & x & \\ -\frac{a_0}{a_1} & -\frac{a_1}{a_2} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} & -a_{n-1} & 1 \end{matrix}\right|_{\diamond},$$

то задача відшукання коренів многочлена $n$-того степеня з однією невідомою зводиться до задачі приведення паравизначника, що знаходиться у правій частині останньої рівності, до паравизначника, розташованого у лівій частині рівності (2.9).

*Приклад 2.2.* Обчислимо параперманент подібний до паравизначника (2.7).

$$\square_{n+1} = \begin{bmatrix} z_1 - x_1 & & & & & \\ 0 & z_2 & & & & \\ 0 & x_2 & z_3 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & x_2 & x_3 & \dots & z_n & \\ 0 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & & & & & \\ x_1 & z_2 & & & & \\ x_1 & x_2 & z_3 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & z_n & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Розкладаючи перший параперманент за елементами першого стовпця і застосовуючи до другого параперманента теорему 2.4, отримаємо рівність

$$\square_{n+1} = (z_1 + x_1) \cdot \begin{bmatrix} z_2 \\ x_2 z_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_2 x_3 \dots z_n \\ x_2 x_3 \dots x_n 1 \end{bmatrix},$$

з якої, очевидно, випливає рівність

$$\square_{n+1} = (z_1 + x_1)(z_2 + x_2) \cdot \ldots \cdot (z_n + x_n).$$

**Теорема 2.7.** *Для блочно-діагональної матриці (1.4) справедливі рівності*

$$ddet \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 M_2 \\ \dots\dots\dots \\ 00 \dots M_s \end{pmatrix} = ddet(M_1) \cdot \ldots \cdot ddet(M_s), \tag{2.10}$$

$$pper \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 M_2 \\ \dots\dots\dots \\ 00 \dots M_s \end{pmatrix} = pper(M_1) \cdot \ldots \cdot pper(M_s), \tag{2.11}$$

*де* $M_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$ *— деякі трикутні матриці.*

*Доведення.* Доведемо рівність (2.10). Рівність (2.11) доводиться подібно. Нехай $a_{i_s i_s}$ — верхні елементи матриць $M_s$. Розкладемо паравизначник матриці (1.4) за елементами таблиці $T(i_2)$. Позаяк всі елементи цієї таблиці крім елементів стовпця $i_2$, дорівнюють нулю, то за теоремою 2.2 (рівність (2.3)), маємо рівність

$$\mathrm{ddet} \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 M_2 \\ \dots\dots\dots \\ 00 \dots M_s \end{pmatrix} = \mathrm{ddet}(M_1) \cdot \mathrm{ddet} \begin{pmatrix} M_2 \\ 0 M_3 \\ \dots\dots\dots \\ 00 \dots M_s \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи послідовно теорему 2.1 до таблиць $T(i_3), \dots, T(i_s)$, за теоремою 2.2, отримаємо рівність (2.10). $\square$

**Теорема 2.8.** *Нехай елементи матриці (1.1) є диференційовними функціями від змінної $t$, тоді справедливі рівності*

$$\frac{d}{dt}(ddet(A)) = \left|\begin{matrix} a'_{11} \\ a'_{21}a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a'_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{matrix}\right|_{\diamond} + \left|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}a'_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a'_{n2}\dots a_{nn} \end{matrix}\right|_{\diamond} + \dots + \left|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a'_{nn} \end{matrix}\right|_{\diamond}, \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}(pper(A)) = \left[\begin{matrix} a'_{11} \\ a'_{21}a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a'_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}a'_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a'_{n2}\dots a_{nn} \end{matrix}\right] + \dots + \left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21}a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a'_{nn} \end{matrix}\right]. \tag{2.13}$$

*Доведення.* За означенням паравизначника (параперманента), він складається із $2^{n-1}$ доданків, кожен з яких є добутком $n$ співмножників, по одному із кожного стовпця. Нехай $(-1)^{\varepsilon(a)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n}$ $(a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n})$ — один із доданків цього паравизначника (параперманента). Відомо, що

$$\frac{d}{dt}(a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n}) = a'_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n} + a_{i_1 1}a'_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n} + \ldots + a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a'_{i_n n}. \tag{2.14}$$

Обчислимо доданки паравизначників (параперманентів), що належать до правої частини рівності (2.12) ((2.13)), відповідні до доданку $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n}$, тоді , просумувавши їх, очевидно отримаємо вираз правої частини рівності (2.14). При цьому, внаслідок відповідності, знак доданку $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n}$ збігається із знаком відповідних доданків паравизначників, що лежать у правій частині рівності (2.12). Отже, сумуючи всі доданки $\frac{d}{dt}((-1)^{\varepsilon(a)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n})$ лівої частини рівності (2.12) ($\frac{d}{dt}(a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdot\ldots\cdot a_{i_n n})$ лівої частини рівності (2.13)), враховуючи рівність (2.14), отримаємо рівність (2.12) ((2.13)).

**Теорема 2.9.** (Теорема про зв'язок паравизначника і параперманента). *Якщо $A$ — матриця (1.1), то виконується рівність*

$$ddet\left((-1)^{\delta_{ij}+1}a_{ij}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = pper(a_{ij}). \tag{2.15}$$

*Доведення.* За означенням паравизначника, знак кожного його доданку залежить від парності суми індексів всіх ключових елементів. Легко бачити, що знак факторіального добутку ключового елемента $a_{ij}$ матриці $\left((-1)^{\delta_{ij}+1}a_{ij}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ збігається із знаком виразу $(-1)^{2i}$. Отже, всі доданки паравизначника, що знаходяться у лівій частині рівності (2.15) матимуть знак плюс. □

**3. Застосування паравизначників та параперманентів до розв'язування лінійних рекурентних рівнянь із сталими коефіцієнтами.**

**Означення 3.1.** Рівняння вигляду

$$f(n+k) = a_1\cdot f(n+k-1) + \ldots + a_k\cdot f(n), \quad 1\leqslant k\leqslant n, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.1}$$

де

$$f(i) = a_i^{(0)}, \quad i \in \{1, \ldots, k,\}\ a_i^{(0)} \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

називатимемо *канонічним рекурентним рівнянням порядку* $k$ зі сталими коефіцієнтами, а рівності (3.2) — *початковими умовами цього рівняння.*

**Теорема 3.1.** *Параперманент вигляду*

$$\square_{n+k} = \left[\begin{array}{ccccccc} a_1x_1 & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1x_2 & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1x_k & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{n}} & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{array}\right], \tag{3.3}$$

*де*

$$x_i = \frac{a_i^{(0)}}{a_1a_{i-1}^{(0)} + a_2a_{i-2}^{(0)} + \ldots + a_{i-1}a_1^{(0)} + a_i}, \quad i \in \{1, \ldots, k\}, \tag{3.4}$$

*та* $a_r^{(0)} = 0$*, при* $r \leqslant 0$*, є розв'язком рівняння (3.1) із початковими умовами (3.2).*

*Доведення.* Розкладемо даний параперманент за елементами останнього рядка, при цьому отримаємо рівність

$$\square_{n+k} = a_1\square_{n+k-1} + ... + a_k\square_n, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

яка з точністю до позначень збігається з рівнянням (3.1).

Знайдемо значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$ так, щоб виконувались початкові умови (3.2). Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\square_i = a_i^{(0)}, i \in \{1, \ldots, k\}$, яка після розкладу параперманентів $\square_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ за елементами останнього рядка, запишеться у вигляді наступних рівнянь:

$$\begin{aligned} &a_1x_1 = a_1^{(0)}, \\ &a_1x_2a_1^{(0)} + a_2x_2 = a_2^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1x_ka_{k-1}^{(0)} + a_2x_ka_{k-2}^{(0)} + \ldots + a_{k-1}x_ka_1^{(0)} + a_kx_k = a_k^{(0)}. \end{aligned}$$

Тому,

$$x_i = \frac{a_i^{(0)}}{a_1a_{i-1}^{(0)} + a_2a_{i-2}^{(0)} + \ldots + a_{i-1}a_1^{(0)} + a_i}, \quad i \in \{1, \ldots, k\},$$

при цьому $a_r^{(0)} = 0$ для $r \leqslant 0$.

Отже, розв'язком канонічного рекурентного рівняння (3.1) порядку $k$ із сталими коефіцієнтами і початковими умовами (3.2) є параперманент (3.3), де $x_i, i \in \{1, \ldots, k\}$ задаються рівностями (3.4). □

*Зауваження.* Розв'язок рівняння (3.1) з початковими умовами (3.2), користуючись теоремою про зв'язок паравизначника і параперманента, можна виразити через паравизначник.

Для рекурентного рівняння (3.1) початкові умови вигляду

$$f(1)=1,\ f(i)=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{a_{i-1}}{a_{i-2}} & \frac{a_{i-2}}{a_{i-3}} & \dots & a_1 \end{bmatrix}, i\in\{2,\dots,k\} \qquad (3.5)$$

назвемо *нормальними початковими умовами.*

**Теорема 3.2.** *Канонічне рекурентне рівняння порядку $k$ (3.1) із сталими коефіцієнтами і нормальними початковими умовами має розв'язок вигляду*

$$f(n+k)=\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ \frac{a_k}{a_{k-1}} & \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ 0 & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \dots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0\quad\dots\quad 0}_{n}} & \frac{a_k}{a_{k-1}} & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}_{n+k}.$$

*Доведення.* Доведемо, що за нормальних умов правильні рівності $x_i=1, i\in\{1,\dots,k\}$ . Розкладемо паравизначник (3.5) за елементами останнього рядка; отримаємо рівності

$$a_i^{(0)}=f(i)=a_1f(i-1)+a_2f(i-2)+\dots a_{i-1}f(1)+a_i=a_1a_{i-1}^{(0)}+a_2a_{i-2}^{(0)}+\dots+a_{i-1}a_1^{(0)}+a_i,$$

тобто у рівностях (3.4) чисельник дорівнює знаменнику. □

*Приклад 3.1.* Для чисел Фібоначчі $F_n, n\geqslant 1$, де $F_1=F_2=1$ і $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, рівність (3.3) теореми 3.1 набуває вигляду

$$F_{n+2}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 0.5 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0\quad\dots\quad 0}_{n}} & 1 & 1 \end{bmatrix}_{n+2}=\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 0.5 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0\quad\dots\quad 0}_{n}} & -1 & 1 \end{vmatrix}_{\diamond n+2}.$$

Автор вдячний Ганюшкіну О.Г., Григорчуку Р.І. та Стєчкіну Б.С. за обговорення результатів статті.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Эндрюс Г. Теория разбиений: Пер. с англ. — М.: Наука, 1982. - 256 с.
2. Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. – 224 с., ил.

3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1998. – 703 с., ил.

4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. – 440 с., ил.

Київський університет ім. Тараса Шевченка

*Надійшло 10.10.2001*