УДК 513.813

Т. І. Григор'єва

# ІНВАРІАНТНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ОБ'ЄКТИ МАЙЖЕ ГЕОДЕЗІЙНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ $\pi_2(E=0)$

T. I. Grigoryeva. *Invariant geometric objects of almost geodesic mapping* $\pi_2(e=0)$, Matematychni Studii, **16** (2001) 213–216.

We prove a counterpart of Beltrami's theorem of the theory of geodesic mappings for almost geodesic mapping $\pi_2(e=0)$. The $\pi_2$-flat spaces, for which the metrics in the special coordinate system are obtained, have been introduced.

Т. И. Григорьева. *Инвариантные геометрические объекты почти геодезического отображения* $\pi_2(e=0)$ // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.213–216.

Для почти геодезического отображения $\pi_2(e=0)$ доказан аналог теоремы Бельтрами теории геодезических отображений. Введены в рассмотрение $\pi_2$-плоские пространства, для которых получены метрики в специальной системе координат.

Досліджується майже геодезійне відображення (МГВ) другого типу $\pi_2$ ріманових просторів [1], що включає в себе як окремий випадок загально відомі геодезійні відображення ріманових просторів [2], [3], $H_p$-відображення многовидів майже добутку і майже комплексних многовидів [4], голоморфно-проективні відображення келерових просторів [5], [6]. МГВ $\pi_2$ з невиродженою афінорною структурою $(\pi_2(e=\pm 1))$ досліджувались багатьма авторами [7]. У даній праці розглядається МГВ $\pi_2$ з виродженою афінорною структурою $(\pi_2(e=0))$, для якого знайдені і досліджені інваріантні геометричні об'єкти.

**1.** Нехай ріманів простір $(V_{2n}, g_{ij})$ допускає МГВ $\pi_2(e=0)$ на ріманів простір $(\overline{V}_{2n}, \overline{g}_{ij})$, що відповідає афінору $F_i^h$. Тоді в загальній за відображенням системі координат $(x^i)$ основні рівняння розглянутого відображення матимуть вигляд [1]

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x), \tag{1}$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \quad F_{(i,j)}^h = \mu_{(i}F_{j)}^h + \nu_{(i}\delta_{j)}^h, \tag{2}$$

де $\Gamma_{ij}^h(x)$, $\overline{\Gamma}_{ij}^h(x)$ — компоненти об'єктів зв'язності просторів $V_{2n}$ і $\overline{V}_{2n}$, відповідно, $\psi_i$, $\varphi_i$, $\mu_i$, $\nu_i$ — ковектори, круглими дужками $(ij)$ позначена операція симетрування без розподілу, "," — знак коваріантної похідної в просторі $V_{2n}$.

Операцію згортання з афінором позначатимемо: $A_{\bar\beta} = A_\alpha F_\beta^\alpha$, $A^{\bar\beta} = A^\alpha F_\alpha^\beta$; домовимося також запис $A_{\bar{i}j\ldots,k}^h$ розуміти як $(A_{\alpha j\ldots,k}^h)F_i^\alpha$, тобто сполучення робити після диференціювання.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 53B35, 53B21.

У теорії афінорних структур на ріманових просторах прийнято погоджувати афінорну структуру з метрикою. Ми здійснюватимемо це так: $g_{\bar{i}j} = g_{i\bar{j}}$.

Введемо афінор $\widetilde{F}^{\alpha}_{\beta}$ так, щоб $\widetilde{F}^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\alpha} = n$.

**Теорема 1.** *Геометричний об'єкт* $\Pi^h_{ij}$*, інваріантний відносно МГВ* $\pi_2(e = 0)$ *ріманових просторів* $V_{2n}$ *і* $\overline{V}_{2n}$*, де*

$$\Pi^h_{ij} = F^h_{i,j} - \frac{1}{n}(\frac{1}{2}\delta^h_j F^{\alpha}_{i,\alpha} + F^h_j F^{\alpha}_{i,\beta}\widetilde{F}^{\beta}_{\alpha}). \tag{3}$$

*Доведення.* Залежність між коваріантними похідними афінора у просторах $V_{2n}$ і $\overline{V}_{2n}$ має вигляд

$$F^h_{i/j} = F^h_{i,j} + \delta^h_j \psi_{\bar{i}} + F^h_j(\varphi_{\bar{i}} - \psi_i), \tag{4}$$

де "/" — знак коваріантної похідної у просторі $\overline{V}_{2n}$.

Згортаючи (4) по черзі з $\delta^j_h$ і з $\widetilde{F}^j_h$ за індексами $h$ і $j$, одержимо

$$\psi_{\bar{i}} = \frac{1}{2n}(F^{\alpha}_{i/\alpha} - F^{\alpha}_{i,\alpha}), \quad \varphi_{\bar{i}} - \psi_i = \frac{1}{n}(F^{\alpha}_{i/\beta} - F^{\alpha}_{i,\beta})\widetilde{F}^{\beta}_{\alpha}. \tag{5}$$

З огляду на (5), співвідношення (4) запишемо у вигляді $\Pi^h_{ij} = \overline{\Pi}^h_{ij}$, де тензор $\Pi^h_{ij}$ знаходиться за формулами (3), аналогічно означений $\overline{\Pi}^h_{ij}$ у $\overline{V}_{2n}$. □

**2.** Автором розширене поняття параболічно келерових просторів.

Ріманів простір $V_{2n}$ називатимемо параболічно келеровим, якщо в ньому поряд з метричним тензором $g_{ij}(x)$ існує афінорна структура $F^h_i(x)$, що задовольняє умови

$$F^h_{\alpha} F^{\alpha}_i = 0,\ F^h_{i,j} = 0,\ F^{\alpha}_i g_{\alpha j} = \varepsilon F^{\alpha}_j g_{\alpha i}\ ;(\varepsilon = \pm 1).$$

Випадок $\varepsilon = -1$ докладно вивчений у [8]. У даній праці розглядатимемо параболічно келерові простори (ПКП) за умови $\varepsilon = 1$.

**Теорема 2.** *Ріманів простір* $V_{2n}$*, що допускає МГВ* $\pi_2(e = 0)$*, яке відповідає афінору* $F^h_i$*, є параболічно келеровим тоді і тільки тоді, коли в ньому* $\Pi^h_{ij} = 0$.

*Доведення.* Розглянемо клас просторів, що допускають $\pi_2(e = 0)$, для яких $\Pi^h_{ij} = 0$. Неважко показати, що тензор Нейєнхейса афінора $F^h_i$ [1] $N^h_{ij} = 0$, тобто при $\Pi^h_{ij} = 0$ афінорна структура $F^h_i$ інтегровна. Тому далі вважатимемо, що обрано таку систему координат, у якій компоненти афінора мають вигляд: $F^{a+n}_b = \delta^a_b$, $F^a_b = F^a_{b+n} = F^{a+n}_{b+n} = 0$, де $a, b = 1, 2, \dots, n$. Тоді зокрема, $\widetilde{F}^h_i$ задано у вигляді: $\widetilde{F}^a_{b+n} = \delta^a_b$, $\widetilde{F}^a_b = \widetilde{F}^{a+n}_b = \widetilde{F}^{a+n}_{b+n} = 0$. Можна довести, що зі співвідношень (2), після нескладних алгебраїчних перетворень, отримаємо рівності $\mu_i = 0$ і $\nu_i = 0$ , тобто $F^h_{i,j} = 0$. Аналогічними міркуваннями можна довести, що у просторі $\overline{V}_{2n}$, також $F^h_{i/j} = 0$. Отже, простори $V_{2n}$ і $\overline{V}_{2n}$ параболічно келерові.

Легко бачити, що з умови $F^h_{i,j} = 0$ випливає, що $\Pi^h_{ij} = 0$. □

**3.** Розглянемо МГВ $\pi_2(e = 0)$: $V_{2n} \to \overline{V}_{2n}$, вважаючи простори $V_{2n}(g_{ij}, F^h_i)$ і $\overline{V}_{2n}(\overline{g}_{ij}, \overline{F}^h_i)$ параболічно келеровими. Можна довести, що при цьому відображенні $\varphi_{\bar{i}} = \psi_i$. З основних рівнянь випливає, що вектор $\psi_i$ необхідно градієнтний, тобто $\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$, вважатимемо градієнтним вектор $\varphi_i$.

**Теорема 3.** *Тензор $S^h_{ijk}$ інваріантний щодо МГВ $\pi_2(e=0)$ ПКП, де*

$$S^h_{ijk} = R^h_{\cdot ijk} - \frac{1}{2(n-1)}(R_{i[j}\delta^h_{k]} + 2R^{\alpha}_{\cdot i[j|\beta}\widetilde{F}^{\beta}_{\alpha|}F^h_{k]}), \tag{6}$$

*квадратними дужками $[jk]$ позначена операція альтернування.*

*Доведення.* Знайдемо залежність між тензорами Рімана ПКП $V_{2n}$ і $\overline{V}_{2n}$

$$\overline{R}^h_{\cdot ijk} = R^h_{\cdot ijk} + \varphi_{\bar{i}[j}\delta^h_{k]} + \varphi_{i[j}F^h_{k]}, \tag{7}$$

де $\varphi_{ij} = \varphi_{i,j} - \varphi_{(i}\psi_{j)}$.

Згорнувши (7) по черзі з $\widetilde{F}^k_h$ і з $\delta^k_h$ за індексами $h$ і $k$, знайдемо, відповідно

$$\varphi_{\bar{i}j} = \frac{1}{2(n-1)}(\overline{R}_{ij} - R_{ij}), \quad \varphi_{ij} = \frac{1}{n-1}(\overline{R}^{\alpha}_{ij\beta} - R^{\alpha}_{ij\beta})\widetilde{F}^{\beta}_{\alpha}. \tag{8}$$

Отже (7) можна зобразити у вигляді $S^h_{ijk} = \overline{S}^h_{ijk}$. Компоненти $S^h_{ijk}$ виражаються за формулами (6) у $V_{2n}$. Аналогічно у $\overline{V}_{2n}$ визначений тензор $\overline{S}^h_{ijk}$. □

Знайдений інваріантний об'єкт $S^h_{ijk}$ є аналогом тензора Вейля [3] у теорії геодезійних відображень.

**4.** Назвемо $\pi_2$-плоским ПКП, якщо він допускає МГВ $\pi_2(e=0)$ на плоский простір $\overline{V}_{2n}$. Очевидно, у $\pi_2$-плоскому просторі $S^h_{ijk}$=0. Справедлива наступна теорема.

**Теорема 4.** *ПКП є $\pi_2$-плоским тоді і тільки тоді, коли його тензор Рімана має вигляд*

$$R^h_{\cdot ijk} = \frac{1}{2n(n-1)}(\widetilde{R}F_{i[j}\delta^h_{k]} + (\widetilde{R}g_{i[j} + 2\widetilde{\widetilde{R}}F_{i[j)})F^h_{j]}), \tag{9}$$

де $\widetilde{R} = R^{\alpha}_{\beta}\widetilde{F}^{\beta}_{\alpha}$, $\widetilde{\widetilde{R}} = R_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\gamma l}\widetilde{F}^{\alpha}_{l}\widetilde{F}^{\beta}_{\gamma}$.

*Доведення.* Необхідність очевидна: якщо ПКП $V_{2n}$ допускає МГВ $\pi_2(e=0)$ на плоский ПКП $\overline{V}_{2n}$, тензор Рімана якого $\overline{R}^h_{\cdot ijk} = 0$, то $S^h_{ijk} = \overline{S}^h_{ijk} = 0$. Тоді

$$R^h_{\cdot ijk} = \frac{1}{2(n-1)}(R_{i[j}\delta^h_{k]} + 2R^{\alpha}_{\cdot i[j|\beta}\widetilde{F}^{\beta}_{\alpha|}F^h_{k]}). \tag{10}$$

Згорнемо (10) по черзі з $g^{ij}$ і з $\widetilde{F}^{ji} = \widetilde{F}^j_{\alpha}g^{\alpha i}$ за індексами $i$ і $j$. Після опускання індексу $h$ у просторі $V_{2n}$ в обох виразах отримаємо $R_{hk} = \frac{1}{n}\widetilde{R}F_{hk}$, $2nR^{\alpha}_{\cdot hk\beta}\widetilde{F}^{\beta}_{\alpha} = \widetilde{R}g_{hk} - 2\widetilde{\widetilde{R}}F_{hk}$. На підставі цього (10) прийме вигляд (9). Необхідність доведено.

Доведемо достатність. Нехай у $V_{2n}$ $S^h_{ijk} = 0$, тобто виконується (9). Покажемо, що в цьому випадку $V_{2n}$ допускає МГВ $\pi_2(e=0)$ на плоский простір $\overline{V}_{2n}$. Якщо таке відображення існує, то відповідний вектор задовольняє умови (7), а оскільки $\overline{R}^h_{\cdot ijk} = 0$, то

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{ij} + \varphi_i\varphi_{\bar{j}} + \varphi_{\bar{i}}\varphi_j, \tag{11}$$

де $\varphi_{ij} = \frac{1}{2n(n-1)}(\widetilde{R}g_{ij} + 2\widetilde{\widetilde{R}}F_{ij})$. Такий вектор існує тоді і тільки тоді, коли має розв'язок система диференціальних рівнянь першого порядку типу Коші (11). Розглянувши умови інтегровності системи рівнянь (11) неважко показати, що система (11) завжди має розв'язок. Достатність доведено. □

Зауважимо, що $\pi_2$-плоский простір є симетричним, тобто в ньому $R^h_{ijk,l} = 0$, це легко випливає з (9). Тому, скориставшись відомою формулою П. А. Широкова [10], можна відновити метричний тензор $g_{ij}$ $\pi_2$-плоского простору в околі деякої точки $M(x_\circ) \in V_{2n}$

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{4t^3 n(n-1)^2} \widetilde{m}\widetilde{R}(e^{\sqrt{t}} + e^{-\sqrt{t}} - 2)T_{\bar{i}\bar{j}} -$$
$$-\Big[\frac{1}{4t^3 n(n-1)}(\widetilde{R}T_{ij} + 2\widetilde{\widetilde{R}}T_{\bar{i}\bar{j}}) + \frac{3}{4t^4 n(n-1)^2}\widetilde{m}\widetilde{R}T_{\bar{i}\bar{j}}\Big](e^{\sqrt{t}} - e^{-\sqrt{t}} - 2\sqrt{t}),$$

де $\overset{\circ}{g}_{ij}$ — значення метричного тензора в точці $x_\circ$, $y^h$ — ріманові координати в точці $x_\circ$, $\overset{\circ}{F}_{ij} = F^\alpha_i \overset{\circ}{g}_{\alpha j}$, $y_i = \overset{\circ}{g}_{\alpha i}\, y^\alpha$, $y_{\bar{j}} = \overset{\circ}{F}_{\alpha j}\, y^\alpha$, $y = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\, y^\alpha y^\beta$, $\overline{y} = \overset{\circ}{F}_{\alpha\beta}\, y^\alpha y^\beta$, $t = \frac{1}{n(n-1)}\widetilde{R}\overline{y}$, $\widetilde{m} = (y_\alpha y_{\overline{\beta}} + y_{\overline{\alpha}} y_\beta)\widetilde{F}^{\alpha\beta} - ny$, $T_{ij} = (y_i y_{\bar{j}} + y_{\bar{i}} y_j - \overline{y}\, \overset{\circ}{g}_{ij} - y\, \overset{\circ}{F}_{ij})$.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979. – 256 с.
2. *Levi-Čivita T. Sulle transformazioni delle equazioni dinamiche* // Ann. Di Mat. – 1896. – V.2, №24. – P.255–300.
3. Weyl H. *Zur infinitesimal geometrie Einordnung der projektiven und der Konformen Auffassung* // Göttinger Nachrichten, 1921.– S.99–119.
4. Tashiro Y. *On holomorphically projective correspondences in an almost complex space* // Math. J. Okayama Univ. – 1957. – V.6, №2. – P.147–152.
5. Yano K. *Affine connections in an almost product space* // Kodai Math. Sem. Rep. – 1959. – V.11, №1. – P.1–24.
6. Otsuki T.,Tashiro Y. *On curves in Kahlerian spaces* // Math. J. Okayama Univ. – 1954. – V.4, №1.– P.57–78.
7. Микеш Й. *Голоморфно-проективные отображения и их обобщения* // Итоги Науки и Техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематич. обзоры. Геометрия.– 1995.–Т.21, №3.– 19 с.
8. Шиха М. Геодезические и голоморфно-проективные отображения параболически келеровых пространств: Дис. ... канд. физ.-мат. наук – М., 1993. – 110 с.
9. Beltrami E. *Teoria fondamental degli spazii di curvatura costante* // Ann. di mat. – 1902.– V.2, №2. – P.232–255.
10. Широков П. А. Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – 432 с.


Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського,
кафедра алгебри і геометрії,
м.Одеса, 65091, вул. Старопортофранківська, 26

pdpu@paco.net

*Надійшло 22.10.1999*
*Після переробки 17.12.2001*