УДК 512.64

В. П. Щедрик

ОДИН КЛАС ДІЛЬНИКІВ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

V. P. Shchedryk. *A class of divisors of matrices over a commutative elementary divisor domain*, Matematychni Studii, **17** (2002) 23–28.

A method for finding a class of divisors of nonsingular matrices over commutative elementary divisor domain is proposed.

В. П. Щедрик. *Один класс делителей матриц над коммутативной областью элементарных делителей* // Математичні Студії. – 2002. – Т.17, №1. – С.23–28.

Указан метод нахождения одного класса делителей неособенных матриц над коммутативной областью элементарных делителей.

Питанням пошуку дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників R, описанню їх структури та властивостей присвячена стаття [1]. У цій статті продовжено дослідження дільників матриць з метою їх описання в явному вигляді. Нехай A — неособлива матриця із $M_n(R)$. Для неї існують такі оборотні матриці P та Q, що $PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) = \Psi$, $\varepsilon_i|\varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $\varepsilon_n \neq 0$. Як випливає з [1], основну роль в описанні дільників матриці A, які мають деяку наперед задану канонічну діагональну форму (к.д.ф.) $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ відіграє множина $\mathbf{W}(\Psi, \Phi)$ - представників лівих суміжних класів фактор-множини множини $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ по групі $\mathbf{G}_\Phi$, які складаються з оборотних матриць відповідно вигляду

$$\left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n-1} & l_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n-1} & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)} l_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} l_{nn-1} & l_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n-1} & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{nn-1} & h_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Так на підставі теореми 2 [1] цієї роботи множина $(\mathbf{W}(\Psi, \Phi)P)^{-1}\Phi$ складається з усіх лівих неасоційованих справа дільників матриці A, які мають к.д.ф. Φ. У цій статті за певних обмежень вказується явний вигляд множини $\mathbf{W}(\Psi, \Phi)$. Позначимо

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A23.

через $K(f)$ множину представників суміжних класів фактор-кільця R/Rf, де $f \in R$. І нехай $\mathbf{V}(\Psi, \Phi)$ — множина нижніх унітрикутних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}k_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}k_{n1} & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_2)}k_{n2} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}k_{nn-1} & 1 \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

де $k_{ij} \in K\left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varphi_j}\right)$, $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, $i > j$. Зауважимо, що у випадку $R = \mathbf{C}[x]$ матриця (2) збігається з ядром визначальної матриці П.С. Казімірського [2]. Із властивості 6[3], яка без жодних обмежень переноситься і на випадок областей елементарних дільників, випливає, що множину $\mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ можна вибрати так, щоб $\mathbf{V}(\Psi,\Phi) \subseteq \mathbf{W}(\Psi,\Phi)$. Відповідь на питання, коли ці дві множини збігаються, дає наступна теорема

Теорема. *Множини $\mathbf{V}(\Psi, \Phi)$ та $\mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ збігаються і, отже, множина $(\mathbf{V}(\Psi, \Phi)P)^{-1}\Phi$ складається з усіх лівих неасоційованих справа дільників матриці A, які мають к.д.ф. Φ, тоді і тільки тоді, коли кожний дільник елемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ має спільний дільник з елементом $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}$, $i = 2, \dots, n$.*

Перед доведенням цієї теореми встановимо декілька допоміжних тверджень.

Говоритимемо, що матриці A та B лівосторонньо еквівалентні і позначатимемо $A \overset{l}{\sim} B$, якщо $B = UA$, $U \in \mathrm{GL}_n(R)$.

Лема 1. *Нехай S довільна $n \times m$ матриця і $\Phi_i = \mathrm{diag}\Big(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i+1}\Big)$, $i = 2, \dots, n$. Якщо $H \in \mathbf{G}_\Phi$, то $\Phi_i S \overset{l}{\sim} \Phi_i H S$, $i = 2, \dots, n$.*

Доведення. Оскільки j-й стовпець матриці H має вигляд

$$h_j = \left\| h_{1j} \dots h_{jj} \frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j} h_{j+1j} \dots \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^T, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

то

$$\Phi_i h_j = \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1} h_{1j} \dots \frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}} h_{j-1j} \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{jj} \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{j+1j} \dots \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij} \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_j} h_{i+1j} \dots \frac{\varphi_n}{\varphi_j} h_{nj} \right\|^T =$$
$$= \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \left\| \frac{\varphi_j}{\varphi_1} h_{1j} \dots \frac{\varphi_j}{\varphi_{j-1}} h_{j-1j} h_{jj} \dots h_{ij} \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} h_{i+1j} \dots \frac{\varphi_n}{\varphi_i} h_{nj} \right\|^T, \quad i = 2, \dots, n, \ i > j.$$

Отже, правильна рівність

$$\Phi_i H = K_i \Phi_i, \quad i = 2, \dots, n, \tag{3}$$

де матриця K_i є часткою від ділення справа матриці $\Phi_i H$ на Φ_i. Тому, $\Phi_i H S = K_i \Phi_i S$. Оскільки матриці Φ_i неособливі і $H \in \mathrm{GL}_n(R)$, то з рівності (3) випливає, що і $K_i \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тобто $\Phi_i S \overset{l}{\sim} \Phi_i H S$, $i = 2, \dots, n$. □

Лема 2. *Нехай L — оборотна матриця вигляду (1). Тоді*

$$\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}, l_{ij}, l_{i+1j}, ..., l_{nj}\right) = 1, \quad i = 2, \dots, n, j = i, i+1, \dots, n.$$

Доведення. Нехай для деяких індексів i та j маємо $\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}, l_{ij}, l_{i+1j}, ..., l_{nj}\right) = \delta_{ij} \neq 1$. Поміняємо місцями j-й та i-й стовпці матриціL. Отримана матриця містить підматрицю

$$L_{ij} = \left\| \begin{matrix} \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_1)} l_{i1} & \dots & \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} l_{ii-1} & l_{ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} l_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{i-1})} l_{ni-1} & l_{nj} \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} \Big| \frac{\varphi_k}{(\varphi_k,\varepsilon_s)}$, $k = i, i+1, \dots, n$, $s = 1, \dots, i-1$, то всі елементи матриці L_{ij} діляться на δ_{ij}. Тоді з леми із [1] випливає $\delta_{ij} | \det L$, що суперечить обротності цієї матриці. □

Лема 3. *Нехай S нижня унітрикутна матриця із множини $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$. Тоді в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $HS \in \mathbf{V}(\Psi, \Phi)$.*

Доведення. Розглянемо нижні унітрикутні матриці H_0 та S елементами яких є відповідно $\frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij}$, h_{ij} — параметри, та $\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)} s_{ij}$, $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, $i > j$. Матриця $H_0 S$ також буде нижньою унітрикутною матрицею з деякими елементами d_{ij}, $i > j$, під головною діагоналлю. Тоді

$$d_{ij} = \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1} h_{i1} ... \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} h_{ii-1} 1 \underbrace{0...0}_{n-i} \right\| \left\| \underbrace{0...0}_{j-1} 1 \frac{\varphi_{j+1}}{(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)} s_{j+1j} ... \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_j)} s_{nj} \right\|^T =$$

$$= \frac{\varphi_i}{\varphi_j} h_{ij} + \frac{\varphi_i}{(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)} h_{ij+1} s_{j+1j} + \dots + \frac{\varphi_i}{(\varphi_{i-1},\varepsilon_j)} h_{ii-1} s_{i-1j} + \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)} s_{ij} =$$

$$= \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_j)} \left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{\varphi_j} h_{ij} + \frac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{(\varphi_{j+1},\varepsilon_j)} h_{ij+1} s_{j+1j} + ... + \frac{(\varphi_i,\varepsilon_j)}{(\varphi_{i-1},\varepsilon_j)} h_{ii-1} s_{i-1j} + s_{ij} \right),$$

$i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, $i > j$. Нехай $j = i-1$ і $s_{ii-1} \equiv k_{ii-1} \left(\mathrm{mod} \frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} \right)$, де $k_{ii-1} \in K \left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} \right)$. Тобто для деякого $r_{ii-1} \in R$ правильна рівність $k_{ii-1} = s_{ii-1} + \frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}{\varphi_{i-1}} r_{ii-1}$. Надамо параметру h_{ii-1} значення r_{ii-1}. Нехай $j = i-2$ і

$$s_{ii-2} + \frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-2})}{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})} r_{ii-1} s_{i-1i-2} \equiv k_{ii-2} \left(\mathrm{mod} \frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}} \right),$$

для деякого $k_{ii-2} \in K \left(\frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}} \right)$. Тоді існує таке $r_{ii-2} \in R$, що

$$k_{ii-2} = s_{ii-2} + \frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-2})}{(\varphi_{i-1},\varepsilon_{i-2})} r_{ii-1} s_{i-1i-2} + \frac{(\varphi_i,\varepsilon_{i-2})}{\varphi_{i-2}} r_{ii-2}.$$

Надамо параметру h_{ii-2} значення r_{ii-2}. Продовжуючи описаний процес, надамо всім параметрам h_{ij}, $i = 2, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$, $i > j$, необхідних значень r_{ij} із R при яких отримана нижня унітрикутна матриця H з елементами $\frac{\varphi_i}{\varphi_j} r_{ij}$ задовольнятиме вимогам нашої леми. □

Перейдемо тепер до доведення теореми.

Доведення. Необхідність. Нехай $\mathbf{V}(\Psi,\Phi) = \mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ і для деякого індексу i, $2 \le i \le n$, існує елемент $\delta_i \notin U(R)$, що є дільником $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, однак $\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}, \delta_i\right) = 1$. Тоді в R існують такі елементи u та v, що $u\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} + v\delta_i = 1$. Розглянемо матрицю

$$L_i = E_{i-2} \oplus \left\| \begin{matrix} v & -u \\ \frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} & \delta_i \end{matrix} \right\| \oplus E_{n-i},$$

де E_j — одинична матриця порядку j, E_0 — порожня матриця. Очевидно, що $L_i \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Позначимо через S_i матрицю, яка складається з останніх $n-i+1$ стовпців матриці L_i. Легко переконатись, що

$$\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}, ..., \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, 1, ..., 1\right) S_i = \Phi_i S_i \overset{l}{\sim} \operatorname{diag}(\delta_i, 1, ..., 1).$$

З іншого боку $\Phi_i M \overset{l}{\sim} \operatorname{diag}(1, ..., 1)$, де M — матриця складена з останніх $n-i+1$ стовпців будь-якої матриці із $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$. Згідно з лемою 1 це означає, що жодна матриця із $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$ не може бути представником суміжного класу $\mathbf{G}_\Phi L$. Тому $\mathbf{V}(\Psi,\Phi) \ne \mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ — суперечність.

Достатність. Нехай $d \in R$ і $\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}, d\right) = 1$, $\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, d\right) = \alpha_i$, $i = 2, \dots, n$. Оскільки $\alpha_i | \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ і $\alpha_i | d$, тому за умовою теореми $\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}, d\right) \ne 1$. Отже, з умови $\left(\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})}, d\right) = 1$ випливає, що і $\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}, d\right) = 1$, $i = 2, \dots, n$.

Виберемо в $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ довільну матрицю L вигляду (1). На підставі леми 2 $\left(\frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}, l_{nn}\right) = 1$, а, отже, і $\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, l_{nn}\right) = 1$. Тоді

$$\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} l_{1n}, ..., \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} l_{n-1n}, l_{nn}\right) = \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}\left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} l_{1n}, ..., \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} l_{n-2n}, l_{n-1n}\right), l_{nn}\right) =$$
$$= \left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} l_{1n}, ..., \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}} l_{n-2n}, l_{n-1n}, l_{nn}\right) = \left(\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_{n-2}}\left(\frac{\varphi_{n-2}}{\varphi_1} l_{1n}, ..., l_{n-2n}\right), (l_{n-1n},\, l_{nn})\right) = ... =$$
$$= \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} l_{1n}, (l_{2n}, ..., l_{nn})\right) = (l_{1n}, ..., l_{nn}) = 1.$$

Отже, в R існують такі $u_1, ..., u_n$, що

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} l_{1n} u_1 + ... + \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} l_{n-1n,} u_{n-1} + l_{nn} u_n = 1.$$

Звідси випливає, що $\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1, ..., \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1}, u_n\right) = 1$. Доповнимо рядок $\left\| \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1 ... \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1} u_n \right\|$ до оборотної матриці вигляду

$$H_1 = \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & ... & u_{2n-1} & u_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & u_{n-1n-1} & u_{n-1n} \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_1 & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} u_2 & ... & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} u_{n-1} & u_n \end{matrix} \right\|,$$

яка, очевидно, належать до групи $\mathbf{G}_\Phi$. Згідно властивості 2 із [1] маємо $\mathbf{G}_\Phi\mathbf{L}(\Psi,\Phi) = \mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. Тобто матриця H_1L належить множині $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$ і має вигляд

$$H_1L = \left\| \begin{matrix} & & & t_{1n} \\ & * & & \vdots \\ & & & t_{n-1n} \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}t_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}t_{nn-1} & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Отриману матрицю домножимо зліва на

$$H_2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -t_{1n} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & -t_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $H_2 \in \mathbf{G}_\Phi$, то

$$H_2H_1L = \left\| \begin{matrix} & & & 0 \\ & L_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}t_{n1} & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}t_{nn-1} & 1 \end{matrix} \right\| = H_{12}L,$$

де $L_{n-1} \in \mathbf{L}(\Psi_{n-1},\Phi_{n-1})$, $\Psi_{n-1} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1})$, $\Phi_{n-1} = \mathrm{diag}(\varphi_1,...,\varphi_{n-1})$. Міркуючи, як і вище, аналогічні до попередніх, знайдемо таку матрицю $H_3' \in \mathbf{G}_{\Phi_{n-1}}$, що $(H_3' \oplus \|1\|)H_{12}L =$

$$= \left\| \begin{matrix} & & & 0 & 0 \\ & L_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ \frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1},\varepsilon_1)}s_{n-11} & \dots & \frac{\varphi_{n-1}}{(\varphi_{n-1},\varepsilon_{n-2})}s_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_1)}s_{n1} & \dots & \dots & \frac{\varphi_n}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})}s_{nn-1} & 1 \end{matrix} \right\| \in \mathbf{L}(\Psi,\Phi),$$

де $L_{n-2} \in \mathbf{L}(\Psi_{n-2},\Phi_{n-2})$, $\Psi_{n-2} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-2})$, $\Phi_{n-2} = \mathrm{diag}(\varphi_1,...,\varphi_{n-2})$. Продовжуючи описаний процес, знайдемо таку матрицю $H_{12\dots n-1}$, що $H_{12\dots n-1}L$ є нижньою унітрикутною матрицею з $\mathbf{L}(\Psi,\Phi)$. На підставі леми 3 в групі $\mathbf{G}_\Phi$ існує така матриця H, що $HH_{12\dots n-1}L \in \mathbf{V}(\Psi,\Phi)$. □

Наслідок. *Нехай A — неособлива матриця з елементами із комутативної області головних ідеалів. Тоді для того, щоб множина $(\mathbf{V}(\Psi,\Phi)P)^{-1}\Phi$ складалась з усіх лівих неасоційованих справа дільників матриці A, які мають к.д.ф. Φ, необхідно й досить, щоб степінь всіх простих дільників, які входять в канонічний розклад елемента $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$ на множники був більший від степенів відповідних дільників елемента $\frac{\varepsilon_{i-1}}{\varphi_{i-1}}$, $i = 2,\dots,n$.*

Доведення безпосередньо випливає з теореми та рівності

$$\frac{\varphi_i}{(\varphi_i,\varepsilon_{i-1})} = \frac{\varphi_i/\varphi_{i-1}}{\left(\varphi_i/\varphi_{i-1},\ \varepsilon_{i-1}/\varphi_{i-1}\right)}, \quad i = 2,\dots,n.$$

Приклад 1. Нехай $R = \{a + b_1x + b_2x + \cdots | a \in Z, b_i \in Q\}$ — кільце формальних степеневих рядів над полем Q, вільний член яких вибирається з кільця Z. Опишемо множину всіх лівих неасоційованих справа дільників матриці $A = \mathrm{diag}(5, 5x^3) = \Psi$, які мають к.д.ф. $\Phi = \mathrm{diag}(1, 5x)$. Легко переконатись, що з умови $(a, x) = 1$ випливає, що a є одиницею кільця R. Тоді, врахувавши, що $\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 5x$, $\frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)} = \frac{5x}{(5x,5)} = x$ бачимо, що кожен нетривіальний дільник елемента $5x$ має спільний дільник з елементом x. Отже, множина всіх лівих неасоційованих справа дільників матриці A з к.д.ф. Φ має вигляд

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ xk & 1 \end{matrix} \right\|^{-1} \Phi,$$

де $k \in K\left(\frac{(\varphi_2,\varepsilon_1)}{\varphi_1}\right) = K(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

На завершення проілюструємо відмінність між множинами $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$ та $\mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ у випадку, коли умови нашої теореми не виконуються.

Приклад 2. Нехай $R = \mathbf{P}[x]$, де $\mathbf{P}$ — довільне поле, $A = \mathrm{diag}(x^2, x^2) = \Psi$. Знайдемо всі ліві неасоційовані справа дільники матриціA, які мають к.д.ф. $\Phi = \mathrm{diag}(1, x^2)$. Оскільки $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varphi_2}{(\varphi_2,\varepsilon_1)}\right) = (x^2, 1) = 1$, то умови теореми не виконуються. Тому згідно результатів роботи [4] множина $\mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ має вигляд

$$\mathbf{W}(\Psi,\Phi) = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ ax+b & 1 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & c^{-1} \\ c & x \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| \right\},$$

де $a, b \in \mathbf{P}$, $c \in \mathbf{P}^{\bullet}$. Тобто множина $\mathbf{W}(\Psi,\Phi)$ містить, крім множини $\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$, ще два класи матриць. Отже, шукана множина дільників матриці A має вигляд

$$\left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ ax+b & x^2 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} -x & c^{-1}x^2 \\ c & 0 \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} 0 & x^2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| \right\}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Щедрик В. П. *Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників* // Матем. студії. – 1998. – Т.10, №2. – С.115–120.
2. Казимирский П. С. *Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т.32, №4. – С.483–498.
3. Щедрик В. П. *Про один клас дільників матриць* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т.40, №3. – С.13–19.
4. Shchedryk V. P. *Complete description of all divisors having one invariant factor for the matrices over principal ideal ring,* Preprint №8-94, Lviv, 1994, Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, 33 p.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло 15.03.2000