УДК 512.54

О. О. Безущак

РОЗЩІПЛЮВАЛЬНІ НОРМАЛЬНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ ІЗОМЕТРІЙ МЕТРИЧНОГО ПРОСТОРУ УЗАГАЛЬНЕНОГО БЕРОВОГО ТИПУ

O. O. Bezuschak. *Splittable normal subgroups of isometry group of a generalized Baire metric space*, Matematychni Studii, **17** (2002) 29–40.

We describe splittable normal subgroups of isometry group of a generalized Baire metric space, the lattice of which is everywhere dense sublattice of the lattice of closed normal subgroups.

О. О. Безущак. *Расщепляемые нормальные подгруппы группы изометрий метрического пространства обобщенного бэровского типа* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №1. – C.29–40.

Охарактеризованы расщепляемые нормальные подгруппы группы изометрий метрического пространства обобщенного бэровского типа, решетка которых является всюду плотной подрешеткой решетки замкнутых нормальных подгрупп.

Задачі дослідження груп ізометрій різних комбінаторно-топологічних структур є традиційними для геометричної теорії груп [4]. Часто це тісно пов'язується з вивченням груп автоморфізмів різних типів дерев. Так, група ізометрій простору Бера типу $(n_1, n_2, \dots)$ (у сенсі [2]) ізоморфна до групи ізометрій шарово-однорідного дерева такого ж типу. Групу ізометрій узагальненого простору Бера (див. [3]) можна природним чином інтерпретувати як групу тих автоморфізмів певного дерева, що зберігають нерухомим один з його початків. А тому при дослідженні таких груп можна використовувати як мову автоморфізмів дерев, так і мову ізоморфізмів метричних просторів. У цій статті характеризуються розщіплювальні нормальні підгрупи групи ізометрій метричного простору узагальненого берового типу, які утворюють скрізь щільну (в топологічному сенсі) підгратку квазіметричної гратки замкнених нормальних підгруп. (Мова про те, що розщіплювальні нормальні підгрупи утворюють скрізь щільну у топологічному сенсі пігратку гратки замкнених нормальних підгруп, піде в іншій статті.)

Нехай $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел, (G_k, M_k), $k \in \mathbb{Z}$, — сім'я груп підстановок, $M = \prod_{k\in\mathbb{Z}} M_k$. Для довільного набору $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in M$ і числа $r \in \mathbb{Z}$ позначатимемо через ${}^{(r)}x = (x_k)_{k\leq r}$ нескінченний вліво початок цього набору з крайньою правою координатою x_r, а через $x^{(r)} = (x_k)_{k\geq r}$ його нескінченний вправо кінець з крайньою лівою координатою x_r. Приймемо також ${}^{(r)}M = \prod_{k\leq r} M_k$ і через $\mathrm{Fun}({}^{(r)}M, G_{r+1})$ позначимо

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20F29, 20E08, 20B27.

множину всіх функцій із ${}^{(r)}M$ в G_{r+1}. Функцію, яка тотожно дорівнює одиниці групи G_{r+1}, позначатимемо символом ε_{r+1} або просто ε. Згідно з [1] *таблицями* будемо називати найможливіші нескінченні набори вигляду

$$a = [a_k]_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \text{де} \quad a_k \in \mathrm{Fun}({}^{(k-1)}M, G_k)\ . \tag{1}$$

Поруч із позначенням $a = [a_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ вживатимемо і запис $a = [\ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots]$. Із таблицею $a = [a_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ зручно пов'язати кілька похідних таблиць:

$${}^{(k)}a = [\ldots, a_{k-2}, a_{k-1}, a_k, \varepsilon, \varepsilon, \ldots]\ ,\ a^{(k)} = [\ldots, \varepsilon, \varepsilon, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]\ ,$$

$$[a]_k = [\ldots, \varepsilon, \varepsilon, a_k, \varepsilon, \varepsilon, \ldots]\ .$$

Нехай A — деяка множина таблиць вигляду (1). *k–проекцією множини A* назвемо множину $[A]_k = \{[a]_k, a \in A\}$. Говоритимемо, що *множина A є k-координатною*, якщо $[A]_k = A$.

Визначимо дію таблиці $a = [a_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ на елемент $m = (m_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in M$ за правилом

$$m^a = (m_k^{a_k({}^{(k-1)}m)})_{k\in\mathbb{Z}}\ .$$

Добутком таблиць $a = [a_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ і $b = [b_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ назвемо таблицю $c = [c_k]_{k\in\mathbb{Z}}$, для якої

$$c_k({}^{(k-1)}x) = a_k({}^{(k-1)}x) \cdot b_k({}^{(k-1)}(x^a))\ . \tag{2}$$

Множина G всіх таблиць вигляду (1) відносно так визначеного множення утворює напівгрупу, нейтральним елементом якої є таблиця $e = [\ldots, \varepsilon, \varepsilon, \ldots]$.

Наступні поняття введені В.І.Сущанським

Означення [2]. *Глибиною $dh(a)$ таблиці $a \in G$ $(a \neq e)$* назвемо таке ціле число s, що $a_k = \varepsilon$ при $k \leq s$ і $a_{s+1} \neq \varepsilon$. Якщо такого числа не існує, то $dh(a) = -\infty$. Окремо вважатимемо, що $dh(e) = \infty$.

Таблиця a називається *локально обмеженою* [3], якщо для довільного $x \in M$ існує таке $k \in \mathbb{Z}$, що ${}^{(k)}x = {}^{(k)}(x^a)$. Тоді для довільної локально обмеженої таблиці $a = [a_k]_{k\in\mathbb{Z}}$ існує обернена до неї таблиця

$$a^{-1} = [a_k^{-1}({}^{(k-1)}(x^{({}^{(k-1)}a)^{-1}}))]_{k\in\mathbb{Z}}\ .$$

Множини $\hat{G} := \{a \in G$, де a — локально обмежена таблиця$\}$ і $G^* := \{a \in G$, де $dh(a) > -\infty\}$ є підгрупами напівгрупи G, при цьому $G^* < \hat{G}$.

Нехай $M(m)$ — множина всіх елементів із M, що мають деякий спільний початок з $m \in M$. Ця множина є інваріантною відносно кожної з груп $\hat{G}$ і G^*, тому $\hat{G}$ і G^* індукують на $M(m)$ групи підстановок, які позначатимемо $\hat{G}(m)$ та $G^*(m)$ відповідно. Зазначимо, що для розбиття $M = \bigsqcup_i M(m^i)$ правильне співвідношення

$$(\hat{G}, M) = \bigoplus^{D}\ (\hat{G}(m^i), M(m^i))\ .$$

Надалі групи $\hat{G}(m)$ та $G^*(m)$ називатимемо $(\hat{\ell}, m)$- та (ℓ^*, m)-*вінцевими добутками* груп (G_k, M_k), $k \in \mathbb{Z}$, [3]. У випадку, коли групи $\hat{G}(m)$ (відповідно $G^*(m)$) для всіх $m \in M$ подібні, кажуть, що $\hat{G}(m)$ є *$\hat{\ell}$-вінцевим добутком* (відповідно $G^*(m)$ — *ℓ^*-вінцевим* *добутком*) груп (G_k, M_k), $k \in \mathbb{Z}$. Групи $\hat{G}(m)$ (відповідно $G^*(m)$) є такими, наприклад, у випадку, коли всі (G_k, M_k), $k \in \mathbb{Z}$, — транзитивні групи підстановок.

Зафіксуємо число η, $0 < \eta < 1$, і визначимо на множині $M(m)$ неархімедову метрику d правилом

$$d(x,y) = \eta^k \Leftrightarrow [\,{}^{(k)}x = {}^{(k)}y,\ x_{k+1} \neq y_{k+1}]\ (x,\ y \in M(m))\ , \tag{3}$$

окремо $d(x,x) = 0$.

Метричний простір $E = (M(m), d)$ з точністю до ізометричності не залежить від вибору елементу $m \in M$ і називається *узагальненим простором Бера* над сім'єю M_k, $k \in \mathbb{Z}$, [3].

Теорема 1 [3]. *Група ізометрій узагальненого простору Бера над сім'єю множин M_k, $k \in \mathbb{Z}$, подібна до $\hat{\ell}$-вінцевого добутку симетричних груп $S(M_k)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Надалі позначатимемо групу ізометрій простору E як I, а її підгрупу, що визначається таблицями скінченної глибини, як I^*. Кожній ізометрії a простору E поставимо у відповідність функцію $k_a : M(m) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, $k_a(t) = \max\{k :\ {}^{(k)}(t^a) =\ {}^{(k)}t\}$ (коректність означення функції k_a випливає з локальної обмеженості a як елементу $\hat{\ell}$-вінцевого добутку). Прообраз $k_a^{-1}(z)$ елементу $z \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ назвемо *диском ізометрії* a, а множину всіх дисків позначимо через ψ_a. Очевидно, що кожний диск $B \in \psi_a$ є інваріантною множиною для a, тому можна говорити про обмеження a_B ізометрії a на диск B і про розклад

$$a = \bigoplus_{B \in \psi_a}^{D} a_B\ , \tag{4}$$

який називатимемо *спектральним розкладом ізометрії* a.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ в групі I^* виділимо дві підгрупи ${}^{(k)}I = \{{}^{(k)}a : a \in I\}$ та $I^{(k)} = \{a^{(k)} : a \in I\}$, друга з яких до того ж є ще й нормальною. Тоді група I^* розкладатиметься в напівпрямий добуток $I^* = {}^{(k-1)}I \rightthreetimes I^{(k)}$, при цьому k-проекція $[I]_k$ є декартовим степенем $S(M_k)$ і $[I]_k = {}^{(k)}I \cap I^{(k)}$. Підгрупу $I^{(k)}$ називатимемо *k-тою базою ℓ^*-вінцевого добутку.* Система k-тих баз задає на I^* топологію і перетворює I^* в топологічну групу.

Для метрики (3) визначимо функцію $\rho\colon I^* \times I^* \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ у наступний спосіб

$$\rho(a,b) = \max_{x \in M(m)} d(x^a, x^b)\ .$$

Ця функція визначена коректно і

$$\rho(a,b) = \eta^k \Leftrightarrow [\,{}^{(k-1)}a = {}^{(k-1)}b,\ a_{k+1} \neq b_{k+1}]\ .$$

Як доведено в [3], ρ є ліво- і правоінваріантною ультраметрикою на групі I^*. Топологія, що визначається метрикою ρ на групі I^*, збігається з топологією, що задається на I^* системою k-тих баз, при цьому відносно цієї топології група I^* є локально компактною і цілком незв'язною.

1. Розщіплювальні нормальні підгрупи групи I

Надалі вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}$ множина M_k скінченна. Наступні поняття для випадку групи ізометрій простору Бера типу $(n_1, n_2, \dots)$ введені В. І. Сущанським в [2].

Означення. Підгрупу U групи I називатимемо *розщіплювальною,* якщо разом з кожною таблицею $a \in U$ вона містить також і таблиці ${}^{(k)}a$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Позаяк для довільного $a \in I$ та $k \in \mathbb{Z}$ правильна рівність $a = {}^{(k-1)}a \cdot a^{(k)}$, то розщіплювальна підгрупа U разом із кожною таблицею a містить і всі таблиці $a^{(k)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому в розщіплювальній підгрупі U природно виділити дві підгрупи ${}^{(k)}U = \{{}^{(k)}a : a \in U\}$ та $U^{(k)} = \{a^{(k)} : a \in U\}$, друга з яких до того ж нормальна в U. Тоді U розкладатиметься в напівпрямий добуток своїх підгруп ${}^{(k-1)}U$ та $U^{(k)}$. Для нерозщіплювальної підгрупи U також можна розглядати ${}^{(k)}U$ і $U^{(k)}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$, однак тепер ці множини можуть не бути підгрупами групи U.

Якщо U — розщіплювальна підгрупа групи I, то k-проекції $[U]_k$ є підгрупами групи U, при цьому $[U]_k = {}^{(k)}U \cap U^{(k)}$. Якщо до того ж U міститься в I^*, то сім'я $([U]_k, k \in \mathbb{Z})$ породжуватиме скрізь щільну підгрупу групи U.

Говоритимемо, що *підгрупа* $U < I$ *визначається своїми* k*-проекціями* $[U]_k$, $k \in \mathbb{Z}$ (або що k*-координатні множини* $[U]_k$, $k \in \mathbb{Z}$, *визначають підгрупу* U), якщо ця підгрупа складається з найможливіших таблиць $a \in I$ таких, що $[a]_k \in [U]_k$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$. Тоді всі k-координатні множини є підгрупами групи U, а сама U завжди розщіплювальною. Символом $U|_k$ позначатимемо множину всіх функцій a_k таких, що $[\dots, \varepsilon, a_k, \varepsilon, \dots] \in [U]_k$, тобто $U|_k = \{a_k : [\dots, \varepsilon, a_k, \varepsilon, \dots] \in [U]_k\}$.

Означення. Нехай k — деяке ціле число, H — підгрупа групи ${}^{(k-1)}I$. Підгрупу $V < [I]_k$ називатимемо *H-допустимою,* якщо для довільних функції $a_k \in V|_k$ та таблиці $b \in H$

$$a_k({}^{(k-1)}(x^b)) \in V|_k \ . \tag{5}$$

Твердження 1. *Якщо підгрупа $U < I$ визначається своїми k-проекціями $[U]_k, k \in \mathbb{Z}$, то для кожного k множина $[U]_{k+1}$ є ${}^{(k)}U$-допустимою підгрупою групи $[I]_{k+1}$.*

Доведення. Оскільки підгрупа, що визначається своїми k-проекціями, є розщіплювальною, то для довільних $a, b \in U$ матимемо ${}^{(k-1)}a$, ${}^{(k-1)}a \cdot b \in U$, і умова (5) випливає з правила (2) множення таблиць. □

Лема 1. *Нехай U — розщіплювальна нормальна підгрупа групи I. Тоді k-координатна підгрупа $[U]_k$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$ є ${}^{(k-1)}I$-допустимою нормальною підгрупою групи $[I]_k$.*

Доведення полягає у безпосередній перевірці.

Означення. Нехай $U < {}^{(k-1)}I$. ${}^{(k-1)}I$-допустиму нормальну підгрупу V групи $[I]_k$ назвемо *U-насиченою,* якщо для кожного $b \in [I]_k$ та $a \in U$ справедливе включення

$$b_k({}^{(k-1)}x) \cdot b_k^{-1}({}^{(k-1)}(x^a)) \ \in \ V|_k \ .$$

Глибиною $dh([U]_k, k \in \mathbb{Z})$ сім'ї координатних підгруп $([U]_k, k \in \mathbb{Z})$ вважатимемо таке найменше ціле число s, для якого $[U]_{s+1} \neq \{e\}$. Якщо такого числа не існує, то приймемо $dh([U]_k, k \in \mathbb{Z}) = -\infty$. Окремо $dh([\{e\}]_k, k \in \mathbb{Z}) = \infty$. Також будемо казати, що підгрупа U групи I має *глибину* s (і позначатимемо $dh(U)$), якщо вона містить таблиці глибини s і не містить таблиць глибини меншої за s. Інакше, $dh(U) = -\infty$. Окремо $dh(\{e\}) = \infty$. Зрозуміло, що коли підгрупа U визначається сім'єю координатних підгруп $([U]_k, k \in \mathbb{Z})$, то $dh([U]_k, k \in \mathbb{Z}) = dh(U)$.

Теорема 2. *Підгрупа $U < I$, визначена сім'єю координатних підгруп $([U]_k, k \in \mathbb{Z})$ скінченної глибини s, є розщіплювальною нормальною підгрупою в I тоді й лише тоді, коли:*

a) $[U]_{s+1}$ *є ${}^{(s)}I$-допустимою нормальною підгрупою групи $[I]_{s+1}$;*

b) для всіх $k \geq s+1$ $[U]_{k+1}$ г ${}^{(k)}U$-насиченою підгрупою групи $[I]_{k+1}$.

Доведення. Необхідність. Згідно з лемою 1 для всіх $k \in \mathbb{Z}$ координатна підгрупа $[U]_{k+1}$ є ${}^{(k)}I$-допустимою нормальною підгрупою групи $[I]_{k+1}$. Нехай $k \geq s+1$. Тоді в U існує таблиця вигляду $a = [\dots, \varepsilon, \varepsilon, a_{s+1}, \dots, a_k, \varepsilon, \varepsilon, \dots]$ і для довільної таблиці $b \in I$ маємо

$$[b \cdot a \cdot b^{-1}]_{k+1} = [\dots, \varepsilon, b_{k+1}({}^{(k)}x) \cdot b_{k+1}^{-1}({}^{(k)}(x^{{}^{(k)}b \cdot {}^{(k)}a \cdot ({}^{(k)}b)^{-1}})), \varepsilon, \dots] \in [U]_{k+1} .$$

Але таблиці вигляду ${}^{(k)}b \cdot {}^{(k)}a \cdot ({}^{(k)}b)^{-1}$ пробігають усі елементи групи ${}^{(k)}U$. Тому підгрупа $[U]_{k+1}$ є ${}^{(k)}U$-насиченою.

Достатність. Нехай сім'я $([U]_k, k \in \mathbb{Z})$ задовольняг умови теореми. Тоді визначена цією сім'єю підгрупа U розщіплювальна. Доведемо, що для довільних таблиць $a \in U$, $b \in I$ та числа $k \in \mathbb{Z}$ $[b \cdot a \cdot b^{-1}]_k \in [U]_k$ (тобто що ${}^{(k)}U$ нормальна в ${}^{(k)}I$). Для $k \leq s$ це очевидно, а ${}^{(s+1)}U = [U]_{s+1}$ — нормальна в ${}^{(s+1)}I$. Нехай $k > s+1$. Припустимо, що $[b \cdot a \cdot b^{-1}]_k \in [U]_j$ для всіх $j \leq k-1$. Оскільки

$$[b \cdot a \cdot b^{-1}]_k = [{}^{(k)}b \cdot {}^{(k)} a \cdot ({}^{(k)}b)^{-1}]_k = [{}^{(k)}b \cdot {}^{(k-1)} a \cdot ({}^{(k)}b)^{-1} \cdot {}^{(k)} b \cdot [a]_k \cdot ({}^{(k)}b)^{-1}]_k =$$

$$[\dots, \varepsilon, b_k({}^{(k-1)}x) \cdot b_k^{(-1)}({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1}})) \cdot b_k({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1}})) \cdot a_k({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1} \cdot b})) \cdot$$

$$b_k^{(-1)}({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1} \cdot b \cdot b^{-1}})), \varepsilon, \dots], \quad {}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1}}) = {}^{(k-1)}(x^{{}^{(k-1)}b \cdot {}^{(k-1)}a \cdot ({}^{(k-1)}b)^{-1}})$$

і за припущенням ${}^{(k-1)}b \cdot {}^{(k-1)} a \cdot ({}^{(k-1)}b)^{-1} \in {}^{(k-1)}U$, то $b_k({}^{(k-1)}x) \cdot b_k^{-1}({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1}})) \in U|_k$ внаслідок ${}^{(k-1)}U$-насиченості підгрупи $[U]_k$. Але $[U]_k$ нормальна в $[I]_k$. Тому $b_k({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1}})) \cdot a_k({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a})) \cdot b_k^{(-1)}({}^{(k-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1}})) \in U|_k$. Отже, $[b \cdot a \cdot b^{-1}]_k \in [U]_k$. □

Теорема 3. *Підгрупа $U < I$, визначена сім'єю координатних підгруп $([U]_k, k \in \mathbb{Z})$ глибини $-\infty$, є розщіплювальною нормальною підгрупою в I тоді й лише тоді, коли для всіх k $[U]_{k+1}$ є ${}^{(k)}U$–насиченою підгрупою групи $[I]_{k+1}$.*

Доведення. Необхідність умови доводиться подібно, як і в теоремі 2.

Достатність. Нехай тепер усі $[U]_{k+1}$ є ${}^{(k)}U$-насиченими підгрупами. Тоді підгрупа U є розщіплювальною, позаяк вона визначена сім'єю координатних підгруп. Крім цього, для елементів $a \in U$ і $b \in I$ кожен диск із ψ_a і ψ_b міститься в деякому з дисків елементу $w = b \cdot a \cdot b^{-1}$. Нехай $B \in \psi_w$. Позначимо $U(B) = \{d \in U : d(B) = B\}$. Тоді $U(B)$ — підгрупа в I і за теоремою 2 $U(B)$ — нормальна в I. Тому $w_B \in U(B)$, а, отже, $w \in U$ і теорему доведено. □

Теореми 2 і 3 залишаються справедливими, якщо в їхніх формулюваннях скрізь замінити групу I на I^* (отримані у такий спосіб твердження назвемо теоремами 2^* та 3^*). Це випливає з наступного очевидного твердження.

Твердження 2. *Нехай* $([U]_k, k \in \mathbb{Z})$ — *сім'я координатних підгруп,* U *та* U^* — *визначені цією сім'єю підгрупи в* I *та* I^* *відповідно. Тоді:*

a) $U^* = U \lesseqgtr I^*$;

b) U — розщіплювальна підгрупа в I тоді й лише тоді, коли U^* — розщіплювальна підгрупа в I^*;

c) U — нормальна в I тоді й лише тоді, коли U^* — нормальна в I^*.

2. Координатні підгрупи розщіплювальних нормальних підгруп.

Нехай $E = (M(m), d)$ — узагальнений простір Бера над сім'єю $(M_r, r \in \mathbb{Z})$, k, j — довільні цілі числа такі, що $k < j$. На множині ${}^{(j-1)}M(m) := \{{}^{(j-1)}x : x \in M(m)\}$ визначимо відношення еквівалентності $\sim_k$ у наступний спосіб:

$x \sim_k y$ [redacted] $$[\,{}^{(k)}x = {}^{(k)}y,\ x_{k+1} \neq y_{k+1}]\ \ (x, y \in {}^{(j-1)}M(m))\ .$$

Позначимо символом ${}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$ клас еквівалентності відношення $\sim_k$ з представником t, а множину усіх таких класів відношення $\sim_k$ символом $M(m,k,j)$. Тоді кожній функції $a_j \in Fun({}^{(j-1)}M(m), G_j)$ однозначно ставиться у відповідність набір

$$(a_j|_K, K \in M(m,k,j))\ , \tag{6}$$

що складається із функцій $a_j|_K$, які є обмеженнями функції a_j на класи еквівалентності K. Надалі елементи набору (6) називатимемо $({}^{(k)}t, j)$-*функціями* і коротко позначатимемо $a_j|^{(k)}t$. Якщо a — така таблиця із I, що для кожного $x \in {}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$ маємо $x^a \in {}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$, то підстановку, яка є обмеженням a на множину ${}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$, коректно задавати набором $a({}^{(k)}t, j) = [\ldots, \varepsilon, \varepsilon, a_{k+1}|^{(k)}t, \ldots, a_j|^{(k)}t]$ і називати $({}^{(k)}t, j)$-*таблицею*. Сукупність $({}^{(k)}t, j)$-таблиць утворює групу, яку позначимо символом $I({}^{(k)}t, j)$.

Позаяк множина ${}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$ є скінченною, то при довільному впорядкуванні її елементів можна розглянути добуток усіх значень $({}^{(k)}t, j)$-функції $a_j|^{(k)}t$ на елементах цієї множини в даному порядку. При різних впорядкуваннях такі добутки розрізняються на деякий елемент із комутанта $S'(M_j)$, тобто вони визначають один і той же елемент фактор-групи $S(M_j)/A(M_j)$, який позначимо $\Omega(a_j({}^{(j-1)}x), {}^{(k)}t)$.

Означення. Нехай $k, j \in \mathbb{Z}$, $k < j$. Функцію $a_j \in \mathrm{Fun}({}^{(j-1)}M(m), S(M_j))$ назвемо *k-парною j-го рівня*, якщо для всіх $t \in M(m)$

$$\Omega(a_j({}^{(j-1)}x), {}^{(k)}t)\ =\ e\ . \tag{7}$$

Множину усіх k-парних функцій j-го рівня позначимо символом $F_{j,k}$. Тоді

$$T_{j,k} := \{[\ldots, \varepsilon, \varepsilon, a_j, \varepsilon, \varepsilon, \ldots], a_j \in F_{j,k}\}$$

є підгрупою групи $[I]_j$, а

$$T_j({}^{(k)}t) := \{[\ldots, \varepsilon, \varepsilon, a_j|^{(k)}t, \varepsilon, \varepsilon, \ldots] a_j \in F_{j,k}\}$$

є підгрупою j-проекції групи $I({}^{(k)}t, j)$.

Лема 2. *Нехай N — скінченна множина і $G = S(N) \bigoplus \ldots \bigoplus S(N)$ — скінченне пряме кратне симетричної групи $S(N)$. Тоді підгрупа H усіх парних підстановок з G породжується елементами вигляду $(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \pi, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, де $\pi \in A(N)$, і $(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \tau, \varepsilon, \ldots, \varepsilon, \tau^{-1}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, де $\tau \in S(N) \setminus A(N)$.*

Доведення. Нехай $a \in H$ і $a = (a_1, \ldots, a_j)$, де j — кількість компонент у розкладі G в пряму суму. Якщо для всіх $i \in \{1, \ldots, j\}$ $a_i \in A(N)$, то, очевидно, що a є добутком елементів вигляду $(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \pi, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, де $\pi \in A(N)$. Нехай тепер не всі a_i є парними підстановками. Тоді кількість непарних значень є деяким парним числом $2n$, $n \in \mathbb{N}$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $a_1, a_2 \in S(N) \setminus A(N)$. Розглянемо підстановку $b^{(1)} = (b_1^{(1)}, \ldots, b_j^{(1)})$ таку, що $b_1^{(1)} = a_1^{-1}$, $b_2^{(1)} = a_1$, $b_3^{(1)} = \varepsilon$, …, $b_j^{(1)} = \varepsilon$. Ця підстановка є елементом другого типу із умови леми. Тому $a \cdot b^{(1)} \in H$ і для всіх $i \in \{1, \ldots, j\} \setminus \{1, 2\}$ $a_i \cdot b_i^{(1)} = a_i$, $a_1 \cdot b_1^{(1)} = \varepsilon$, $a_2 \cdot b_2^{(1)} = a_2 \cdot a_1 \in A(N)$, тобто тільки $2n - 2$ компоненти елемента $a \cdot b^{(1)}$ є непарними підстановками. Продовжуючи так далі, на n-му кроці отримаємо підстановку $a \cdot b^{(1)} \cdot \ldots \cdot b^{(n)}$, яка розкладається у добуток елементів вказаних в умові леми виглядів. □

Лема 3. *Підгрупа $T_{j,k}$ $(k, j \in \mathbb{Z}, k < j)$ є ${}^{(j-1)}I$-допустимою нормальною підгрупою групи $[I]_j$, при цьому справедливий розклад*

$$T_{j,k} = \bigoplus_{K \in M(m,k,j)}^{D} T_j(K)\ , \tag{8}$$

де $T_j(K)$ — обмеження групи $T_{j,k}$ на клас K, а кожна $T_j(K)|_j$ породжується $({}^{(k)}t, j)$-функціями двох типів:

a) *функціями a_j, для яких існує єдиний набір $x \in K$ такий, що $a_j(x) \neq \varepsilon$, при цьому $a_j(x) \in A(M_j)$;*

b) *функціями a_j, для яких існує точно два набори $x, y \in K, x \neq y$, таких, що $a_j(x) \neq \varepsilon$, $a_j(y) \neq \varepsilon$, при цьому $a_j(x), a_j(y) \in S(M_j) \setminus A(M_j)$ і $a_j(x) \cdot a_j(y) = \varepsilon$.*

Доведення. Підгрупа $T_{j,k}$ є ${}^{(j-1)}I$-допустимою підгрупою, бо для довільних $a \in T_{j,k}$, $b \in {}^{(j-1)}I$ та $t \in M(m)$ маємо $\Omega(a_j({}^{(j-1)}(x^b)), {}^{(k)}t) = \Omega(a_j({}^{(j-1)}x), {}^{(k)}(t^b))$. Крім цього, для кожного $x \in {}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$ циклові типи підстановок $a_j({}^{(j-1)}x)$ та $b_j({}^{(j-1)}x) \cdot a_j({}^{(j-1)}x) \cdot b_j^{-1}({}^{(j-1)}x)$ однакові. Тому $\Omega(a_j({}^{(j-1)}x), {}^{(k)}t) = e \Leftrightarrow \Omega(b_j({}^{(j-1)}x) \cdot a_j({}^{(j-1)}x) \cdot b_j^{-1}({}^{(j-1)}x), {}^{(k)}t) = e$. Отже, $T_{j,k}$ є нормальною в $[I]_j$. Те, що розклад (8) правильний, випливає з визначення самих груп $T_{j,k}$ та $T_j(K)$ і того, що групи $T_j(K)$ при різних K діють на множинах, що не перетинаються, а кожна функція $a_j \in T_j(K)|_j$ однозначно задається набором (6). $T_j(K)|_j$ природно ототожнюється з прямим кратним групи $S(M_j)$, де кількість доданків дорівнює потужності класу K. Тому згідно з лемою 2 $T_j(K)|_j$ породжується $({}^{(k)}t, j)$–функціями типів $a)$ та $b)$, що і вимагалось. □

Означення. Функцію $a_j \in \mathrm{Fun}({}^{(j-1)}M(m), S(M_j))$ називатимемо скінченно k-парною j-го рівня, якщо вона є k-парною j-го рівня і відмінна від ε лише в скінченній кількості точок.

Позначимо множину усіх скінченно k-парних функцій j-го рівня символом $\Phi_{j,k}$. Тоді $\breve{T}_{j,k} := \{[\ldots, \varepsilon, \varepsilon, a_j, \varepsilon, \varepsilon, \ldots], a_j \in \Phi_{j,k}\}$ є підгрупою групи $T_{j,k}$, а $\breve{T}_j({}^{(k)}t) := \{[\ldots, \varepsilon, \varepsilon, a_j | {}^{(k)}t, \varepsilon, \varepsilon, \ldots], a_j \in \Phi_{j,k}\}$ збігається з $T_j({}^{(k)}t)$. Зауважимо, що лема 3 залишається справедливою, якщо в її формулюванні скрізь замінити $T_{j,k}$ на $\breve{T}_{j,k}$.

Лема 4. *Довільна розщіплювальна нормальна підгрупа групи I глибини $k-1$ ($k \in \mathbb{Z}$) містить $\breve{T}_{k,k-1}$.*

Доведення полягає в безпосередній перевірці.

Множину $\Gamma(a_k) := \{x \in {}^{(k-1)}M(m) : a_k(x) \in S(M_k)\setminus A(M_k)\}$ називатимемо *носієм непарності* функції $a_k \in I|_k$. Очевидно, що для довільних функцій $a_k, b_k \in I|_k$ та таблиці $c \in {}^{(k-1)}I$ ($k \in \mathbb{Z}$) виконуються рівності:

$$
\begin{aligned}
&a)\ \Gamma(a_k \cdot b_k) = \Gamma(a_k) \triangle \Gamma(b_k), \text{ де } A \triangle B \text{ — симетрична різниця множин } A \text{ і } B;\\
&b)\ \Gamma(a_k^{-1}) = \Gamma(a_k);\\
&c)\ \Gamma(a_k \cdot b_k \cdot a_k^{-1}) = \Gamma(b_k);\\
&d)\ \text{для всіх } x \in M(m)\ \Gamma(a_k({}^{(k-1)}(x^c))) = (\Gamma(a_k({}^{(k-1)}x)))^c.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Множину $\Gamma(a_k)$ можна розглядати як елемент булеану $\mathrm{Bul}({}^{(k-1)}M(m))$, на якому природно визначається дія групи ${}^{(k-1)}I$.

Означення. Підмножину $D \subseteq \mathrm{Bul}({}^{(k-1)}M(m))$ назвемо правильною k-системою ($k \in \mathbb{Z}$), якщо:

a) $A, B \in D \Rightarrow A \triangle B \in D$;

b) $A \in D$, $a \in {}^{(k)}I \Rightarrow A^a \in D$.

Носієм непарності підгрупи $U < [I]_k$, $k \in \mathbb{Z}$, називатимемо множину $\Gamma(U) := \{\Gamma(a_k), a_k \in U|_k\}$. Якщо U — ${}^{(k)}I$-допустима підгрупа групи $[I]_{k+1}$, то $\Gamma(U)$ — правильна k-система.

Надалі вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}$ $|M_k| \neq 2, 3, 4$ (випадки $|M_k| = 2$, 3 або 4 потребують інших міркувань, тому їх розгляд проведемо іншим разом).

Лема 5. *Нехай $G = \prod_{j \in J}^{D} S_n$, при цьому $n \neq 2, 4$. Якщо нормальна підгрупа R групи G містить елемент a, в якого всі компоненти з індексами з множини K, $K \subseteq J$, неодиничні, то R містить підгрупу $T = \prod_{k \in K}^{D} A_n$.*

Доведення. Зауважимо, що T — нормальна підгрупа в G, а тому підгрупа $R \cap T$ — також нормальна в G. Розглянемо довільні $d \in T$, $\varepsilon, \tau \in S_n$, $\varepsilon \neq \tau$, і $\mu \in A_n$. Нехай $F := \{f \in K : a_f = \tau, d_f = \mu\}$. Позаяк у симетричній групі S_n елементи π і π^{-1} мають однаковий цикловий тип, то вони спряжені в S_n. Окрім того, єдиний одноелементний клас спряженості в S_n — це $\{\varepsilon\}$. Тому в S_n можна вибрати спряжений з τ елемент $\eta \neq \tau^{-1}$. Елемент $b \in G$, в якому $b_j = \mu$ для $j \in F$ і $b_j = a_j^{-1}$ для $j \notin F$, є в G спряженим з a. Тоді елемент $c = a \cdot b$, в якому $c_j = \varepsilon$ для $j \notin F$ і $c_j = \tau \cdot \mu \neq \varepsilon$ для $j \in F$, належить до $R \cap T$. $R \cap T$ містить також усі елементи, спряжені з c. Елементи, спряжені в S_n з $\tau \cdot \mu$, породжують усю A_n, бо A_n — проста. Зокрема, у добуток елементів, спряжених із $\tau \cdot \mu$, розкладається μ. Але тоді елемент $c^{(\tau,\mu)} \in G$, в якому $c_j^{(\tau,\mu)} = \mu$ для $j \in F$ і $c_j^{(\tau,\mu)} = \varepsilon$ в інших випадках, розкладається в добуток елементів, спряжених із c, і міститься в $R \cap T$. Крім цього, елементи вигляду $c^{(\tau,\mu)}$ попарно переставночні і їх скінченна кількість, бо скінченна кількість різних пар (τ, μ). Тому можна розглянути добуток усіх таких елементів. Але цей добуток збігається з d, тому $d \in R \cap T$ і $T \subseteq R$. □

Теорема 4. *Нехай $|M_k| \neq 2$, 4 для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}$ довільна нормальна підгрупа U групи $[I]_k$ однозначно визначається парою $(\Gamma(U), P(U))$, де $\Gamma(U)$ — носій непарності групи U, $P(U) = U \cap T_{k,k-1}$.*

Доведення. Групу $[I]_k$ можна розглядати як декартовий степінь $[I]_k = \prod^{D}_{t\in{}^{(k-1)}M(m)} S(M_k)$. Тоді

$$T_{k,k-1} = \prod^{D}_{t\in{}^{(k-1)}M(m)} A(M_k).$$

Нехай тепер нормальні підгрупи U_1 та U_2 групи $[I]_k$ такі, що $\Gamma(U_1) = \Gamma(U_2)$ і $P(U_1) = P(U_2)$. Розглянемо довільний елемент $a \in U_1|_k$. Тоді існує такий $b \in U_2|_k$, що $\Gamma(a) = \Gamma(b)$. Виберемо ще елемент $c \in [I]_k|_k$, для якого $c_t \in S(M_k)\setminus A(M_k)$, якщо $t \in \Gamma(a)$, і $c_t = \varepsilon$ в інших випадках. З леми 5 випливає існування таких елементів $d_1 \in P(U_1)$ і $d_2 \in P(U_2)$, що $a \cdot d_1 = b \cdot d_2 = c$. Позаяк $P(U_1) = P(U_2)$, то $d_2 \cdot d_1^{-1} \in U_1 \cap U_2$ і $a = b \cdot d_2 \cdot d_1^{-1} \in U_2$. Отже, $U_1 \subseteq U_2$. Включення $U_2 \subseteq U_1$ доводиться подібно. Отже, $U_1 = U_2$ і наше припущення не вірне. $\square$

Зауваження. Фактор-група

$$[I]_k/T_{k,k-1} = \prod^{D}_{t\in{}^{(k-1)}M(m)} S(M_k) \Big/ \prod^{D}_{t\in{}^{(k-1)}M(m)} A(M_k)$$

є елементарною абелевою 2-групою і природно ототожнюється з групою

$$C = (\mathrm{Bul}\,({}^{(k-1)}M(m)), \triangle).$$

З іншого боку, при природному ототожненні $[I]_k$ з $I|_k$ відображення $\varphi\colon I|_k \to C$, $a_k \mapsto \Gamma(a_k)$, є, згідно з (9), епіморфізмом з ядром $T_{k,k-1}$. Цей епіморфізм кожну підгрупу $U < [I]_k$ відображає на її носій непарності $\Gamma(U)$.

Розглянемо тепер насичені координатні підгрупи групи I.

Для всіх $k, j \in \mathbb{Z}$, $k < j$, маємо $T_{j,k} < T_{j,k-1}$. Тому $T_{j,-\infty} := \bigcup_{k<j} T_{j,k}$ є підгрупою групи $[I]_j$, а $\breve{T}_{j,-\infty} = \bigcup_{k<j} \breve{T}_{j,k}$ — підгрупою групи $T_{j,-\infty}$. Позначимо $\mathbb{Z}' := \mathbb{Z} \setminus \{-\infty\}$.

Означення. Нехай $r \in \mathbb{Z}'$, $j \in \mathbb{Z}$, $r < j$, і U — деяка підгрупа групи ${}^{(j-1)}I$. Підгрупу $F < [I]_j$ називатимемо (U, r)-стійкою, якщо:

a) F є ${}^{(j-1)}I$-допустимою підгрупою групи $[I]_j$;

b) $b_j({}^{(j-1)}x) \cdot a_j({}^{(j-1)}x) \cdot b_j^{-1}({}^{(j-1)}(x^c)) \in F|_j$ для довільних елементів $a_j \in F|_j$, $b_j \in [I]_j|_j$ і таблиці $c \in U$;

c) $\breve{T}_{j,r} \le F$;

d) $\breve{T}_{j,r-1} \not\le F$ (для $r \neq -\infty$).

Теорема 5. *Нехай $|M_k| > 4$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$ і U — розщіплювальна нормальна підгрупа групи ${}^{(j-1)}I$ скінченної глибини, меншої за $j-1$. Підгрупа $F < [I]_j$ U-насичена тоді і лише тоді, коли для деякого r F (U, r)-стійка.*

Доведення. Необхідність. a). Нехай F — U–насичена підгрупа групи $[I]_j$, $k = dh(U)$. Тоді F є ${}^{(j-1)}I$–допустимою і $F|_j$ містить усі функції вигляду $b_j({}^{(j-1)}x) \cdot b_j^{-1}({}^{(j-1)}(x^a))$, де $b_j \in [I]_j|_j$, $a \in U$. За означенням глибини підгрупи існує такий набір $t \in M(m)$, що U діє нетривіально на інваріантній множині $M({}^{(k)}t) = \{x \in M(m) : {}^{(k)}x = {}^{(k)}t\}$, і позаяк $|M_{k+1}| \neq 4$, то $[U]_{k+1}|M({}^{(k)}t)$ збігається або з $S(M_{k+1})$, або з $A(M_{k+1})$. Крім цього, $|M_{k+1}| \neq 2, 3$. Тому існують такі $u \in U(k+1, {}^{(k)}t)$, $u \neq \varepsilon$, (символом $U(s, {}^{(k)}t)$ надалі позначатимемо обмеження $U|_s$ на $M({}^{(k)}t)$ для $k+1 \le s \le j$) і $x_0 \in {}^{(k+1)}M({}^{(k)}t)$, що $x_0^u = x_0$. Припустимо, що для довільної функції $v \in U(k+2, {}^{(k)}t)$ не існує такого набору $x \in {}^{(k+2)}M({}^{(k)}t)$, що $x^v = x$. За теоремою 2 підгрупи $[U]_s$ (для всіх s таких, що $k+1 \le s \le j$) є ${}^{(s-1)}U$-насиченими. Нехай $w \in I|_{k+2}$ та $x_1 \in {}^{(k+2)}M({}^{(k)}t)$ такі, що $w(x_1) \neq \varepsilon$, а $w(x) = \varepsilon$ для всіх інших x. Тоді для всіх $v \in U(k+2, {}^{(k)}t)$ $w(x) \cdot w^{-1}(x^v) \in U(k+2, {}^{(k)}t)$. Але $w(x) \cdot w^{-1}(x^v)$ набуває нетривіальних значень лише на двох наборах x_1 та x_1^v. Тому наше припущення невірне. Проведемо аналогічні міркування стосовно $U(k+3, {}^{(k)}t)$, $\ldots$, $U(j-1, {}^{(k)}t)$. У результаті одержимо, що існують такі $x_2, x_3 \in {}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$, $x_2 \neq x_3$, та $a \in U(j-1, {}^{(k)}t)$, що ${}^{(j-2)}x_2 = {}^{(j-2)}x_3$ і $x_2^u = x_3$. Позначимо символом K_1 — множину усіх $({}^{(k)}t, j)$-функцій $a_j|^{(k)}t$ типу a) з леми 3, а символом K_2 — множину усіх $({}^{(k)}t, j)$-функцій $a_j|^{(k)}t$ типу b). Зафіксуємо тепер елемент $\pi \in S(M_j) \setminus A(M_j)$ і розглянемо $({}^{(k)}t, j)$-функцію $c \in I({}^{(k)}t)$, яка дорівнює π на наборі x_3 і ε на всіх інших наборах із ${}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$. Тоді $({}^{(k)}t, j)$-функція $d(x) := c(x) \cdot c^{-1}(x^a)$ належить до $F|_j$ і набуває нетривіальних значень лише на наборах x_2 та x_3 ($d(x_2) = \pi^{-1}$, $d(x_3) = \pi$). Зокрема, вона є функцією типу b) із леми 3 і внаслідок ${}^{(j-1)}I$-допустимості F матимемо, що $K_2|^{(j-1)}M({}^{(j-2)}t) \lhd (F|_j)|^{(j-1)}M({}^{(j-2)}t)$, а, отже, і $K_2 \lhd F|_j$. Далі, виберемо таку підстановку $a \in S(M_j)$, що $a \cdot \pi \cdot a^{-1} \neq \pi$, і нехай b деяка $({}^{(k)}t, j)$-функція, яка на наборі x_2 набуває значення a і ε на всіх інших наборах із ${}^{(j-1)}M({}^{(k)}t)$. Підгрупа F — насичена, тому F — нормальна в $[I]_j$. Звідси, комутатор $[b_j, d_j] \in F|_j$ і набуває значення $[a, \pi] \in A(M_j) \setminus \{\varepsilon\}$ на наборі ${}^{(j-1)}x_2$, а для інших наборів дорівнює ε, тобто $[b_j, d_j]$ є $({}^{(k)}t, j)$-функцією типу a) із леми 3. Але $A(M_j) =< [a, \pi] : a \in S(M_j), \pi \in S(M_j) \setminus A(M_j) >$. Тому $K_1 \lhd F|_j$, і згідно з лемою 3 $T_j({}^{(k)}t) < F|M({}^{(k)}t)$. Як і раніше, F — ${}^{(j-1)}I$-допустима підгрупа F, отже, $\breve{T}_{j,k} \le F$.

b). Доведемо тепер, що F є (U, r)-стійкою для деякого r. Позначимо символом $H_{j,s}$ сукупність усіх s–парних функцій j-го рівня ($s \in \mathbb{Z}', s \le j$) із $F|_j$ (тоді для всіх $s \le k$ $H_{j,s+1} < H_{j,s}$), а символом A — множину $\{s \in \mathbb{Z}' : s \le k, H_{j,s+1} \setminus H_{j,s} \neq \{\varepsilon\}\}$ і розглянемо наступні два випадки.

1. $|A| < \infty$. Подібно до доведеного одержимо, що $\breve{T}_{j,r} \lhd H_{j,r+1} \setminus H_{j,r}$, де $r = \min\{s, s \in A\}$, тобто $\breve{T}_{j,r} < F$. Але F не містить жодної з підгруп $T_{j,s}$ при $s < r$, позаяк інакше $s \in A$ і $r > s$. Позначимо символом U_F розщіплювальну підгрупу групи ${}^{(j)}I$ глибини k, що задана сукупністю своїх координатних підгруп $([U_F]_s, s \in \mathbb{Z})$, де $[U_F]_s = [{}^{(j-1)}U]_s$, якщо $k+1 \le s \le j-1$, $[U_F]_s = F$ при $s = j$ і $[U_F]_s = \{\varepsilon\}$ для всіх інших s. За теоремою 2 підгрупа U_F — нормальна в ${}^{(j)}I$. Отже, для довільних таблиць $a \in U_F$ і $b \in {}^{(j)}I$ справедливе наступне включення

$$b_j({}^{(j-1)}x) \cdot a_j({}^{(j-1)}(x^b)) \cdot b_j^{-1}({}^{(j-1)}(x^{b \cdot a \cdot b^{-1}})) \in U_F|_j,$$

бо $a_j({}^{(j-1)}(x^b)) \in F|_j$ внаслідок ${}^{(j-1)}I$–допустимості F, а ${}^{(j-1)}(b \cdot a \cdot b^{-1}) \in U$, бо підгрупа U — нормальна в ${}^{(j-1)}I$. Тобто, F г (U, r)–стійкою підгрупою групи $[I]_j$.

2. Множина A — нескінченна. Оскільки для довільного $s \in A$ множина $H_{j,s}$ містить $\breve{T}_{j,s}$ і всі $s \in A$ в сукупності необмежені знизу, то $\bigcup_{s \in A} \breve{T}_{j,s} \subseteq \bigcup_{s \in A} H_{j,s}$. Тому $F > \breve{T}_{j,-\infty}$. Подібно, як і в попередньому випадку, перевіряється, що F є $(U, -\infty)$-стійкою підгрупою.

Достатність умови випливає безпосередньо з означення стійкої підгрупи. $\square$

Наслідок 1. *Нехай U — розщіплювальна нормальна підгрупа групи ${}^{(j-1)}I$ глибини k $(k, j \in \mathbb{Z}, k < j-1)$, F — (U, r)–стійка підгрупа групи $[I]_j$ для деякого $r \in \mathbb{Z}, r \leq k$. Тоді для кожного $t \in M(m)$ підгрупа $F|M({}^{(r)}t)$ збігається або з $T_j({}^{(r)}t)$, або з $[I]_j|M({}^{(r)}t)$.*

Доведення. Для (U, r)-стійкої підгрупи F маємо: $\check{T}_{j,r-1} \nleqslant F$ і для всіх $t \in M(m)$ $T_j({}^{(r)}t) \subseteq F|M({}^{(r)}t)$. Припустимо, що останнє включення строге, тобто $F|M({}^{(r)}t) \neq T_j({}^{(r)}t)$. Виберемо довільний елемент $a_j \in F|M({}^{(r)}t) \setminus T_j({}^{(r)}t)$ і довільний набір $y \in M({}^{(r)}t)$. Нехай

$$P(a_j, y) = \{x \in {}^{(j-1)}M({}^{(j-2)}y) : a_j(x) \in S(M_j) \setminus A(M_j)\}.$$

Доведемо, що a_j можна вибрати так, щоб $P(a_j, y) \neq {}^{(j-1)}M({}^{(j-2)}y)$. Справді, нехай $P(a_j, y) = {}^{(j-1)}M({}^{(j-2)}y)$. Позаяк глибина нормальної підгрупи U дорівнює k, то існує така $({}^{(k)}t, j)$-таблиця $u \in U|M({}^{(r)}t)$ (за означенням вона діє на множині ${}^{(j-1)}M({}^{(r)}t)$), яка має деяку неодноелементну орбіту Ω, відмінну від ${}^{(j-1)}M({}^{(j-2)}z), z \in M({}^{(r)}t)$. Нехай ${}^{(j-1)}x_1$ — деякий набір із Ω, а b_j — $({}^{(k)}t, j)$-функція, яка набуває значення $a_j({}^{(j-1)}x_1)$ на наборі ${}^{(j-1)}x_1$ і ε на всіх інших наборах із ${}^{(j-1)}M({}^{(r)}t)$. Тоді внаслідок стійкості підгрупи F справедливе включення:

$$d_j({}^{(j-1)}x)|^{(r)}t := b_j({}^{(j-1)}x) \cdot b_j^{-1}({}^{(j-1)}(x^u))|^{(r)}t \in F_j({}^{(r)}t),$$

де $F_j({}^{(r)}t)$ є обмеженням j-проекції $F|_j$ на клас еквівалентності ${}^{(j-1)}M({}^{(r)}t)$. Звідси, $P(a_j \cdot d_j, y) = {}^{(j-1)}M({}^{(j-2)}y) \setminus \{{}^{(j-1)}x_1, {}^{(j-1)}x_2\}$, де ${}^{(j-1)}x_2 = {}^{(j-1)}(x_1^{u^{-1}})$. Отже, a_j початково можна вибрати так, щоб $P(a_j, y) \neq {}^{(j-1)}M({}^{(j-2)}y)$.

Нехай тепер ${}^{(j-1)}x_1$, ${}^{(j-1)}x_2 \in {}^{(j-1)}M({}^{(j-2)}y)$ такі, що $a_j({}^{(j-1)}x_1) \in S(M_j) \setminus A(M_j)$, $a_j({}^{(j-1)}x_2) \in A(M_j)$. із п.*a*) доведення теореми 5 випливає існування таких таблиці $a \in U(j-1, {}^{(k)}t)$ та наборів $x_2, x_3 \in {}^{(j-1)}M({}^{(k)}t), x_2 \neq x_3$, що ${}^{(j-2)}x_2 = {}^{(j-2)}x_3$ і $x_2^a = x_3$. А тому внаслідок нормальності підгрупи U існує така таблиця $u \in {}^{(j-1)}U|M({}^{(r)}t)$, що ${}^{(j-1)}(x_1^u) = {}^{(j-1)}x_2$. Тоді $({}^{(k)}t, j)$-функція $g_j({}^{(j-1)}x) := f_j({}^{(j-1)}x) \cdot f_j^{-1}({}^{(j-1)}(x^u))$ належить $F_j({}^{(r)}t)$, де $f_j({}^{(j-1)}x)$ дорівнює $a_j({}^{(j-1)}x_i)$, якщо ${}^{(j-1)}x = {}^{(j-1)}x_i$, $i = 1, 2$, та ε для інших ${}^{(j-1)}x$ із ${}^{(j-1)}M({}^{(r)}t)$, а $P(g_j, y) = \{{}^{(j-1)}x_1, {}^{(j-1)}x_2\}$. Звідси, $P(a_j \cdot g_j, y) = P(a_j, y) \setminus \{{}^{(j-1)}x_1\}$ і $a_j \cdot g_j \notin T_j({}^{(r)}t)$. Але множина $\{{}^{(j-1)}x \in {}^{(j-1)}M({}^{(r)}t) : a_j({}^{(j-1)}x) \in S(M_j) \setminus A(M_j)\}$ має непарну кількість елементів, тому, міркуючи подібно далі, одержимо, що $F_j({}^{(r)}t)$ містить $({}^{(k)}t, j)$-функцію, яка набуває значення із $S(M_j) \setminus A(M_j)$ лише в одній точці. Тому внаслідок ${}^{(j-1)}I$-допустимості підгрупи F $F_j({}^{(r)}t)$ збігається з обмеженням j-проекції групи $[I]_j$ на клас еквівалентності ${}^{(j-1)}M({}^{(r)}t)$, а, отже, $F|M({}^{(r)}t) = [I]_j|M({}^{(r)}t)$. □

Наслідок 2. *Якщо U — розщіплювальна нормальна підгрупа групи ${}^{(j-1)}I$ глибини $-\infty$, то власними U-насиченими підгрупами групи $[I]_j$ є тільки її $(U, -\infty)$-стійкі підгрупи.*

Доведення. Оскільки $dh(U) = -\infty$ і всі таблиці із U — локально обмежені, то для довільного $r \in \mathbb{Z}$, $r < j$, існують такі $k \leq r$ і $t \in M(m)$, що група $U|M({}^{(k)}t)$ — нетривіальна. Позаяк U — розщіплювальна нормальна підгрупа, то $U = \bigcup_{k \leq j-1} U^{(k)}$, де всі підгрупи $U^{(k)} = \{a \in U : dh(a) \leqslant r-1\}$ — нормальні в U. Тому кожна нетривіальна підгрупа $U^{(r)}$, якщо $r < j$, задовольняє умови теореми 5. Але тоді будь-яка U-насичена підгрупа F групи $[I]_j$ є (U, r)–стійкою для кожного $r \in A$, де A — те ж саме, що і в п.*b*) доведення теореми 5. Але всі r із A в сукупності необмежені знизу, тому F містить підгрупу $\bigcup_{r \in A} \check{T}_{j,r} = \check{T}_{j,-\infty}$ і є $(U, -\infty)$-стійкою підгрупою в $[I]_j$. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Калужнин Л. А. *Об одном обобщении силовских р-подгрупп симметрических групп* // Acta Math. Hung. – 1951. – V.2, №3–4. –P.198–221.
2. Сущанский В. И. *Нормальное строение групп изометрий полуконечных бэровских метрик* // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры, Киев. – 1993. – С.269–289.
3. Сущанский В. И., Безущак О. Е. *ℓ-сплетения и изометрии обобщенных бэровских метрик* // Укр. мат. ж. – 1991. – Т.43 №8. – С.1013–1038.
4. Bass H., Otero-Espinar M. V., Rockmore D. N., Tresser C. P. L. Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees. – Berlin-Heideberg: Springer Verl., 1996. – 232 pp.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
механіко-математичний факультет
bezusch@mechmat.univ.kiev.ua

Надійшло 30.05.2001