УДК 517.9

В. Ю. Слюсарчук

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ЛІПШИЦЕВОЇ ОБОРОТНОСТІ НЕЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА $(\mathcal{D}x)(t)=x(t+1)-f(x(t))$ В ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ І НЕПЕРЕРВНИХ НА ОСІ ФУНКЦІЙ

V. Yu. Slyusarchuk. *Necessary and sufficient conditions of Lipschitz reversibility of nonlinear difference operator* $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1)-f(x(t))$ *in the space of bounded and continuous functions on axis*, Matematychni Studii, **16** (2001) 185–194.

Necessary and sufficient conditions of Lipschitz reversibility of nonlinear difference operator $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$ ($f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function) in the space of bounded and continuous functions on $\mathbb{R}$ are obtained.

Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейного разностного оператора* $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1)-f(x(t))$ *в пространстве ограниченных и непрерывных на оси функций* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.185–194.

Получены необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейного разностного отображения $(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t))$ ($f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение) в пространстве ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций.

1. Постановка задачі. Нехай $C^0 = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ — банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$. Відображення $\mathcal{A}$, яке діє в цьому просторі, називається *ліпшицевим*, якщо

$$\sup_{u,v\in C^0,\ u\neq v} \frac{\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\|_{C^0}}{\|u - v\|_{C^0}} < +\infty.$$

Розглянемо неперервне відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і величини

$$q \overset{\text{def}}{=} \sup_{u,v\in\mathbb{R},\ u\neq v} \left|\frac{f(u)-f(v)}{u-v}\right|, \quad Q \overset{\text{def}}{=} \inf_{u,v\in\mathbb{R},\ u\neq v} \left|\frac{f(u)-f(v)}{u-v}\right|.$$

Вважатимемо, що

$$q < +\infty. \tag{1}$$

Прикладом ліпшицевого різницевого відображення, що діє в C^0, є відображення $\mathcal{D}$, визначене рівністю

$$(\mathcal{D}x)(t) = x(t+1) - f(x(t)),\ t\in\mathbb{R},$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47N20.

де $x \in C^0$.

З'ясуємо, коли це відображення має обернене ліпшицеве відображення.

Очевидно, що в класі нелінійних відображень відображення $\mathcal{D}$ є найпростішим. Однак розв'язання задачі про ліпшицеву оборотність цього відображення через його нелінійність є непростим. Особливо складним є встановлення необхідних умов ліпшицевої оборотності цього відображення. Відомі методи дослідження оборотності лінійних і слабо нелінійних відображень (див. [1–11]) незастосовні до $\mathcal{D}$. Для розглядуваного відображення та аналогічних відображень, що діють в просторі C^0 та інших функціональних просторах, потрібно розробляти нові методи дослідження. Один із таких методів запропоновано у цій статті. Він базується на твердженнях про нерухомі точки та інваріантні замкнені інтервали, а також на теорії нелінійних c-неперервних відображень.

2. Формулювання основних результатів.

Теорема 1. *Нехай виконується співвідношення (1). Для того, щоб відображення $\mathcal{D}\colon C^0 \to C^0$ мало обернене ліпшицеве відображення $\mathcal{D}^{-1}$, необхідно і досить, щоб*

$$q < 1 \tag{2}$$

або

$$Q > 1. \tag{3}$$

Теорема 2. *Якщо виконується співвідношення (2), то*

$$\|\mathcal{D}^{-1}h_1 - \mathcal{D}^{-1}h_2\|_{C^0} \le (1-q)^{-1}\|h_1 - h_2\|_{C^0} \tag{4}$$

для всіх $h_1, h_2 \in C^0$ і

$$\|\mathcal{D}^{-1}h\|_{C^0} \le (1-q)^{-1}\|h + f(0)\|_{C^0} \tag{5}$$

для всіх $h \in C^0$. Якщо виконуються співвідношення (1) і (3), то

$$\|\mathcal{D}^{-1}h_1 - \mathcal{D}^{-1}h_2\|_{C^0} \le (Q-1)^{-1}\|h_1 - h_2\|_{C^0} \tag{6}$$

для всіх $h_1, h_2 \in C^0$ і

$$\|\mathcal{D}^{-1}h\|_{C^0} \le (Q-1)^{-1}\|h + f(0)\|_{C^0} \tag{7}$$

для всіх $h \in C^0$.

Обгрунтування цих теорем здійснюється за допомогою ряду допоміжних результатів, що мають і самостійну цінність. Вони наведені в наступних трьох розділах статті.

3. Стійкість ліпшицевої оборотності відображення $\mathcal{D}$ до малих ліпшицевих збурень.

Лема 1. *Нехай відображення $A\colon C^0 \to C^0$ має обернене ліпшицеве відображення A^{-1} таке, що для всіх $h_1, h_2 \in C^0$*

$$\|A^{-1}h_1 - A^{-1}h_2\|_{C^0} \le a\|h_1 - h_2\|_{C^0},$$

де a — додатне число. Тоді для кожного ліпшицевого відображення $B\colon C^0 \to C^0$ такого, що для всіх $h_1, h_2 \in C^0$ (b — додатне число)

$$\|Bh_1 - Bh_2\|_{C^0} \le b\|h_1 - h_2\|_{C^0}$$

і $ab < 1$, відображення $A+B\colon C^0 \to C^0$ має обернене ліпшицеве відображення $(A+B)^{-1}$.

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $h \in C^0$ і розглянемо рівняння

$$Ax + Bx = h. \tag{8}$$

Із оборотності відображення A випливає, що це рівняння еквівалентне до рівняння

$$x = A^{-1}(h - Bx). \tag{9}$$

Права частина цього рівняння визначає в просторі C^0 відображення стиску. Справді, для кожних $h_1, h_2 \in C^0$

$$\|A^{-1}(h - Bh_1) - A^{-1}(h - Bh_2)\|_{C^0} \leq a\|Bh_1 - Bh_2\|_{C^0} \leq ab\|h_1 - h_2\|_{C^0}.$$

Тому рівняння (9), а, отже, і рівняння (8) має єдиний розв'язок $x \in C^0$.

Отже, на підставі довільності $h \in C^0$ відображення $A+B$ має обернене відображення $(A + B)^{-1}$. Ліпшицевість цього відображення випливає з наступних міркувань.

Нехай h_1, h_2 — довільні елементи простору C^0, а x_1 і x_2 є розв'язки рівняння (8) відповідно при $h = h_1$ і $h = h_2$. На підставі (9)

$$x_1 - x_2 = A^{-1}(h_1 - Bx_1) - A^{-1}(h_2 - Bx_2).$$

Тому

$$\|x_1 - x_2\|_{C^0} \leq a\|(h_1 - h_2) - (Bx_1 - Bx_2)\|_{C^0} \leq a(\|h_1 - h_2\|_{C^0} + b\|x_1 - x_2\|_{C^0}).$$

Звідси випливає, що

$$\|x_1 - x_2\|_{C^0} \leq \frac{a}{1 - ab}\|h_1 - h_2\|_{C^0}.$$

Лему 1 доведено. □

4. c-Неперервність відображення $\mathcal{D}^{-1}$.

Говоритимемо, що послідовність x_n, $n \geq 1$ елементів простору C^0 *локально збігається* до елемента $x \in C^0$ і позначатимемо

$$x_n \overset{\text{лок.},\, C^0}{\longrightarrow} x\ , \quad n \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|t|\leq T} |x_n(t) - x(t)| = 0$ для кожного $T > 0$.

Відображення $A\colon C^0 \to C^0$ називається *c-неперервним*, якщо

$$Ax_n \overset{\text{лок.},\, C^0}{\longrightarrow} Ax\ , \quad n \to \infty$$

для довільних $x \in C^0$ і послідовності x_n, $n \geq 1$, для яких $x_n \overset{\text{лок.},\, C^0}{\longrightarrow} x$ при $n \to \infty$.

Лема 2. *Якщо відображення $\mathcal{D}\colon C^0 \to C^0$ має обернене ліпшицеве відображення $\mathcal{D}^{-1}$, то відображення $\mathcal{D}^{-1}$ є c-неперервним.*

Доведення. Нехай відображення $\mathcal{D}^{-1}$ не c-неперервне. Тоді існують число $\varepsilon > 1$, відрізок $[a, b]$ і обмежені послідовності

$$\begin{gathered} x, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\ , \\ h, h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n, \ldots \end{gathered} \tag{10}$$

елементів простору C^0, для яких

$$\mathcal{D}x = h, \tag{11}$$

$$\mathcal{D}x_n = h_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$h_n \overset{\text{лок., } C^0}{\longrightarrow} h\ , \quad n \to \infty \tag{13}$$

і

$$\inf_{n \geq 1} \sup_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon. \tag{14}$$

На підставі того, що оператор $\mathcal{D}$ є автономним [12,13], можна вважати, не порушуючи загальності, що виконується не тільки співвідношення (14), а і співвідношення

$$\inf_{n \geq 1} \max_{t \in [a-1, b+1] \cap \mathbb{N}} |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon. \tag{15}$$

Звідси та з визначення відображення $\mathcal{D}$ випливає, що послідовність (10) може бути вибрана так, що кожний член цієї послідовності є лінійною по t функцією на кожному відрізку $[m, m+1]$, $m \in \mathbb{Z}$. Тоді елементи множини $\{h_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ є рівномірно обмеженими і рівностепенево неперервними на $\mathbb{R}$. Завдяки ліпшицевості відображення $\mathcal{D}^{-1}$ аналогічним властивостям задовольняють і елементи множини $\{(\mathcal{D}^{-1}h_n)(t) : n \in \mathbb{N}\}$, тобто множини $\{x_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$. Тому на підставі теореми Арцела-Асколі [14] знайдуться функція $y \in C^0$ і послідовність натуральних чисел n_k, $k \geq 1$, для яких $x_{n_k} \overset{\text{лок., } C^0}{\longrightarrow} y$, $(k \to \infty)$. Звідси, з (12) і (13) отримуємо, що $\mathcal{D}y = h$. Ця рівність і рівність (11) суперечать ліпшицевій оборотності відображення $\mathcal{D}$, оскільки на підставі (15) $y \neq x$.

Лему 2 доведено. □

Зауваження 1. Очевидно, що твердження леми 2 зберігається, якщо простір C^0 замінити банаховим простором $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

і вважати, що відображення f діє із $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Зауваження 2. В загальному випадку навіть для лінійних оборотних c-неперервних відображень обернені відображення не завжди є c-неперервними (див. [15,16]).

5. Умови існування замкненого інтервалу, інваріантного по відношенню до суми неперервного відображення та деякого відображення зсуву.

Лема 3. *Нехай:*

1) $g(x)$ — неперервна на $\mathbb{R}$ функція;

2) $g(x) - x$ — строго спадна на $\mathbb{R}$ функція;

3) для деяких чисел $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ $(x^* < y^*)$ правильна рівність

$$g(x^*) - g(y^*) = y^* - x^*. \tag{16}$$

Тоді існують замкнений інтервал $[a,b] \subset [x^*, y^*]$ *і числа* $c \in \mathbb{R}$, $u, v \in [a,b]$ *(*$u \neq v$*) такі, що*

$$\{g(x) + c : x \in [a,b]\} \subset [a,b] \tag{17}$$

і

$$g(u) + c = v, \tag{18}$$
$$g(v) + c = u. \tag{19}$$

Доведення. Розглянемо множини

$$\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x),\ x^* \leq x \leq y^*\}$$

і

$$\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^* \leq x \leq y^*,\ g(x^*) \geq y \geq g(y^*)\}$$

(на підставі (16), множина $\mathcal{K}$ є квадратом).

Якщо $\mathcal{G} \setminus \mathcal{K} = \varnothing$, то співвідношення (17), (18) і (19) виконуються при $c = x^* - g(y^*)$, $u = x^*$ і $v = y^*$.

Нехай $\mathcal{G} \setminus \mathcal{K} \neq \varnothing$. Тоді

$$\max_{x^* \leq x \leq y^*} g(x) > y^* \tag{20}$$

або

$$\min_{x^* \leq x \leq y^*} g(x) < x^*. \tag{21}$$

Розглянемо випадок виконання співвідношення (20). Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\min_{x^* \leq x \leq y^*} g(x) = x^*$. Введемо в розгляд числа $M = \max_{x^* \leq x \leq y^*} g(x)$, $\omega = \min\{x : x \in [x^*, y^*],\ g(x) = M\}$ і функцію $k(x) = g(\omega) - (x - x^*)$. Функції $k(x)$ і $g(x)$ неперервні на $[x^*, y^*]$ і

$$k(x^*) - g(x^*) = g(\omega) - g(x^*) > 0,$$

$$k(\omega) - g(\omega) = g(\omega) - (\omega - x^*) - g(\omega) = x^* - \omega < 0,$$

$$k(y^*) - g(y^*) = g(\omega) - (y^* - x^*) - g(y^*) = g(\omega) - g(x^*) > 0.$$

Тому на підставі теореми Больцано-Коші (див. [17]) існують такі точки $x^{**} \in (x^*, \omega)$ і $y^{**} \in (\omega, y^*)$, що

$$k(x^{**}) = g(x^{**}), \tag{22}$$
$$k(y^{**}) = g(y^{**}), \tag{23}$$

при цьому для всіх $x \in (x^{**}, y^{**})$

$$g(x) > k(x). \tag{24}$$

Завдяки другій умові леми правильне включення

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = g(x),\ x^* \leq x \leq \omega\} \subset$$

$$\subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : g(x^*)+(x-x^*)\ge y\ge g(\omega)+(x-\omega),\ x^*\le x\le\omega\}.$$

Тому для всіх $x\in[x^*,y^{**}]$ $g(y^{**})\le g(x)\le M$, тобто для всіх $x\in[x^*,y^{**}]$ $g(\omega)-(y^{**}-x^*)\le g(x)\le g(\omega)$. Отже, для всіх $x\in[x^*,y^{**}]$

$$x^*\le g(x)+c\le y^{**}, \tag{25}$$

де $c=y^{**}-g(\omega)$.

Тому співвідношення (17) виконується при $a=x^*$, $b=y^{**}$ і $c=y^{**}-g(\omega)$.

Тепер доведемо виконання співвідношень (18) і (19). Неважко показати, використовуючи (22),(23) і (24), що неперервна на $[x^{**},\omega]$ функція $G(x)=g(x)+c$ задовольняє співвідношення $G(G(\omega))=G(b)=a<\omega$, $G(G(x^{**}))=G(b-(x^{**}-a))>x^{**}$. Тому на підставі теореми Больцано-Коші існує точка $u\in(x^{**},\omega)$, для якої

$$G(G(u))=u. \tag{26}$$

Розглянемо число $v=G(u)$. Справедливі включення $v\in[a,b]$ (на підставі (25)) і рівність

$$G(v)=u$$

(завдяки (26)), при цьому $u\ne v$, оскільки $G(u)>u$ (на підставі нерівності $g(\omega)+c>\omega$ та другої умови леми).

Отже, співвідношення (18) і (19) виконуються.

Тому твердження леми у випадку виконання співвідношення (20) доведено.

Випадок виконання співвідношення (21) зводиться до разглянутого випадку заміною функції $g(x)$ на функцію $-g(-x)$.

Лему 3 доведено. □

Для відображення $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ введемо в розгляд множину

$$\Gamma(f)\overset{\text{def}}{=}\overline{\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} : x\in\mathbb{R}, h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}}.$$

Зауваження 3. Твердження леми 3 зберігається, якщо другу умову леми замінити умовою:

$$1\notin\Gamma(g). \tag{27}$$

Справді, на підставі першої умови леми множина $\Gamma(g)$, очевидно, є зв'язною множиною. Тому згідно з третьою умовою леми, замкненістю множини $\Gamma(g)$ та (27) $(1-\varepsilon,+\infty)\cap\Gamma(g)=\varnothing$ для деякого числа $\varepsilon>0$, тобто $g(u)-g(v)/(u-v)\le 1-\varepsilon$, якщо $u,v\in\mathbb{R}$ і $u\ne v$. Отже, $\frac{(g(u)-u)-(g(v)-v)}{u-v}\le-\varepsilon$, якщо $u,v\in\mathbb{R}$ і $u\ne v$, що забезпечує виконання другої умови леми та справедливість сформульованого твердження.

6. Обгрунтування основних результатів.

Доведення теореми 1. Необхідність. Нехай відображення $\mathcal{D}\colon C^0\to C^0$ має обернене ліпшицеве відображення $\mathcal{D}^{-1}$. Покажемо, що для f виконується співвідношення (2) або (3).

Припустимо, що жодне з цих співвідношень не виконується. Тоді

$$1\in\Gamma(f) \tag{28}$$

або

$$1 \notin \Gamma(f) \text{ і } -1 \in \Gamma(f). \tag{29}$$

У випадку виконання співвідношення (28) існують послідовності u_n і v_n $(u_n < v_n)$, $n \geq 1$, що

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) - f(v_n)/(u_n - v_n) = 1.$$

Тому для елементів $x_n, y_n \in C^0$, $n \geq 1$, для яких $x_n(t) \equiv u_n$ і $y_n(t) \equiv v_n$, справджуються рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\mathcal{D}x_n - \mathcal{D}y_n\|_{C^0}}{\|x_n - y_n\|_{C^0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_n - f(u_n) - (v_n - f(v_n))|}{|u_n - v_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|1 - \frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n}\right| = 0,$$

що суперечить ліпшицевій оборотності відображення $\mathcal{D}^{-1}$.

У випадку виконання співвідношення (29) на підставі леми 1 та замкненості і зв'язності множини $\Gamma(f)$ існують ліпшицеве відображення $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та числа $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ $(x^* < y^*)$, для яких:

1) $g(x^*) - g(y^*) = y^* - x^*$;

2) $1 \notin \Gamma(g)$;

3) відображення $\mathcal{D}_1\colon C^0 \to C^0$, визначене рівністю

$$(\mathcal{D}_1 x)(t) = x(t+1) - g(x(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

має обернене ліпшицеве відображення $\mathcal{D}_1^{-1}$.

Згідно з лемою 3 та зауваженням 3 існують відрізок $[a,b] \subset [x^*, y^*]$ та числа $c \in \mathbb{R}$, $u, v \in [a,b]$ $(u \neq v)$, для яких

$$\{g(x) + c : x \in [a,b]\} \subset [a,b] \tag{30}$$

і

$$g(u) + c = v, \tag{31}$$

$$g(v) + c = u. \tag{32}$$

Завдяки неперервності $g(x)$ на $[a,b]$, співвідношенню (30) та теоремі Брауера про нерухому точку [18] знайдеться така точка $z^* \in [a,b]$, що $g(z^*) + c = z^*$. Розглянемо різницеве рівняння

$$x(t+1) = g(x(t)) + c + h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

де $h = h(t)$ — довільна неперервна на $\mathbb{R}$ функція, носій $\mathrm{supp}(h)$ якої розташований в проміжку $[0,\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ і $\{h(t) : t \in [0,\varepsilon]\} = [a - z^*; b - z^*]$. Визначимо розв'язок цього рівняння, звуження якого на інтервал $(-\infty, 1]$ збігається з z^*. Із обмежень на $h(t)$ випливає, що цей розв'язок має вигляд

$$y(t) = \begin{cases} z(t), & \text{якщо } t \in \Gamma\ , \\ z^*, & \text{якщо } t \in \mathbb{R} \setminus \Gamma, \end{cases}$$

де

$$\Gamma = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{t : k \leq t \leq k + \varepsilon\}$$

і $z(t)$ — така функція, що її множина значень міститься в $[a,b]$ і для деяких чисел $t_1,\ t_2 \in (1, 1+\varepsilon)$ виконуються співвідношення

$$z(t_1 + 2k) = u,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{34}$$

$$z(t_2 + 2k) = v,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{35}$$

Ці властивості розв'язку $y(t)$ рівняння (33) легко встановлюються за допомогою методу кроків з використанням співвідношень (30), (31) і (32).

Зауважимо, що на підставі оборотності відображення $\mathcal{D}_1$ функція $y(t)$ є єдиним розв'язком рівняння (33).

Розглянемо послідовність функцій $h_k(t) = h(t+k),\ y_k(t) = y(t+k) \in C^0,\ k \in \mathbb{N}$. Очевидно, що

$$h_k \overset{\text{лок.},\ C^0}{\longrightarrow} 0\ ,\ k \to \infty, {\mathcal{D}_1}^{-1} c = z^*, {\mathcal{D}_1}^{-1}(c + h_k) = y_k$$

і послідовність функцій $y_k(t),\ k \geq 1$, локально не прямує до z^* при $k \to \infty$ (завдяки співвідношенням (34) і (35)), що суперечить c-неперервності відображення ${\mathcal{D}_1}^{-1}$ (відображення ${\mathcal{D}_1}^{-1}$ є c-неперервним на підставі ліпшицевої оборотності відображення $\mathcal{D}_1$ та твердження леми 2).

Отже, для f виконується співвідношення (2) або (3).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай виконується співвідношення (2) або (3).

Покажемо спочатку, що відображення $\mathcal{D}$ має обернене відображення $\mathcal{D}^{-1}$.

Зафіксуємо довільну функцію $h \in C^0$ і розглянемо рівняння

$$x(t) = f(x(t-1)) + h(t-1),\ t \in \mathbb{R}, \tag{36}$$

$$x(t+1) = f(x(t)) + h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{37}$$

які, очевидно, еквівалентні.

Рівняння (36), а, отже, і рівняння (37) у випадку виконання співвідношення (2) має єдиний розв'язок $x \in C^0$, оскільки відображення $S\colon C^0 \to C^0$, визначене рівністю

$$(Sx)(t) = f(x(t-1)) + h(t-1),\ t \in \mathbb{R},$$

є відображенням стиску (на підставі (2)).

У випадку виконання співвідношення (3) рівняння (37) також має єдиний розв'язок $x \in C^0$, оскільки ліпшицеве відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має обернене відображення f^{-1} (для нього, очевидно, для всіх $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$),

$$|f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)| \leq \frac{1}{Q}|x_1 - x_2|, \tag{38}$$

рівняння (37) еквівалентне до рівняння

$$x(t) = f^{-1}(x(t+1) - h(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

і відображення

$$(S_1 x)(t) \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(x(t+1) - h(t)),\ t \in \mathbb{R},$$

на підставі (38) та (3) є відображенням стиску в просторі C^0.

Отже, завдяки довільності вибору $h \in C^0$ відображення $\mathcal{D}$ є оборотним.

Покажемо, що $\mathcal{D}^{-1}$ є ліпшицевим відображенням. Розглянемо довільні $h_1, h_2 \in C^0$. Нехай x_1 і x_2 — розв'язки рівняння (37) відповідно при $h = h_1$ і $h = h_2$, тобто $x_1(t+1) \equiv f(x_1(t)) + h_1(t)$ і $x_2(t+1) \equiv f(x_2(t)) + h_2(t)$. Звідси отримуємо, що у випадку виконання співвідношення (2)

$$|x_1(t+1) - x_2(t+1)| \leq q|x_1(t) - x_2(t)| + |h_1(t) - h_2(t)|, \ t \in \mathbb{R},$$

і, отже,

$$\|x_1 - x_2\|_{C^0} \leq q\|x_1 - x_2\|_{C^0} + \|h_1 - h_2\|_{c^0}, \tag{39}$$

а у випадку виконання співвідношення (3)

$$|x_1(t+1) - x_2(t+1)| \geq Q|x_1(t) - x_2(t)| - |h_1(t) - h_2(t)|, \ t \in \mathbb{R},$$

і тому

$$\|x_1 - x_2\|_{C^0} \geq Q\|x_1 - x_2\|_{C^0} - \|h_1 - h_2\|_{c^0}. \tag{40}$$

Із співвідношень (39) та (40) випливають відповідно співвідношення (4) та (6).

Отже, відображення $\mathcal{D}^{-1}$ є ліпшицевим відображенням, тобто достатність доведено.

Теорему 1 доведено. □

Доведення теореми 2. В завершальній частині доведення теореми 1 доведено, що співвідношення (4) і (6) виконуються. Співвідношення (5) і (7) випливають відповідно із (4) і (6), якщо h_1 і h_2 замінити відповідно на h і $-f(0)$ (тоді $\mathcal{D}^{-1}(-f(0)) = 0$).

Теорему 2 доведено. □

Зауваження 4. У випадку неліпшицевого відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ умови оборотності відображення $\mathcal{D}$ (в просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$) встановлені у статті [19].

ЛІТЕРАТУРА

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
2. Мартынюк Д. И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1972. – 246 с.
3. Курбатов В. Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.
4. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Вища школа, 1992. – 320 с.
5. Coffman S.V., Schäffer J.J. *Dichotomies for linear difference equations* // Math.Ann. – 1967. – V.172. – P.139–166.
6. Слюсарчук В. Е. *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем* // Укр. мат. журн. – 1983. – Т.35, №1. – С.109–115.
7. Слюсарчук В. Е. *Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbb{Z}$ функций* // Матем. заметки. – 1985. – Т.37, №5. – С.662–666.

8. Слюсарчук В. Е. *О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем* // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39, №2. – С. 210–215.

9. Слюсарчук В. Е. *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений* // Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39, №5. – С.660–662.

10. Слюсарчук В. Е. *Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов* // Матем. сб. – 1981. – Т.116(158), №4(12). – С.483–501.

11. Баскаков А. Г. *Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов* // Докл. РАН. – 1993. – Т.333, №3. – С.282–284.

12. Слюсарчук В. Е. *Обратимость почти периодических операторов, порожденных дискретными системами* // Укр. мат. журн. – 1979. – Т.31, №4. – С.460–463.

13. Слюсарчук В. Е. *К теории обратимости почти периодических операторов* // Матем. заметки. – 1987. – Т.42, №1. – С.50–59.

14. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: Изд. "Университетское", 1984. – 352 с.

15. Слюсарчук В. Е. *Ненаполненность подалгебры c-непрерывных операторов в алгебре* $L(L_p, L_p)$ *(*$1 \le p \le \infty$*)* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. К.: Ін-т математики НАН України. – 1995. – Вип.10. – С.229–231.

16. Слюсарчук В. Е. $\mathcal{P}$*-непрерывные операторы и их применение к решению задач математической физики* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. К.: Ін-т математики НАН України. – 1997. – Вип.15. – С.188–226.

17. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1966. – Т.1. – 608 с.

18. Постников М. М. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 480 с.

19. Слюсарчук В. Ю. *Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних різницевих відображень у просторі* $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ // Матем. студії. – 2000. – Т.13, №1. – С. 63–73.

Рівненський державний технічний університет

Надійшло 1.07.2000