УДК 519.21

І. І. Єжов, В. Ф. Каданков

СИСТЕМА ОБСЛУГОВУВАННЯ $G^{\varkappa}|G|1$.

I. I. Ezhov, V. F. Kadankov. *The queueing system* $G^{\varkappa}|G|1$, Matematychni Studii, **16** (2001) 199–212.

For the queueing system $G^{\varkappa}|G|1$ with a group inflow of requests, the following characteristics are considered: the duration of busy period; the length of queue in the transition and stationary regimes of functioning of queueing system; summary queueing time; virtual time of the queueing beginning, entering flow of requests and outgoing flow of queueing requests, etc.

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков. *Система обслуживания* $G^{\varkappa}|G|1$ // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.199–212.

Исследуется система обслуживания $G^{\varkappa}|G|1$ с групповым поступлением заявок, описываемая тремя независимыми случайными величинами: $\varkappa$ — объём группы заявок, ξ — длина промежутков времени между соседними поступлениями групп заявок и η — время обслуживания заявки. Найдены производящие функции и преобразования Лапласа для распределений следующих характеристик: продолжительности периода занятости, длины очереди в переходящем и стационарном режимах функционирования системы обслуживания, суммарного времени пребывания системы обслуживания в незанятом состоянии, виртуального времени ожидания начала обслуживания, входящего потока заявок и выходящего потока исполненных заявок и других.

1. Означення основних випадкових процесів.

Нехай $\varkappa \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$ — додатня цілочисельна випадкова величина, а $\xi, \eta \in (0, \infty)$ — додатні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілів

$$F(x) = P[\eta < x] = \int\limits_0^x f(u)du, \qquad G(y) = P[\xi < y] = \int\limits_0^y g(u)du.$$

Вважатимемо, що $\eta, \xi, \varkappa$ — незалежні випадкові величини, зі скінченними середніми значеннями. Нехай $\{\eta_i', \xi_i', \varkappa_i'\}$, $i \in \mathbb{N}^+$, — взаємно незалежні випадкові величини такі, що $\eta_i' \doteq \eta$, $\xi_i' \doteq \xi$, $\varkappa_i' \doteq \varkappa$, де символ $\doteq$ означає, що випадкові величини мають однаковий розподіл.

Нехай $\{\eta_n, \xi_n, \varkappa_n; n \geq 0\} \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, — випадкова послідовність, яка визначається наступними рівностями

$$\eta_0 = \xi_0 = \varkappa_0 = 0, \qquad \eta_n = \sum_{i=1}^n \eta_i', \qquad \xi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i', \qquad \varkappa_n = \sum_{i=1}^n \varkappa_i'. \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60K20, 60K25.

Для $t \geq 0$ означимо випадкові процеси

$$\alpha(t) = \max\{k \geq 0 : \xi_k \leq t\}, \quad \beta(t) = \max\{k \geq 0 : \eta_k \leq t\}, \quad s(t) = \varkappa_{\alpha(t)} - \beta(t),$$

$$\xi(t) = \xi_{\alpha(t)+1} - t, \quad \eta(t) = \eta_{\beta(t)+1} - t, \quad S_t = \{s(t), \eta(t), \xi(t)\}.$$

Вони мають наступний ймовірнісний зміст: $\alpha(t)$, $\beta(t) \in \mathbb{N}, t \geq 0$, — процеси відновлення, породжені випадковими послідовностями $\{\xi_n; n \geq 0\}$, $\{\eta_n; n \geq 0\}$;
$s(t) \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, ...\}$, $t \geq 0$, — різниця неординарного і звичайного процесів відновлення;
$\xi(t)$, $\eta(t) \in \mathbb{R}_+$, $t \geq 0$, — спадні лінійні компоненти, які доповнюють процеси відновлення $\alpha(t), \beta(t)$ до процесів Маркова;
$S_t \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^2$, $t \geq 0$, — процес Маркова, що відповідний різниці процесів відновлення $s(t), t \geq 0$, зі спадними лінійними компонентами $\xi(t)$, $\eta(t)$.
Введемо випадкові елементи, породжені $\eta, \xi, \varkappa$ і випадковими послідовностями (1).

1) $\{\sigma_k, T_k; k \geq 0\}$ — момент першого досягнення рівня $k \geq 0$ випадковою послідовністю $\{\varkappa_n; n \geq 0\}$ і величина перескоку через цей рівень відповідно:

$$\sigma_k = \min\{n \geq 0; \varkappa_n \geq k\}, \quad T_k = \varkappa_{\sigma_k} - k, \quad k \in \mathbb{N}; \quad P[\sigma_0 = T_0 = 0] = 1.$$

Спільна генератриса трійки $\{\sigma_k, T_k; k \geq 0\}$ має вигляд

$$\sum_{k \geq 0} \theta^k M[t^{\sigma_k} z^{T_k}] = \frac{z}{z-\theta} - \frac{\theta}{z-\theta} \times \frac{1 - tM[z^{\varkappa}]}{1 - tM[\theta^{\varkappa}]}, \qquad |\theta|, |z| \leq 1, \quad t \in [0, 1).$$

2) $\zeta_s^+(z) \in \mathbb{R}_+$, $s > 0$, — невід'ємна випадкова величина з перетворенням Лапласа $M[e^{-\lambda \zeta_s^+(z)}] = E(\lambda, s, z)/E(0, s, z)$,

$$E(\lambda, s, z) = \exp\Big\{\sum_{n > 0} \frac{1}{n} M[e^{-\lambda(\eta_{\varkappa_n} - \xi_n)}\, z^{\varkappa_n}\, e^{-s\xi_n}; \eta_{\varkappa_n} > \xi_n]\Big\}, \qquad |z| \leq 1, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0.$$

3) $\zeta_s^-(z) \in \mathbb{R}_+$, $s > 0$, — невід'ємна випадкова величина така, що $M[e^{-\mu \zeta_s^-(z)}] = F(\mu, s, z)/F(0, s, z)$,

$$F(\mu, s, z) = \exp\Big\{\sum_{n > 0} \frac{1}{n} M[e^{-\mu(\xi_n - \eta_{\varkappa_n})}\, z^{\varkappa_n}\, e^{-s\eta_{\varkappa_n}}; \xi_n > \eta_{\varkappa_n}]\Big\}, \qquad |z| \leq 1 \quad \mathrm{Re}\,\mu \geq 0.$$

Вважатимемо, що введені випадкові елементи, послідовності, процеси визначені на основному ймовірнісному просторі (Ω, F, P).

Зауваження. За елементами послідовності (1) ми ввели два перетворення Лапласа, які задають розподіли випадкових величин $\zeta_s^+(z)$, $\zeta_s^-(z)$. Вважаємо ці дві випадкові величини (за означенням) незалежними як між собою, так і від вихідної послідовності (1).

Відмітимо, что якщо ζ^+, ζ^- — невід'ємні випадкові величини з перетвореннями Лапласа

$$M[e^{-\lambda \zeta^+}] = \frac{E(\lambda, 0, 1)}{E(0, 0, 1)}, \quad M[e^{-\mu \zeta^-}] = \frac{F(\mu, 0, 1)}{F(0, 0, 1)}, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Re}\,\mu \geq 0,$$

то $\zeta^+ \doteq \sup_{n \geq 0}\{\eta_{\varkappa_n} - \xi_n\}$, $\zeta^- \doteq \sup_{n \geq 0}\{\xi_n - \eta_{\varkappa_n}\}$.

Нехай $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ і $\tau_k(x, y) = \inf\{t > 0 : s(t) < 0 / S_0 \doteq (k, x, y)\}$, — момент першого перевищення процесом $s(t)$, $t \geq 0$, нульового рівня.

Процес $X_t^{\neq} = \{S_t, 0 \leq t < \tau_k(x, y)\}$ описує функціонування на інтервалі $[0, \tau_k(x, y)]$ одноканальної системи обслуговування з властивостями:

— Заявки в систему обслуговування надходять групами випадкового об'єму $\varkappa_i'$, $i \in \mathbb{N}^+$ в моменти $\{\xi_n; n \geq 0\}$ через незалежні проміжки $\xi_i', i \in \mathbb{N}^+$ одинаково розподілені з ξ. Будемо також вважати, що заявки в групі пронумеровані, і розміщуються в черзі згідно цієї нумерації.

— Заявки обслуговуються по одній, тривалість обслуговування заявок — незалежні випадкові величини η_i', $i \in \mathbb{N}^+$, одинаково розподілені з η.

— Дисципліна облуговування заявок пряма (в порядку розташування заявок у черзі), довжина черги необмежена.

Подія $\{X_t^{\neq} = (k, x, y)\}$, $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ означає, що в момент часу t в системі перебуває $k+1$ заявка (k заявок в черзі й одна на обслуговуючому пристрої), обслуговування заявки, що знаходиться на обслуговуючому пристрої, закінчиться в момент часу $t + x$, надходження чергової групи заявок в систему відбудеться в момент часу $t + y$.

Так введену систему обслуговування будемо позначати символом $G^{\varkappa}|G|1$. Індекс $\varkappa$ вказує на той факт, що заявки в систему надходять групами випадкового об'єму $\varkappa \in \mathbb{N}^+$. При $\varkappa \equiv 1$ отримаємо класичну систему обслуговування $G|G|1$.

Випадковий інтервал $[0, \tau_k(x, y)]$ назвемо періодом зайнятості системи обслуговування типу (k, x, y). Зокрема $[0, \tau_{\varkappa-1}(\eta, \xi)]$ — канонічний період зайнятості (в початковий момент часу $t = 0$ у вільну систему надходить група заявок випадкового об'єму $\varkappa$ і $\tau_{\varkappa-1}(\eta, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \tau$ — момент її першого звільнення від заявок). Зрозуміло також, що $\xi(\tau_k(x, y))$, $\beta(\tau_k(x, y))$ — це час, протягом якого система обслуговування вільна від заявок після періоду зайнятості і кількість заявок, виконаних системою за період зайнятості $[0, \tau_k(x, y)]$ відповідно. Позначимо $\tau_k(\eta, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_k$. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Нехай $k \in \mathbb{N}$. Тоді для $s > 0$, $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, $|z| \leq 1$.*

$$M[e^{-s\tau_k} e^{-\mu\xi(\tau_k)} z^{\beta(\tau_k)}; \quad \tau_k < \infty] =$$

$$= z^{k+1}(M[e^{-\mu\zeta_s^-(z)}])^{-1} M[e^{-s\eta_{k+1}} e^{-\mu(\xi+\zeta_s^-(z)-\eta_{k+1})}; \xi + \zeta_s^-(z) > \eta_{k+1}], \tag{2}$$

Зокрема $M[e^{-s\tau_k}; \tau_k < \infty] = M[e^{-s\eta_{k+1}}; \xi + \zeta_s^- > \eta_{k+1}]$, $s > 0$, де $\zeta_s^- = \zeta_s^-(1)$, $M[e^{-\mu\zeta_s^-}] = F(\mu, s, 1)F(0, s, 1)^{-1}$.

Наслідок 1. *Нехай у початковий момент часу $t = 0$ у вільну систему $G^{\varkappa}|G|1$ надходить група заявок випадкового об'єму $\varkappa$ і $[0, \tau)$ — канонічний період зайнятості, ε — час, протягом якого система є незайнятою після канонічного періоду зайнятості, d — кількість заявок, виконаних системою на інтервалі $[0, \tau]$.*

Тоді

$$M[e^{-s\tau} e^{-\mu\varepsilon} z^d; \tau < \infty] = 1 - F(\mu, s, z)^{-1} \quad \Rightarrow \quad d \doteq \varkappa_\chi, \tau \doteq \eta_d, \quad \varepsilon \doteq \xi_\chi - \tau, \tag{3}$$

де $\chi = \inf\{n > 0 : \xi_n - \eta_{\varkappa_n} > 0\}$ — момент першого виходу випадкового блукання $\{\xi_n - \eta_{\varkappa_n}; n \geq 0\}$ в додатню півплощину і

$$M[z^\chi; \chi < \infty] = 1 - \exp\Big\{-\sum_{n>0} \frac{z^n}{n} P[\xi_n > \eta_{\varkappa_n}]\Big\}, \qquad |z| \leq 1.$$

Якщо $M[\xi] > M[\eta\varkappa]$, то $M[d] = M[\varkappa]M[\chi]$, $M[\tau] = M[\eta]M[d]$, $M[\varepsilon] = M[\xi]M[\chi] - M[\tau]$, де $M[\chi] = \exp\Big\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} P[\eta_{\varkappa_n} > \xi_n]\Big\}$.

Якщо в цьому наслідку прийняти $\varkappa \equiv 1$, то отримаємо основний результат монографії [1, с.60].

2. Розв'язування основного рівняння.

Введемо випадковий процес $X_t \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_+$, $t \geq 0$; $X_0 \doteq (\varkappa - 1, \eta, \xi)$ за допомогою стохастичного рекурентного співвідношення

$$X_t = \begin{cases} X_t^{\neq}, & 0 \leq t < \tau, \\ \tau + \varepsilon - t, & \tau \leq t < \tau + \varepsilon, \\ X_{t-(\tau+\varepsilon)}, & t \geq \tau + \varepsilon. \end{cases}$$

Так введений процес описує функціонування системи обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$ для всіх $t \geq 0$. Подія $\{X_t = (k, x, y)\}$, $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$ означає, що в момент часу t в системі перебуває $k+1$ заявка (k в черзі й одна на обслуговуючому пристрої); чергове надходження групи заявок відбудеться в момент $t + y$, обслуговування заявки, що перебуває на обслуговуючому пристрої, закінчиться в момент часу $t + x$. Подія $\{X_t = y\}, y \in \mathbb{R}_+$ означає, що в момент часу t система вільна від заявок і чергове надходження групи заявок відбудеться в момент $t + y$. Зокрема, подія $B_t = \{X_t \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^2\}$ означає, що в момент часу t система зайнята, а подія $A_t = \{X_t \in \mathbb{R}_+\}$ означає, що в момент часу t система вільна від заявок. Отже,

$$X_t(\omega) = \begin{cases} [l(t,\omega), \xi(t,\omega), \eta(t,\omega)], & \omega \in B_t, \\ \xi(t,\omega), & \omega \in A_t, \end{cases}$$

де $l(t)$ — довжина черги в системі обслуговування в момент часу t, $\eta(t)$ — час, через який закінчиться обслуговування заявки, що перебуває в момент часу t на обслуговуючому пристрої, $\xi(t)$ — час, через який в систему надійде чергова група заявок.

Нехай $d(t)$ — кількість заявок, виконаних системою на інтервалі $[0, t]$, включаючи і заявку, що перебуває в момент часу t на обслуговуючому пристрої. Справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай в початковий момент часу $t = 0$ у вільну систему обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$ надходить група заявок випадкового об'єму $\varkappa$, ν_s — випадкова величина, яка має показниковий розподіл з параметром $s > 0$, $P[\nu_s > t] = \exp\{-ts\}$, $t \geq 0$.*

Тоді

$$\frac{s-\lambda-\mu}{s} M[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)}; \tau > \nu_s] = F(\mu,s,z)^{-1} - (1 - \tilde{g}(\mu)M[\theta^{\varkappa}])E(\lambda,s,z) -$$
$$- \Big(1 - \frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\Big)(1 - \tilde{g}(\mu)M[\theta^{\varkappa}])E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k[\varphi_k(\lambda,s,z) + \psi_k(\mu,s,z)], \tag{4}$$

$$\frac{s-\lambda-\mu}{s} M[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{F(s,s,z)}{F(\mu,s,z)} - \frac{1-\tilde{g}(\mu)M[\theta^{\varkappa}]}{1-\tilde{g}(s)M[z^{\varkappa}]}M[e^{-\lambda\zeta_s^+(z)}] -$$
$$- \frac{(1 - \frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda))(1 - \tilde{g}(\mu)M[\theta^{\varkappa}])}{1-\tilde{g}(s)M[z^{\varkappa}]}\sum_{k>0}\theta^k[\varphi_k(\lambda,s,z) + \psi_k(\mu,s,z)], \tag{5}$$

$$M[z^{d(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\mu}\left\{1 - \frac{F(s,s,z)}{F(\mu,s,z)}\right\}, \tag{6}$$

$$P[B_{\nu_s}] = \frac{F(s,s)}{F(0,s)}, \qquad P[A_{\nu_s}] = 1 - \frac{F(s,s)}{F(0,s)}, \qquad (s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu \geq 0, \quad |\theta|, |z| \leq 1),$$

де

$$\varphi_k(\lambda,s,z) = M[z^{T_k} e^{-\lambda(\zeta_s^+(z)+\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k})} e^{-s\xi_{\sigma_k}}; \zeta_s^+(z)+\eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}], \qquad k \in \mathbb{N}^+,$$

$$\psi_k(\mu,s,z) = M[z^{T_k} e^{-\mu(\xi_{\sigma_k}-\zeta_s^+(z)-\eta_{T_k})} e^{-s(\zeta_s^+(z)+\eta_{T_k})}; \xi_{\sigma_k} > \zeta_s^+(z)+\eta_{T_k}], \qquad k \in \mathbb{N}^+.$$

$$F(\mu,s) = F(\mu,s,1), \quad E(\lambda,s) = E(\lambda,s,1), \quad \tilde{f}(\lambda) = M[e^{-\lambda\eta}], \quad \tilde{g}(\mu) = M[e^{-\mu\xi}].$$

Доведення теорем 1, 2. Нехай $X_0^{\neq} \doteq (k_0, \eta, \xi)$, $k_0 \in \mathbb{N}$ і

$$L_k^t(x,y,z) = M[z^{d(t)}, l(t) = k, \eta(t) < x, \xi(t) < y; \tau_{k_0} > t], \qquad |z| \leq 1.$$

Розглядаючи можливі переходи процесу $X_t^{\neq}$, $t \geq 0$ за малий проміжок часу Δ, приходимо при $\Delta \to 0$ до асимптотичної рівності

$$L_k^{t+\Delta}(x,y,z) = L_k^t(x+\Delta, y+\Delta, z) - L_k^t(x+\Delta, \Delta, z) - L_k^t(\Delta, y+\Delta, z) + L_k^t(\Delta,\Delta,z) +$$

$$+z\int_0^{\Delta} d_u\, L_{k+1}^t(u, y+\Delta, z)[F(x+\Delta-u) - F(\Delta-u)] +$$

$$+\sum_{r=0}^{k-1} \int_0^{\Delta} P[\varkappa = k-r]\, d_u L_r^t(x+\Delta, u, z)[G(y+\Delta-u) - G(\Delta-u)] + o(\Delta). \tag{7}$$

Із (7) за допомогою стандартного методу отримуємо прямі рівняння Колмогорова для перехідної функції $L_k^t(x,y,z)$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_k^t(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial x} L_k^t(x,y,z) - \frac{\partial}{\partial y} L_k^t(x,y,z) = -r_k^t(x,z) - q_k^t(y,z) +$$

$$+zF(x) q_{k+1}^t(y,z) + G(y) \sum_{r=0}^{k-1} r_r^t(x,z) P[\varkappa = k-r], \tag{8}$$

з початковою умовою

$$L_k^0(x,y,z) = z\,\delta_{k_0,k}\, F(x)\, G(y), \tag{9}$$

де

$$r_k^t(x,z) = \frac{\partial}{\partial y} L_k^t(x,y,z)\Big|_{y=0}, \qquad q_k^t(y,z) = \frac{\partial}{\partial x} L_k^t(x,y,z)\Big|_{x=0},$$

$\delta_{k,r}$ — символ Кронекера. Для $s > 0$, $\operatorname{Re}\lambda \geq 0, \operatorname{Re}\mu \geq 0$, $|\theta|, |z| \leq 1$. позначимо

$$\tilde{L}_\theta^s(\lambda,\mu,z) = \int_0^\infty e^{-st} M[\theta^{l(t)} e^{-\lambda\eta(t)-\mu\xi(t)} z^{d(t)}; \tau_{k_0} > t]\, dt,$$

$$R_\theta^s(\lambda,z) = \sum_{k\geq 0} \theta^k \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st-\lambda x}\, d_x r_k^t(x,z)\, dt,$$

$$Q_\theta^s(\mu,z) = \sum_{k\geq 0} \theta^k \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st-\mu y}\, d_y q_k^t(y,z)\, dt,$$

Переходячи в рівнянні (8) до перетворень Лапласа і генератрис та використовуючи початкову умову (9), отримаємо для введених функцій наступне рівняння

$$(s-\lambda-\mu)\tilde{L}^s_\theta(\lambda,\mu,z) = z\theta^{k_0}\tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\mu) - R^s_\theta(\lambda,z)(1-\tilde{g}(\mu)M[\theta^{\varkappa}])-$$
$$-Q^s_\theta(\mu,z)\Big(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\Big) - \frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)Q^s_0(\mu,z). \qquad (10)$$

Далі вважатимемо, що змінні s,λ,μ пов'язані рівністю

$$s-\lambda-\mu=0, \qquad s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu \in [0,s]. \qquad (11)$$

Тоді з рівностей (10), (11) випливає рівняння ($k \stackrel{\text{def}}{=} k_0$)

$$z\theta^k\tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\mu) = R^s_\theta(\lambda,z)(1-\tilde{g}(\mu)M[\theta^{\varkappa}]) + Q^s_\theta(\mu,z)\Big(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)\Big) + \frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda)Q^s_0(\mu,z). \qquad (12)$$

Якщо в цій рівності прийняти $\theta = z\tilde{f}(\lambda)$, то отримаємо

$$z^{k+1}M[e^{-\lambda\eta_{k+1}-\mu\xi}] = R^s_{z\tilde{f}(\lambda)}(\lambda,z)(1-M[z^{\varkappa}e^{-\mu\xi-\lambda\eta_{\varkappa}}]) + Q^s_0(\mu,z). \qquad (13)$$

З (11) випливає справедливість при $s>0$ і $\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu \in [0,s]$ факторизаційного розкладу

$$(1-M[z^{\varkappa}e^{-\lambda\eta_{\varkappa}-\mu\xi}])^{-1} = \exp\Big\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M[z^{\varkappa_n}e^{-\lambda\eta_{\varkappa_n}-\mu\xi_n}]\Big\} =$$
$$= \exp\Big\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M[z^{\varkappa_n}e^{-\lambda(\eta_{\varkappa_n}-\xi_n)}e^{-s\xi_n}; \eta_{\varkappa_n} > \xi_n]\Big\}\times$$
$$\times\exp\Big\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M[z^{\varkappa_n}e^{-\mu(\xi_n-\eta_{\varkappa_n})}e^{-s\eta_{\varkappa_n}}; \quad \xi_n > \eta_{\varkappa_n}]\Big\} = E(\lambda,s,z)F(\mu,s,z), \qquad (14)$$

За формулою повної ймовірності

$$Q^s_0(\mu,z) = M[z^{d(\tau_k)}e^{-s\tau_k}e^{-\mu\xi(\tau_k)}; \tau_k<\infty]. \qquad (15)$$

Використовуючи факторизаційний розклад (14), з рівняння (13) отримаємо

$$Q^s_0(\mu,z) = (M[e^{-\mu\zeta^-_s(z)}])^{-1}z^{k+1}M[e^{-\mu(\xi+\zeta^-_s(z)-\eta_{k+1})}e^{-s\eta_{k+1}}; \xi+\zeta^-_s(z)>\eta_{k+1}], \qquad (16)$$

$$R^s_{z\tilde{f}(\lambda)}(\lambda,z) = E(\lambda,s,z)F(0,s,z)z^{k+1}M[e^{-\lambda(\eta_{k+1}-\xi-\zeta^-_s(z))}e^{-s(\xi+\zeta^-_s(z))}; \eta_{k+1}>\xi+\zeta^-_s(z)]. \quad (17)$$

З рівностей (15), (16) випливає рівність (2) з теореми 1.

Для $|\theta|=1$ введемо позначення

$$A_\theta(\lambda,\mu,z) = \{(1-\frac{z}{\theta}\tilde{f}(\lambda))(1-\tilde{g}(\mu)M[\theta^{\varkappa}])\}^{-1}, \quad A(\lambda,\mu,z) = (1-\tilde{g}(\mu)M[z^{\varkappa}e^{-\lambda\eta_{\varkappa}}])^{-1},$$

$$a^0_\theta(\lambda,\mu,z) = \sum_{k\ge 0}\theta^k M[z^{T_k}\,e^{-\mu\xi_{\sigma_k}}\,e^{-\lambda\eta_{T_k}}], \quad a_\theta(\lambda,\mu,z) = a^0_\theta(\lambda,\mu,z)-1.$$

Справедлива наступна лема.

Лема. *Виконуються рівності*

$$A_\theta(\lambda,\mu,z) = A(\lambda,\mu,z)a^0_\theta(\lambda,\mu,z) + A(\lambda,\mu,z)\frac{\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)}, \qquad |\theta|=1, \quad \operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu \ge 0,$$

$$(1-\tilde g(\mu)M[\theta^{\varkappa}])^{-1} = A(\lambda,\mu,z)\left\{a^0_\theta(\lambda,\mu,z) - \frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)a_\theta(\lambda,\mu,z)\right\},$$
$$\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu \ge 0, \quad |\theta|, |z| \le 1.$$

Доведення леми у випадку, коли $\eta,\xi\in\mathbb{N}^+$, наведено в [2] і легко переноситься на випадок, коли $\eta,\xi\in\mathbb{R}_+$.

Продовжимо аналіз наших рівнянь у припущенні, що виконується канонічна початкова умова, $X_0^{\neq} \doteq (\varkappa-1,\eta,\xi)$ (в початковий момент часу $t=0$ у вільну систему надходить група заявок випадкового об'єму $\varkappa$). Для диференціального рівняння (8) отримаємо нову початкову умову

$$L_k^0(x,y,z) = z\,P[\varkappa = k+1]\,F(x)\,G(y),$$

а рівняння (10) набуває вигляду

$$(s-\lambda-\mu)\tilde L^s_\theta(\lambda,\mu,z) = \frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)\tilde g(\mu)M[\theta^{\varkappa}] - R^s_\theta(\lambda,z)(1-\tilde g(\mu)M[\theta^{\varkappa}]) -$$
$$-Q^s_\theta(\mu,z)\Big(1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)\Big) - \frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)Q^s_0(\mu,z). \tag{18}$$

З урахуванням нової початкової умови і факторизаційного розкладу (14), рівності (16), (17) набувають вигляду

$$Q^s_0(\mu,z) = M[z^d e^{-s\tau}e^{-\xi(\tau)};\tau<\infty] = 1-F(\mu,s,z)^{-1}, \quad R^s_{z\tilde f(\lambda)}(\lambda,z) = E(\lambda,s,z)-1. \tag{19}$$

Рівність (3) в наслідку 1 випливає з першої рівності в (19).

Помноживши рівняння (12) на $A_\theta(\lambda,\mu,z)$ (із врахуванням нових початкових умов), для $s>0$, $\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu\in[0,s]$, $|\theta|=1$, $|z|\le 1$. отримаємо

$$\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)\tilde g(\mu)M[\theta^{\varkappa}]A_\theta(\lambda,\mu,z) = \frac{R^s_\theta(\lambda,z)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)} + \frac{Q^s_\theta(\mu,z)}{1-\tilde g(\mu)M[\theta^{\varkappa}]} + \frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)A_\theta(\lambda,\mu,z)Q^s_0(\mu,z). \tag{20}$$

В результаті ми отримали рівність рядів Лорана за змінною θ. Прирівнюючи правильні частини рядів Лорана у лівій і правій частинах цього рівняння, отримаємо

$$\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)a_\theta(\lambda,\mu,z)A(\lambda,\mu,z) = \frac{R^s_\theta(\lambda,z) - \frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)R^s_{z\tilde f(\lambda)}(\lambda,z)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)} + \frac{Q^s_\theta(\mu,z)}{1-\tilde g(\mu)M[\theta^{\varkappa}]} +$$
$$+\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)a_\theta(\lambda,\mu,z)A(\lambda,\mu,z)Q^s_0(\mu,z), \qquad s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda,\operatorname{Re}\mu\in[0,s], \quad |\theta|\le 1. \tag{21}$$

Помноживши рівняння (13) на $A(\lambda,\mu,z)a^0_\theta(\lambda,\mu,z)$, з врахуванням нових початкових умов, знаходимо

$$(A(\lambda,\mu,z)-1)a^0_\theta(\lambda,\mu,z) = R^s_{z\tilde f(\lambda)}(\lambda,z)a^0_\theta(\lambda,\mu,z) + Q^s_0(\mu,z)a^0_\theta(\lambda,\mu,z)A(\lambda,\mu,z). \tag{22}$$

Віднімаючи від (21) рівність (22), враховуючи другу рівність леми і рівність (19) , отримаємо рівняння

$$a_\theta^0(\lambda,\mu,z)E(\lambda,s,z)-\frac{1}{1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa]}=\frac{R_\theta^s(\lambda,z)-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)R^s_{z\tilde f(\lambda)}(\lambda,z)}{1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)}+\frac{Q_\theta^s(\mu,z)-Q_0^s(\mu,z)}{1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa]},$$

$$s>0,\quad \operatorname{Re}\lambda,\operatorname{Re}\mu\in[0,s],\quad |\theta|,|z|\le 1. \tag{23}$$

Нехай функції $A(x)$, $x\in\mathbb{R}$ такі, що $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|A(x)|\,dx<\infty$. Введемо проектори для перетворень Лапласа від цих функцій

$$I_\lambda^+\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda x}A(x)dx\right]=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}A(x)dx,\qquad \operatorname{Re}\lambda\ge 0,$$

$$I_\lambda^-\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda x}A(x)dx\right]=\int_{-\infty}^{0}e^{-\lambda x}A(x)dx,\qquad \operatorname{Re}\lambda\le 0.$$

Неважко переконатися, що (нагадаємо, що виконується рівність $s-\lambda-\mu=0$ і $\lambda\ne 0$)

$$I_\lambda^+\left[a_\theta^0(\lambda,\mu,z)E(\lambda,s,z)-\frac{1}{1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa]}\right]=E(\lambda,s,z)-1+E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\varphi_k(\lambda,s,z),$$

$$I_\mu^+\left[a_\theta^0(\lambda,\mu,z)E(\lambda,s,z)-\frac{1}{1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa]}\right]=E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\psi_k(\mu,s,z)-\frac{\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa]}{1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa]},$$

де при $s>0$, $\operatorname{Re}\lambda,\operatorname{Re}\mu\ge 0$, $k\in\mathbb{N}$

$$\varphi_k(\lambda,s,z)=M[z^{T_k}e^{-\lambda(\zeta_s^++\eta_{T_k}-\xi_{\sigma_k})}e^{-s\xi_{\sigma_k}};\zeta_s^+(z)+\eta_{T_k}>\xi_{\sigma_k}],$$

$$\psi_k(\mu,s,z)=M[z^{T_k}e^{-\mu(\xi_{\sigma_k}-\zeta_s^+-\eta_{T_k})}e^{-s(\zeta_s^++\eta_{T_k})};\xi_{\sigma_k}>\zeta_s^+(z)+\eta_{T_k}].$$

Проводячи стандартні факторизаційні міркування (див., наприклад [3, с.115]), із рівності (23) отримаємо

$$R_\theta^s(\lambda,z)=\Big(1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda)\Big)E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\varphi_k(\lambda,s,z)+E(\lambda,s,z)-1,$$

$$Q_0^s(\mu,z)=1-F^{-1}(\mu,s,z),$$

$$Q_\theta^s(\mu,z)=(1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa])E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k\psi_k(\mu,s,z)-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa]+Q_0^s(\mu,z).$$

Підставляючи знайдені вирази для функцій $R_\theta^s(\lambda,z),Q_\theta^s(\mu,z),Q_0^s(\mu,z)$ в рівняння (18), для $s>0$, $\operatorname{Re}\lambda,\operatorname{Re}\mu\ge 0$, $|\theta|,|z|\le 1$ отримаємо

$$(s-\lambda-\mu)\tilde L_\theta^s(\lambda,\mu,z)=F^{-1}(\mu,s,z)-E(\lambda,s,z)(1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa])-$$

$$-(1-\tilde g(\mu)M[\theta^\varkappa])(1-\frac{z}{\theta}\tilde f(\lambda))E(0,s,z)\sum_{k>0}\theta^k[\varphi_k(\lambda,s,z)+\psi_k(\mu,s,z)]. \tag{24}$$

Цією рівністю визначена функція

$$s\tilde{L}^s_\theta(\lambda,\mu,z) = M[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)};\, \tau>\nu_s], \quad s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu \ge 0, \quad |\theta|, |z| \le 1.$$

і ми отримали рівність (4) з теореми 2.

За формулою повної ймовірності

$$M[z^{d(t)}\theta^{l(t)}e^{-\lambda\eta(t)}e^{-\mu\xi(t)}; B_t] = M[z^{d(t)}\theta^{l(t)}e^{-\lambda\eta(t)}e^{\mu\xi(t)}; \tau>t]+$$

$$+\int_0^t M[z^{d(\tau)}, \quad \tau+\varepsilon\in du]M[z^{d(t-u)}\theta^{l(t-u)}e^{-\lambda\eta(t-u)}e^{-\mu\xi(t-u)}; B_{t-u}],$$

$$M[z^{d(t)}e^{-\mu\xi(t)}; A_t] = M[z^{d(t)}e^{-\mu\xi(t)}; \quad \tau<t<\tau+\varepsilon]+$$

$$+\int_0^t M[z^{d(\tau)}, \tau+\varepsilon\in du]M[z^{d(t-u)}e^{-\mu\xi(t-u)}; A_{t-u}].$$

Із (3) випливає, що $M[z^{d(\tau)}e^{-s(\tau+\varepsilon)}; \tau<\infty] = 1-F(s,s,z)^{-1}$. Тому

$$M[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = s(1-M[z^{d(\tau)}e^{-s(\tau+\varepsilon)};\tau<\infty])^{-1}\tilde{L}^s_\theta(\lambda,\mu,z) =$$

$$= F(s,s,z)M[z^{d(\nu_s)}\theta^{l(\nu_s)}e^{-\lambda\eta(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)}; \tau>\nu_s], \tag{25}$$

$$M[z^{d(\nu_s)}e^{-\mu\xi(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = sF(s,s,z)\int_0^\infty e^{-st}M[z^{d(t)}e^{-\mu\xi(t)}; \tau<t<\tau+\varepsilon]dt =$$

$$= F(s,s,z)\frac{s}{s-\mu}\left\{F(s,s,z)^{-1}-F(\mu,s,z)^{-1}\right\} = \frac{s}{s-\mu}\left\{1-\frac{F(s,s,z)}{F(\mu,s,z)}\right\}.$$

Із (14) випливає, що $F(s,s,z)E(0,s,z) = (1-\tilde{g}(s)M[z^{\varkappa}])^{-1}$. Звідси, а також з (24) і (25) отримаємо формулу (5). Теорему 2 доведено. $\square$

3. Розподіл основних характеристик системи обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$.

Ми наведемо ряд наслідків з теореми 2 у припущенні, що система обслуговування починає еволюцію із канонічного початкового стану (в початковий момент часу $t=0$ у вільну систему надходить група заявок випадкового об'єму $\varkappa$).

Наслідок 2. *Нехай $l(t)$ — довжина черги в системі обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$ в момент часу $t\ge 0$. Тоді*

$$P[l(\nu_s)=k; \tau>\nu_s] = F(s,s)^{-1}P[l(\nu_s)=k; B_{\nu_s}], \quad k\in\mathbb{N},$$

$$P[l(\nu_s)=0; B_{\nu_s}] = \frac{F(s,s)}{F(0,s)} + \frac{1}{1-\tilde{g}(s)}\{b_1(s)-1\},$$

$$P[l(\nu_s)=k; B_{\nu_s}] = \frac{1}{1-\tilde{g}(s)}\{P[\varkappa=k]+b_{k+1}(s)-b_k(s)\}, \quad k\in\mathbb{N}^+,$$

$$P[B_{\nu_s}] = \frac{F(s,s)}{F(0,s)}, \qquad P[A_{\nu_s}] = 1-\frac{F(s,s)}{F(0,s)},$$

де

$$F(\mu, s) = F(\mu, s, 1), \qquad E(\lambda, s) = E(\lambda, s, 1),$$

$$b_k(s) = a_k(s) - \sum_{r=1}^{k-1} P[\varkappa = r] a_{k-r}(s), \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

$$a_k(s) = M[e^{-s\min\{\xi_{\sigma_k}, \zeta_s^+ + \eta_{T_k}\}}], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо завантаження системи $\rho = M[\varkappa\eta](M[\xi])^{-1} < 1$, *то існує* $\lim\limits_{t\to\infty} l(t) = l$ — *довжина черги в системі обслуговування, що перебуває в стаціонарному режимі і*

$$P[l = 0;\, B] = \rho - (M[\xi])^{-1} b_1, \qquad P[l = k;\, B] = (M[\xi])^{-1}(b_k - b_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

$$P[A] = 1 - \rho, \quad P[B] = \rho,$$

де $b_k = a_k - \sum_{r=1}^{k-1} P[\varkappa = r] a_{k-r}$ *при* $k \in \mathbb{N}_+$, $a_k = M[\min\{\xi_{\sigma_k},\, \zeta^+ + \eta_{T_k}\}]$, $k \in \mathbb{N}$, $P[A]$ ($P[B]$) — *ймовірність застати в стаціонарному режимі систему вільною (відповідно зайнятою).*

Для доведення наслідку необхідно прийняти в (6) $z = 1$, $\mu = 0$, а в (4), (5), $\lambda = \mu = 0$, $z = 1$ і прирівняти коефіцієнти при θ^k в правій і лівій частинах отриманих рівностей.

Наслідок 3. *Нехай* $\varkappa \equiv 1$ *і завантаження класичної системи обслуговування* $G|G|1$ $\rho = M[\eta](M[\xi])^{-1} < 1$. *Тоді*

$$P[l = 0;\, B] = \rho - (M[\xi])^{-1} b_1,\ P[l = k;\, B] = (M[\xi])^{-1}(b_k - b_{k+1}),\ P[A] = 1 - \rho,\ P[B] = \rho,$$

де $b_k = a_k - a_{k-1}$ *при* $k \in \mathbb{N}_+$, $a_k = M[\min\{\xi_k,\, \zeta^+\}]$, $k \in \mathbb{N}$, $\zeta^+ \doteq \sup_{n\ge 0}\{\eta_n - \xi_n\}$

Для доведення наслідку досить помітити, що при $\varkappa \equiv 1$

$$\varkappa_n = n, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad \sigma_k = k, \quad T_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 4. *Нехай* $d(t)$ — *кількість заявок, виконаних системою* $G^\varkappa|G|1$ *на інтервалі* $[0, t]$, *включаючи і заявку, що перебуває в момент часу* t *на обслуговуючому пристрої. Тоді*

$$M[z^{d(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = z\frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)} \times \frac{1 - \tilde f(s)}{1 - z\tilde f(s)}, \qquad M[z^{d(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = 1 - \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)},$$

$$M[z^{d(\nu_s)}] = 1 - \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)} \times \frac{1 - z}{1 - z\tilde f(s)}, \qquad M[z^{d(\nu_s)}; \tau > \nu_s] = zF(0,s,z)^{-1} \times \frac{1 - \tilde f(s)}{1 - z\tilde f(s)},$$

$$M[z^{d(\tau)} e^{-s\tau}; \tau < \infty] = 1 - F(0,s,z)^{-1}. \tag{26}$$

Для доведення наслідку необхідно вибрати в рівностях (4)–(6) $\lambda = \mu = 0$, $\theta = 1$.

Відмітимо, що рівності (26) задають розподіл процесу $d(t)$, $t \ge 0$, який описує вихідний потік обслужених заявок в системі обслуговування $G^\varkappa|G|1$.

Наслідок 5. *Нехай $h(t)$ — кількість заявок, що надійшли в систему обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$ на інтервалі $[0,t]$. Тоді*

$$M[z^{h(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)} - \frac{1-M[z^{\varkappa}]}{1-\tilde{g}(s)M[z^{\varkappa}]}, \quad M[z^{h(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = 1 - \frac{F(s,s,z)}{F(0,s,z)},$$

$$M[z^{h(\nu_s)}] = M[z^{\varkappa}]\frac{1-\tilde{g}(s)}{1-\tilde{g}(s)M[z^{\varkappa}]}, \qquad M[z^{h(\tau)}e^{-s\tau}; \tau<\infty] = 1 - F(0,s,z)^{-1},$$

$$M[z^{h(\nu_s)}; \tau > \nu_s] = F(0,s,z)^{-1} - F(s,s,z)^{-1}\frac{1-M[z^{\varkappa}]}{1-\tilde{g}(s)M[z^{\varkappa}]}, \tag{27}$$

Для доведення наслідку необхідно вибрати в рівностях (4)–(6) $\lambda = \mu = 0$, $\theta = z$.

Відмітимо, що рівності (27) задають розподіл процесу $\{h(t), t \geq 0\}$, який описує вхідний потік заявок в системі обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$.

Припустимо, що в момент часу $t \geq 0$ в систему обслуговування надходить група заявок. Через $w(t)$ позначимо час очікування початку обслуговування першої заявки із цієї групи. Випадкову величину $w(t)$ називають також віртуальним часом очікування.

Наслідок 6. *Нехай $w(t)$ — віртуальнй час очікування початку обслуговування для першої заявки в групі, що надійшла в момент часу $t \geq 0$ в систему обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$ з канонічною початковою умовою. Тоді*

$$P[w(\nu_s) = 0] = 1 - \frac{F(s,s)}{F(0,s)},$$

$$M[e^{-\lambda w(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\lambda}\left\{\frac{F(s,s)}{F(0,s)} - M[e^{-\lambda\zeta_s^+}]\frac{1-M[e^{-\lambda\eta_{\varkappa}}]}{1-\tilde{g}(s)}\right\},$$

$$M[e^{-\lambda w(\nu_s)}] = 1 + \frac{\lambda}{s-\lambda} \times \frac{F(s,s)}{F(0,s)} - \frac{s}{s-\lambda}M[e^{-\lambda\zeta_s^+}]\frac{1-M[e^{-\lambda\eta_{\varkappa}}]}{1-\tilde{g}(s)}, \qquad s>0, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0.$$

Якщо завантаження системи $\rho = M[\eta\varkappa](M[\xi])^{-1} < 1$, то існує $\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = w$ — віртуальний час очікування в системі обслуговування, що знаходиться в стаціонарному режимі і

$$M[e^{-\lambda w}] = 1 - \rho + \rho M[e^{-\lambda(\zeta^+ + \hat{\eta}_{\varkappa})}], \qquad \operatorname{Re}\lambda \geq 0,$$

де

$$\zeta^+ \doteq \sup_{n\geq 0}\{\eta_{\varkappa n} - \xi_n\},$$

$$M[e^{-\lambda\zeta^+}] = \exp\Big\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M[e^{-\lambda(\eta_{\varkappa n}-\xi_n)} - 1; \quad \eta_{\varkappa n} > \xi_n]\Big\}, \qquad \operatorname{Re}\lambda \geq 0,$$

$$P[\hat{\eta}_{\varkappa} < x] = \frac{1}{M[\eta\varkappa]}\int_0^x P[\eta_{\varkappa} > u]du.$$

Для доведення наслідку необхідно в рівностях (5), (6) вибрати $\mu = 0$, $z = 1$, $\theta = \tilde{f}(\lambda)$. Відзначимо, що віртуальний час очікування для системи $G|G|1$ вивчався в [4].

Наслідок 7. *Нехай $\xi(t)$ — час, через який після моменту $t \geq 0$ в систему обслуговування надійде чергова група заявок. Тоді*

$$M[e^{-\mu\xi(\nu_s)}; \tau > \nu_s] = \frac{s}{s-\mu}\left\{F(\mu,s)^{-1} - F(s,s)^{-1}\frac{1-\tilde{g}(\mu)}{1-\tilde{g}(s)}\right\},$$

$$M[e^{-\mu\xi(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\mu}\left\{\frac{F(s,s)}{F(\mu,s)} - \frac{1-\tilde{g}(\mu)}{1-\tilde{g}(s)}\right\},$$

$$M[e^{-\mu\xi(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\mu}\left\{1 - \frac{F(s,s)}{F(\mu,s))}\right\}, \qquad M[e^{-\mu\xi(\nu_s)}] = \frac{s}{s-\mu} \times \frac{\tilde{g}(\mu)-\tilde{g}(s)}{1-\tilde{g}(s)}.$$

Якщо завантаження системи $\rho < 1$, то існує $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t) = \xi^*$ — час, через який надійде група заявок в систему, що перебуває в стаціонарному режимі і

$$\xi^* \doteq \hat{\xi}, \quad M[e^{-\mu\xi^*}; B] = M[e^{-\mu\hat{\xi}}] - (1-\rho)M[e^{-\mu\hat{\varepsilon}}], \quad M[e^{-\mu\xi^*}; A] = (1-\rho)M[e^{-\mu\hat{\varepsilon}}],$$

де $P[\hat{\varepsilon} < y] = \frac{1}{M[\varepsilon]}\int\limits_0^y P[\varepsilon > u]du$, $M[e^{-\mu\varepsilon}] = 1 - F(\mu,0)^{-1}$, $P[\hat{\xi} < y] = \frac{1}{M[\xi]}\int\limits_0^y P[\xi > u]du$.

Для доведення наслідку необхідно в рівностях (4)–(6) вибрати $\theta = z = 1$, $\lambda = 0$.

Наслідок 8. *Нехай $\eta(t)$ — час, через який закінчиться обслуговування заявки, що перебуває в момент часу $t \geq 0$ на обслуговуючому пристрої. Тоді*

$$M[e^{-\lambda\eta(\nu_s)}; \tau > \nu_s] = \frac{s}{s-\lambda}F(0,s)^{-1}\frac{\tilde{f}(\lambda)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)},$$

$$M[e^{-\lambda\eta(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{s}{s-\lambda} \times \frac{F(s,s)}{F(0,s)} \times \frac{\tilde{f}(\lambda)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(s)}.$$

Якщо завантаження системи $\rho < 1$, то існує $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \eta^*$ — час, через який закінчиться обслуговування заявки в системі, що знаходиться в стаціонарному режимі і $M[e^{-\lambda\eta^*}; B] = \rho M[e^{-\lambda\hat{\eta}}]$, де $P[\hat{\eta} < x] = \frac{1}{M[\eta]}\int_0^x P[\eta > u]du$.

Для доведення наслідку необхідно в рівностях (4), (5) вибрати $\theta = z = 1$, $\mu = 0$.

Наслідок 9. *Нехай $\varepsilon(t)$ — загальний час перебування системи обслуговування $G^{\varkappa}|G|1$ в незайнятому стані на інтервалі $[0,t]$. Тоді*

$$M[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; A_{\nu_s}] = \frac{s}{s+\mu}\left\{1 - \frac{F(s+\mu,s)}{F(0,s)}\right\}, \quad M[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; B_{\nu_s}] = \frac{F(s+\mu,s)}{F(0,s)},$$

$$M[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}] = \frac{s}{s+\mu} + \frac{\mu}{s+\mu} \times \frac{F(s+\mu,s)}{F(0,s)}, \quad s > 0, \mathrm{Re}\,\mu \geq 0.$$

При $M[\xi] < M[\eta\varkappa]$ існує $\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \varepsilon^*$ — загальний час перебування системи обслуговування у незайнятому стані на нескінченному інтервалі

$$M[e^{-\mu\varepsilon^*}] = \frac{F(\mu,0)}{F(0,0)} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon^* \doteq \zeta^- = \sup_{n\geq 0}\{\xi_n - \eta_{\varkappa_n}\},$$

де $M[e^{-\mu\zeta^-}] = \exp\Big\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}M[e^{-\mu(\xi_n-\eta_{\varkappa_n})} - 1; \quad \xi_n > \eta_{\varkappa_n}]\Big\}$, $\mathrm{Re}\,\mu \geq 0$.

Доведення. Правильні наступні рівності

$$M[e^{-\mu\varepsilon(t)};\, B_t] = P[\tau > t] + \int\limits_0^t M[e^{-\mu\varepsilon},\, \tau+\varepsilon \in du] M[e^{-\mu\varepsilon(t-u)};\, B_{t-u}],$$

$$M[e^{-\mu\varepsilon(t)};\, A_t] = M[e^{-\mu(t-\tau)};\, \tau < t < \tau+\varepsilon] + \int\limits_0^t M[e^{-\mu\varepsilon},\, \tau+\varepsilon \in du] M[e^{-\mu\varepsilon(t-u)};\, A_{t-u}].$$

Але з (3) випливає $M[e^{-\mu\varepsilon}e^{-s(\tau+\varepsilon)}; \tau < \infty] = 1 - F(s+\mu, s)^{-1}$. Тому

$$M[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; \quad B_{\nu_s}] = sF(s+\mu, s)\int\limits_0^\infty e^{-st} P[\tau > t] dt = \frac{F(s+\mu, s)}{F(0,s)},$$

$$M[e^{-\mu\varepsilon(\nu_s)}; \quad A_{\nu_s}] = sF(s+\mu, s)\int\limits_0^\infty e^{-st} M[e^{-\mu(t-\tau)}, \quad \tau < t < \tau+\varepsilon] dt =$$

$$= \frac{s}{s+\mu} F(s+\mu, s)\left\{F(s+\mu, s)^{-1} - F(0,s)^{-1}\right\}.$$

□

Для класичної системи $G|G|1$, яка є частковим випадком системи $G^{\varkappa}|G|1$ при $\varkappa \equiv 1$, теореми і наслідки спрощуються, позаяк у цьому випадку

$$\varkappa_n = n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \sigma_k = k, \quad T_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Прикладом таких спрощень є наслідок 3.

Відзначимо основні складові розробленого нами методу розв'язування рівнянь, що виникають при досліджені систем обслуговування загального вигляду [5, 8, 9] і граничних функціоналів для різниці процесів відновлення [2, 6, 7]:

1) За математичну модель приймається трикомпонентний процес Маркова з двома лінійними компонентами (у цій статті, з двома спадними лінійними компонентами).

2) Застосовуються заміни змінних

$$s - \lambda - \mu = 0, \qquad s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu \in [0, s]; \qquad \theta = z\tilde{f}(\lambda), \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0, \quad |z| \leq 1,$$

за яких рівняння спочатку спрощуються і ядро факторизації виникає автоматично.

3) Ключову роль при розв'язуванні рівнянь відіграє лема, яка дозволяє ефективно розв'язувати рівняння і отримувати розподіли функціоналів у явному вигляді.

ЛІТЕРАТУРА

1. Прабху Н. Стохастические процессы теории запасов. — Москва: Мир, 1984. – 184 с.

2. Ежов И.И., Каданков В.Ф. *О распределении максимума разности независимых процессов восстановления с дискретным временем* // УМЖ. – 1998. – Т.50, №10. – С.1426–1432.

3. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, — М.:Наука, 1972. – 368 с.

4. Lindley D.V. *The theory of queues with a single server* // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1952. – V.48, №2. – P.277–287.

5. Ежов И.И. *О распределении длины очереди в классической системе $G|G|1$ с дискретным временем* // Доклады АН России. – 1993. – Т.332, №4. – С.408–410.

6. Ежов И.И., Каданков В.Ф. *Граничные функционалы для полунепрерывной разности процессов восстановления с дискретным временем* // УМЖ. – 1993. – Т.45, №12. – С.1710–1713.

7. Ежов И.И., Каданков В.Ф. *О производящей функции времени достижения границы полунепрерывной разностью независимых процессов восстановления с дискретным временем* // УМЖ. – 2000. – Т.52, №4. – С.553–561.

8. Ежов И.И., Каданков В.Ф. *О распределении числа требований в системе обслуживания $D_\eta|D_\xi^\varkappa|1$*// УМЖ. – 2000. – Т.52, №8. – С.1075–1081.

9. Ежов И.И., Каданков В.Ф. *Граничные функционалы для разности неординарных процессов восстановления с дискретным временем* // УМЖ. – 2000. – Т.52,№10. – С.1345–1356.

Інститут математики НАН України,
Україна, 01601, Київ 4, вул.Терещенківська, 3
kadankov@imath.kiev.ua

Надійшло 19.06.2000
Після переробки 11.06.2001