УДК 517.95

Н. П. Процах

# МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДРУГОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

N. P. Protsakh. *The mixed problem for a nonlinear evolutionary equation with the second order time derivative in generalized Lebesgue spaces*, Matematychni Studii, **16** (2001) 157–168.

The existence and the uniqueness of a solution of the mixed problem for one nonlinear differential evolutionary equation with the second time derivative are studied. The problem is considered in generalized Lebesgue spaces.

Н. П. Процах. *Смешанная задача для нелинейного эволюционного уравнения со второй производной по времени в обобщенных пространствах Лебега* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.157–168.

Исследовано существование и единственность решения смешанной задачи для одного нелинейного дифференциального эволюционного уравнения со второй производной по времени. Задача рассматривается в обобщенных пространствах Лебега.

Мішані та крайові задачі для нелінійних рівнянь параболічного та гіперболічного типів розглянуто в працях [1–7]. Так, у працях [1–3] досліджено мішані задачі для еволюційних рівнянь та систем з другою похідною за часовою змінною. Знайдено умови, за яких розв'язок таких задач існує та єдиний. У роботах [4, 6] знайдено умови коректної розв'язності, а в [5] – оцінку розв'язку крайових задач для певних параболічних нелінійних рівнянь. Праці [8–11] містять результати дослідження мішаних задач та задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь в узагальнених просторах Лебега.

У цій праці в узагальнених просторах Лебега розглянуто мішану задачу для одного нелінійного еволюційного диференціального рівняння з другою похідною за часовою змінною. Зазначимо, що це рівняння містить, зокрема, як частковий випадок, деякі параболічні рівняння. Знайдено умови на коефіцієнти рівняння, за яких узагальнений розв'язок мішаної задачі існує та єдиний.

## 1. Формулювання задачі.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega \in C^{m_0}$; $Q = \Omega\times(0,T)$, $0 < T < +\infty$, $Q_{t_1t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\{t_1, t_2\} \subset [0, T]$, $t_1 < t_2$; $Q_\tau = Q_{0\tau}$; $\Omega_\tau = Q \cap \{t = \tau\}$; $S = \partial\Omega \times (0, T)$; $\{q, p\} \subset L^\infty(\overline{\Omega})$; $2 < p_1 = \operatorname{ess\,inf}_\Omega p(x) \le \operatorname{ess\,sup}_\Omega p(x) = p_2$; $2 < q_1 = \operatorname{ess\,inf}_\Omega q(x) \le \operatorname{ess\,sup}_\Omega q(x) = q_2$; $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$, $1/q(x) + 1/q'(x) = 1$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K55, 35K30.

Розглянемо простори $L^{p(x)}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ з нормами

$$\|v, L^{p(x)}(\Omega)\| = \inf\Big\{\lambda > 0 \ : \ \int\limits_{\Omega} |v|^{p(x)}/\lambda^{p(x)} dx \le 1\Big\}; \quad \|v, H^m(\Omega)\| = \Big(\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

відповідно. Через $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ позначимо замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ стосовно норми простору $H^m(\Omega)$. Для функцій $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$ виконуються такі оцінки Фрідріхса [12, с. 44]: $\int\limits_{\Omega_t} \sum\limits_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2\, dx \le \gamma_{k,j}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum\limits_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^2\, dx, \quad j = 0, ..., k$, для майже всіх $t \in (0, T)$. Позначимо через $\Gamma_k(t)$ суму $\sum_{j=1}^k \gamma_{k,j}(t)$.

В області $Q$ розглянемо мішану задачу для рівняння

$$\begin{gathered} u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) + \\ + \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x,t) D^\alpha u + \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha(x,t) D^\alpha u_t + g(x,t)|u_t|^{p(x)-2} u_t + e(x,t)|u|^{q(x)-2} u = \\ = \sum_{|\alpha|\le l_0} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t) \end{gathered} \tag{1}$$

з крайовими

$$D^\alpha u|_S = 0,\ |\alpha| \le \max\{l, m\} = m_0 \tag{2}$$

та початковими

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \tag{3}$$

умовами. Тут $l_0 < l$, $l \ge 1$, $m \ge 1$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

**(A)** $\{a_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta t}\} \subset L^\infty(Q)$, $|\alpha| = |\beta| \le m$, $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$, $(x,t) \in Q$;

$$a_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx \le \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta u\, dx \le a^0 \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dx,$$

для майже всіх $t \in (0, T)$ і будь-яких $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$, $a_0$ і $a^0$ — додатні сталі;

**(B)** $b_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$, $|\alpha| = |\beta| \le l$, $\int\limits_Q \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta u\, dx\, dt \ge b_0 \int\limits_Q \sum\limits_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\, dx dt$, для майже всіх $t \in (0, T)$ і будь-яких $u \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$, $b_0$ — додатна стала;

**(C)** $c_\alpha \in L^\infty(Q)$, $|\alpha| \le m$;

**(K)** $k_\alpha \in L^\infty(Q)$, $|\alpha| \le l$;

**(G)** $g \in L^\infty(Q)$, $g_0 < g(x,t) < g^0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $g_0$ і $g^0$ — додатні сталі;

**(E)** $e \in L^\infty(Q)$, $e_0 < e(x,t) < e^0$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $e_0$ і $e^0$ — додатні сталі;

**(F)** $\{f, f_t\} \subset L^2(Q), D^\alpha f(\cdot,0) \in L^2(\Omega_0)$, $|\alpha| \le l_0$, $u_1 \in H^{2l}(\Omega_0) \cap L^{2p(x)-2}(\Omega_0)$, $u_0 \in H^{2m}(\Omega_0) \cap L^{2q(x)-2}(\Omega_0)$.

**Означення.** Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) назвемо функцію $u \in L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)) \cap C(0,T;L^2(\Omega))$, $u_t \in (L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^{m_0}(\Omega)) \cap L^{p(x)}(Q) \cap$ $\cap C(0,T;L^2(\Omega))$, яка задовольняє рівняння

$$\int\limits_{\Omega_T} u_t v\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1(x) v\,dx + \int\limits_{Q} \Big[ -u_t v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha v + $$
$$+ \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t D^\alpha v + \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x,t) D^\alpha u v + \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha(x,t) D^\alpha u_t v +$$
$$+ g(x,t)|u_t|^{p(x)-2} u_t v + e(x,t)|u|^{q(x)-2} u v \Big] dx\,dt = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\le l_0} f_\alpha(x,t) D^\alpha v\,dx\,dt \qquad (4)$$

для довільної функції $v \in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega))$ та початкову умову $u(x,0) = u_0(x)$.

**Твердження 1.** *Для функцій $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ виконуються нерівності*

*1)* $\int_\Omega |f|^{p(x)}\,dx \le \|f;L^{p(x)}(\Omega)\|^s$, *де* $s = \begin{cases} p_1, & \text{якщо } \|f;L^{p(x)}(\Omega)\| \le 1, \\ p_2, & \text{якщо } \|f;L^{p(x)}(\Omega)\| > 1; \end{cases}$

*2)* $\|f;L^{p(x)}(\Omega)\| \le \left(\int_\Omega |f|^{p(x)}\,dx\right)^{1/s}$, *де* $s = \begin{cases} p_2, & \text{якщо } \|f;L^{p(x)}(\Omega)\| \le 1, \\ p_1, & \text{якщо } \|f;L^{p(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$

**Твердження 2.** *Для функцій $u \in L^{q(x)s(x)}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$ виконується нерівність* $\||u|^{q(x)};L^{s(x)}(\Omega)\| \le \|u;L^{q(x)s(x)}(\Omega)\|^{s_1}$, *де* $s_1 = \frac{s_3}{s_2}$;

$$s_2 = \begin{cases} \min\limits_{\Omega} s(x), & \text{якщо } \|u;L^{s(x)}(\Omega)\| \ge 1, \\ \max\limits_{\Omega} s(x), & \text{якщо } \|u;L^{s(x)}(\Omega)\| < 1; \end{cases}$$
$$s_3 = \begin{cases} \min\limits_{\Omega} q(x)s(x), & \text{якщо } \|u;L^{q(x)s(x)}(\Omega)\| \le 1, \\ \max\limits_{\Omega} q(x)s(x), & \text{якщо } \|u;L^{q(x)s(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases}$$

Доведення цих тверджень через їх очевидність опускаємо.

## 2. Існування розв'язку.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* **(A)**–**(F)**; $a_{\alpha\beta tt} \in L^\infty(Q)$, $D^\alpha a_{\alpha\beta}(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega_0)$, $|\alpha| = |\beta| \le m$; $b_{\alpha\beta t} \in L^\infty(Q)$, $D^\alpha b_{\alpha\beta}(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega)$, $|\alpha| = |\beta| \le l$; $c_{\alpha t} \in L^\infty(Q)$, $c_\alpha(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega_0)$, $|\alpha| \le m$; $k_{\alpha t} \in L^\infty(Q)$, $k_\alpha(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega_0)$, $|\alpha| \le l$; $g_t \in L^\infty(Q)$, $g(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega_0)$; $e_t \in L^\infty(Q)$, $e(\cdot,0) \in L^\infty(\Omega_0)$ *та одна з таких умов:*

1) $4p(x) - 2q(x) - p(x)q(x) > 0$ *і* $2 < q(x) < \frac{2(n-m)}{n-2m}$ *при* $n > 2m$ *та* $q_2 < +\infty$ *при* $n \le 2m$ *в* $\Omega$;
2) $2q(x)p(x) - 5p(x) + 2 > 0$ *і* $1 < \frac{2(q(x)-2)p(x)}{p(x)-2} \le \frac{2n}{n-2m}$, $2 < q(x) < \frac{2(n-m)}{n-2m}$, *якщо* $n > 2m$ *та* $q_2 < +\infty$, *якщо* $n \le 2m$.

*Тоді існує розв'язок задачі (1)–(3) такий, що* $u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

*Доведення.* Застосуємо метод Гальоркіна для доведення існування розв'язку задачі (1)–(3). Нехай $\{\varphi^j : j \geq 1\}$ — база простору $H^{2m_0}(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\cap L^{p(x)}(\Omega)\cap L^{q(x)}(\Omega)$, $u^j(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{j} c_{kj}(t)\varphi^k(x)$, де коефіцієнти $c_{kj}(t)$ є розв'язками задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega}\Big[u^j_{tt}\varphi^r + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j D^\alpha\varphi^r + \sum_{1\leq|\alpha|=|\beta|\leq l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j_t D^\alpha\varphi^r +$$
$$+\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^j\varphi^r + \sum_{|\alpha|\leq l} k_\alpha(x,t)D^\alpha u^j_t\varphi^r + g(x,t)|u^j_t|^{p(x)-2}u^j_t\varphi^r +$$
$$+e(x,t)|u^j|^{q(x)-2}u^j\varphi^r\Big]\,dx\,dt = \int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leq l_0} f_\alpha(x,t)D^\alpha\varphi^r\,dx, \tag{5}$$

$$u^j(0) = u^j_0,\ u^j_t(0) = u^j_1,\ 1\leq r\leq j, \tag{6}$$

$\{u^j_0 : j\geq 1\}$ — деяка збіжна в $H^{2m}(\Omega)\cap\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\cap L^{2q(x)-2}(\Omega)$ до $u_0$ послідовність елементів, $\{u^j_1 : j\geq 1\}$ — деяка збіжна в $H^{2l}(\Omega)\cap L^{2p(x)-2}(\Omega)$ до $u_1$ послідовність. Запишемо (5) у вигляді

$$\vec{c}_{jtt}(t)\int\limits_{\Omega}\vec{\varphi}\varphi^r\,dx = \int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leq l_0} f_\alpha(x,t)D^\alpha\varphi^r\,dx - \vec{c}_j(t)\bigg[\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta\vec{\varphi}D^\alpha\varphi^r +$$
$$+\sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x,t)D^\alpha\vec{\varphi}\varphi^r\bigg]\,dx - \vec{c}_{jt}(t)\bigg[\int\limits_{\Omega}\sum_{1\leq|\alpha|=|\beta|\leq l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta\vec{\varphi}D^\alpha\varphi^r +$$
$$+\sum_{|\alpha|\leq l} k_\alpha(x,t)D^\alpha\vec{\varphi}\varphi^r\bigg]\,dx - \int\limits_{\Omega}\bigg[g(x,t)\big|\vec{c}_{jt}(t)\vec{\varphi}\big|^{p(x)-2}\vec{c}_{jt}(t)\vec{\varphi}\varphi^r +$$
$$+e(x,t)\big|\vec{c}_j(t)\vec{\varphi}\big|^{q(x)-2}\vec{c}_j(t)\vec{\varphi}\varphi^r\bigg]\,dx$$

або $\vec{c}_{jtt} = \left[\int_\Omega \varphi^k\varphi^r\,dx\right]^{-1}\vec{G}_j(t,\vec{c}_j(t),\vec{c}_{jt}(t))$, де через $G_{jr}(t,\vec{c}_j(t),\vec{c}_{jt}(t))$ позначено праву частину попередньої рівності. Запишемо еквівалентну систему рівнянь

$$\vec{c}_{1jt}(t) = \vec{c}_{2j}(t);\qquad \vec{c}_{2jt}(t) = \left[\int_\Omega \varphi^k\varphi^r\,dx\right]^{-1}\vec{G}_j(t,\overline{c}_1(t),\overline{c}_2(t)).$$

За умов теореми 1 всі коефіцієнти рівняння (1) та їх похідні належать принаймні до простору $L^2(Q)$. Тому за лемою 1.2 [4, с.20] коефіцієнти належать до $C(0,T;L^2(Q))$. Тому функція $\vec{G}_j(t,\vec{y})$ є неперервною за $\vec{y}$ у просторі $\mathbb{R}^{2j+1}$ для майже всіх $t\in(0,T)$ і вимірною за $t$ при кожному фіксованому $\vec{y}$. Крім того, $|\vec{G}_j(t,\vec{y})|\leq\mu(t)$, де $\mu\in L^1(0,T)$ для всіх $\vec{y}:\ |\vec{y}|\leq r_0$. Отже, згідно з теоремою Каратеодорі [13, с.54] існує неперервно диференційовна на $[0,t_1]$, $t_1\leq T$ функція, яка є розв'язком задачі (5)–(6).

Домножимо (5) на $c_{kjt}(t)$, підсумуємо за $r$, зінтегруємо за $t$ від 0 до $\tau$, $0<\tau<t_1$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^j_{tt}u^j_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j D^\alpha u^j_t + \sum_{1\leq|\alpha|=|\beta|\leq l} b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j_t D^\alpha u^j_t +$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x,t)D^\alpha u^j u_t^j + \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j u_t^j + g(x,t)|u_t^j|^{p(x)} +$$

$$+e(x,t)|u^j|^{q(x)-2}u^j u_t^j\Big] \, dx\, dt = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le l_0} f_\alpha(x,t) D^\alpha u_t^j \, dx\, dt. \tag{7}$$

Перетворимо кожний доданок рівності (7), використавши умови теореми 1

$$\tau_1 = \int_{Q_\tau} u_{tt}^j u_t^j \, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |u_t^j|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} |u_1^j|^2\, dx;$$

$$\tau_2 = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^j D^\alpha u_t^j \, dx\, dt \ge -\frac{a_1}{2}\int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2\, dx\, dt +$$

$$+\frac{a_0}{2}\int_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2\, dx - \frac{a^0}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_0^j|^2\, dx;$$

$$\tau_3 = \int_{Q_\tau} \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t^j D^\alpha u_t^j\, dx\, dt \ge b_0 \int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2\, dx\, dt;$$

$$\tau_4 = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x,t) D^\alpha u^j u_t^j \, dx\, dt \le \int_{Q_\tau}\left[\frac{\Gamma_m c^0\delta_0}{2}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \frac{1}{2\delta_0}|u_t^j|^2\right] dx\, dt;$$

$$\tau_5 = \int_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha(x,t) D^\alpha u_t^j u_t^j\, dx\, dt \le \int_{Q_\tau}\left[\frac{\Gamma_l k^0\delta_1}{2}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + \frac{1}{2\delta_1}|u_t^j|^2\right] dx\, dt;$$

$$\tau_6 = \int_{Q_\tau} g(x,t)|u_t^j|^{p(x)}\, dx\, dt \ge g_0\int_{Q_\tau} |u_t^j|^{p(x)}\, dx\, dt;$$

$$\tau_7 = \int_{Q_\tau} e(x,t)|u^j|^{q(x)-2}u^j u_t^j\, dx\, dt = \int_{\Omega_\tau}\frac{1}{q(x)} e(x,\tau)|u^j|^{q(x)}\, dx -$$

$$-\int_{\Omega_0}\frac{1}{q(x)}e(x,0)|u_0^j|^{q(x)}\, dx - \int_{Q_\tau}\frac{1}{q(x)} e_t(x,t)|u^j|^{q(x)}\, dx\, dt \ge$$

$$\ge \frac{e_0}{q_2}\int_{\Omega_\tau}|u^j|^{q(x)}\, dx - \frac{e^0}{q_1}\int_{\Omega_0}|u_0^j|^{q(x)}\, dx - \frac{e^1}{q_1}\int_{Q_\tau}|u^j|^{q(x)}\, dx\, dt;$$

$$\tau_8 = \int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le l_0} f_\alpha(x,t) D^\alpha u_t^j\, dx\, dt \le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left[\sum_{|\alpha|\le l_0}\frac{|f_\alpha(x,t)|^2}{\delta_2} + \Gamma_l\delta_2\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2\right] dx\, dt,$$

де $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, а сталі $a_1$, $c^0$, $k^0$ залежать від функцій $a_{\alpha\beta}$, $c_\alpha$, $k_\alpha$ відповідно.

На підставі проведених оцінок з (7) отримаємо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau}\left(|u_t^j|^2 + a_0\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \frac{2e_0}{q_2}|u^j|^{q(x)}\right) dx + (2b_0 - \Gamma_l k^0\delta_1 - \Gamma_l\delta_2)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2\,dx\,dt+2g_0\int\limits_{Q_\tau}|u_t^j|^{p(x)}\,dx\,dt\le\int\limits_{Q_\tau}\left[\left(\frac{1}{\delta_0}+\frac{1}{\delta_1}\right)|u_t^j|^2+\left(a^1+\Gamma_m c^0\delta_0\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2+\frac{2e^1}{q_1}|u^j|^{q(x)}\right]dx\,dt+\frac{1}{\delta_2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le l_0}|f_\alpha(x,t)|^2\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}\left(|u_1^j|^2+a^0\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_0^j|^2+\frac{2e^0}{q_1}|u_0^j|^{q(x)}\right)dx. \tag{8}$$

Виберемо додатні числа $\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2$ так, щоб виконувалися нерівності:

$$2b_0-\Gamma_l k^0\delta_1-\Gamma_l\delta_2>0;\quad a^1+\Gamma_m c^0\delta_0>0.$$

Тоді згідно з лемою Гронуолла-Беллмана з нерівності (8) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left(|u_t^j|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2+|u^j|^{q(x)}\right)dx+\int\limits_{Q_\tau}\left(\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2+|u_t^j|^{p(x)}\right)dx\,dt\le$$

$$\le M_1\left[\int\limits_{Q}\sum_{|\alpha|\le l_0}|f_\alpha(x,t)|^2\,dx\,dt+\int\limits_{\Omega_0}\left(|u_1^j|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_0^j|^2+|u_0^j|^{q(x)}\right)dx\right]<M, \tag{9}$$

в якій сталі $M_1,\ M$ не залежать від $j$. З одержаної оцінки випливає, що розв'язок задачі Коші (5), (6) є визначеним на всьому проміжку $[0,T]$ і можемо прийняти $t_1=T$.

Домножимо рівняння (5) на $c_{rjtt}(0)$, підсумуємо за $r$ та розглянемо при $t=0$. Після цього легко отримати оцінку

$$\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^j(x,0)|^2\,dx\le M_2\int\limits_{\Omega_0}\left[\sum_{|\alpha|\le l_0}|D^\alpha f_\alpha(x,0|^2+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}|D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_0^j)|^2+\right.$$

$$+\sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l}|D^\alpha(b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_1^j)|^2+\sum_{|\alpha|\le m}|c_\alpha(x,t)D^\alpha u_0^j|^2+\sum_{|\alpha|\le l}|k_\alpha(x,t)D^\alpha u_1^j|^2+$$

$$\left.+g^2(x,t)|u_1^j|^{2p(x)-2}+e^2(x,t)|u_0^j|^{2q(x)-2}\right]dx\le M_3\int\limits_{\Omega_0}\left[\sum_{|\alpha|\le l_0}|D^\alpha f_\alpha(x,0)|^2+\right.$$

$$+\sum_{|\alpha|\le 2m}|D^\alpha u_0^j|^2+\sum_{1\le|\alpha|\le 2l}|D^\alpha u_1^j|^2+\sum_{|\alpha|\le m}|D^\alpha u_0^j|^2+\sum_{|\alpha|\le l}|D^\alpha u_1^j|^2+$$

$$\left.+|u_1^j|^{2p(x)-2}+|u_0^j|^{2q(x)-2}\right]dx\le M_4,$$

де стала $M_4$ не залежить від $j$. Отже,

$$\int\limits_{\Omega_0}|u_{tt}^j|^2\,dx<M_4. \tag{10}$$

Продиференціюємо (5) за $t$, домножимо на $c_{rj\ tt}(t)$, підсумуємо за $r$ від 1 до $j$ та зінтегруємо за $t$ від 0 до $\tau$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\left[u_{ttt}^j u_{tt}^j+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^j D^\alpha u_{tt}^j+\sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l}b_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_{tt}^j D^\alpha u_{tt}^j+\right.$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j u_{tt}^j + \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha(x,t)D^\alpha u_{tt}^j u_{tt}^j + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta u^j D^\alpha u_{tt}^j +$$
$$+\sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta u_t^j D^\alpha u_{tt}^j + \sum_{|\alpha|\le m} c_{\alpha t}(x,t)D^\alpha u^j u_{tt}^j + \sum_{|\alpha|\le l} k_{\alpha t}(x,t)D^\alpha u_t^j u_{tt}^j +$$
$$+g(x,t)(p(x)-1)|u_t^j|^{p(x)-2}(u_{tt}^j)^2 + g_t(x,t)|u_t^j|^{p(x)-2}u_t^j u_{tt}^j + e(x,t)(q(x)-1)\times$$
$$\times|u^j|^{q(x)-2}u_t^j u_{tt}^j + e_t(x,t)|u^j|^{q(x)-2}u^j u_{tt}^j - \sum_{|\alpha|\le l_0} f_{\alpha t}(x,t)D^\alpha u_{tt}^j\Bigg]\,dx\,dt = 0. \qquad (11)$$

Оцінки доданків 1–5, 14 подібні до оцінок $\tau_1-\tau_4$, $\tau_6$, $\tau_8$ з рівності (7), з урахуванням оцінки (10). Оцінимо інші доданки формули (11)

$$\tau_{6-9} = \int_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta u^j D^\alpha u_{tt}^j + \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta t}(x,t)D^\beta u_t^j D^\alpha u_{tt}^j +$$
$$+\sum_{|\alpha|\le m} c_{\alpha t}(x,t)D^\alpha u^j u_{tt}^j + \sum_{|\alpha|\le l} k_{\alpha t}(x,t)D^\alpha u_t^j u_{tt}^j\Bigg]\,dx\,dt \le \frac{\xi}{2}\int_{\Omega_\tau}\Bigg[\frac{a^1\Gamma_m}{\delta_4}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 +$$
$$+\delta_4\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_t^j|^2\Bigg]\,dx - \xi\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta t}(x,0)D^\beta u_0^j D^\alpha u_1^j\,dx + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\Bigg[\Gamma_m\Bigg(\frac{\xi a^2}{\delta_4} + \frac{c^1}{\delta_6} +$$
$$+\frac{(1-\xi)a^1}{\delta_4}\Bigg)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \xi(2a^1\Gamma_m+\delta_4)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_t^j|^2 + (\delta_4\Gamma_l(1-\xi) +$$
$$+\delta_5\Gamma_l)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_{tt}^j|^2 + \Bigg(\frac{b^1\Gamma_l}{\delta_5} + \frac{k^1\Gamma_l}{\delta_7}\Bigg)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + (\delta_6+\delta_7)|u_{tt}^j|^2\Bigg]\,dx\,dt;$$

$$\tau_{10,11} = \int_{Q_\tau}\Big[g(x,t)(p(x)-1)|u_t^j|^{p(x)-2}(u_{tt}^j)^2 + g_t(x,t)|u_t^j|^{p(x)-2}u_t^j u_{tt}^j\Big]\,dx\,dt \ge$$
$$\ge \frac{g_1}{p_2}\int_{\Omega_\tau}|u_t^j|^{p(x)}\,dx - \frac{g^1}{p_1}\int_{\Omega_0}|u_1^j|^{p(x)}\,dx - \int_{Q_\tau}\Bigg[\frac{g^2}{p_1}|u_t^j|^{p(x)} + g_0(p_2-1)|u_t^j|^{p(x)-2}(u_{tt}^j)^2\Bigg]\,dx\,dt;$$

$$\tau_{12} = \int_{Q_\tau} e(x,t)(q(x)-1)|u^j|^{q(x)-2}u_t^j u_{tt}^j\,dx\,dt \le (q^1-1)e^1\int_{Q_\tau}\Bigg[\frac{1}{2}|u_{tt}^j|^2 + \frac{1}{p_1}|u_t^j|^{p(x)} +$$
$$+\Bigg(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\Bigg)|u^j|^{\frac{2p(x)(q(x)-2)}{p(x)-2}}\Bigg]\,dx\,dt,$$

де $\delta_i>0$, $i\in\{4,5,6,7\}$. Тут $a^1 = \max\limits_{|\alpha|-|\beta|\le m}\sup\limits_Q|a_{\alpha\beta t}(x,t)|^2$, $a^2 = \max\limits_{|\alpha|-|\beta|\le m}\sup\limits_Q|a_{\alpha\beta tt}(x,t)|^2$, $k^1 = \max\limits_{|\alpha|\le l}\sup\limits_Q|k_{\alpha t}(x,t)|^2$, $b^1 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|\le l}\sup\limits_Q|b_{\alpha\beta t}(x,t)|^2$, $c^1 = \max\limits_{|\alpha|\le m}\sup\limits_Q|c_{\alpha t}(x,t)|^2$, $g_1 \le g_t(x,t)\le g^1$, для майже всіх $(x,t)\in Q$; $g^2 = |g_{tt}(x,t)|^2$. $\xi = \begin{cases}1, & \text{якщо } l<m\\ 0, & \text{якщо } l\ge m.\end{cases}$ Оцінимо

останній доданок

$$I=\int\limits_{Q_\tau}|u^j|^{\frac{2p(x)(q(x)-2)}{p(x)-2}}\,dx\,dt\le\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{1}{r'(x)}+\frac{|u^j|^{\frac{2p(x)(q(x)-2)}{p(x)-2}r(x)}}{r(x)}\right]dx\,dt\le$$

$$\le\int\limits_{Q_\tau}\max_{\Omega}\frac{1}{r(x)}|u^j|^{q(x)}\,dx\,dt+M_5,$$

за умови, що

$$4p(x)-2q(x)-p(x)q(x)>0, \tag{12}$$

де $r(x)=\frac{q(x)(p(x)-2)}{2p(x)(q(x)-2)}$. Якщо ж умова (12) не виконується, але $2q(x)p(x)-5p(x)+2>0$, то згідно з твердженням 1 існує таке число $s$, що

$$I=\int\limits_{Q_\tau}|u^j|^{\frac{2p(x)(q(x)-2)}{p(x)-2}}\,dx\,dt\le\int\limits_0^\tau\|u^j;\ L^{\frac{2(q(x)-2)p(x)}{p(x)-2}}(\Omega)\|^s\,dt.$$

За теоремою вкладення [11, с. 605]

$$\|u^j;\ L^{\frac{2(q(x)-2)p(x)}{p(x)-2}}(\Omega)\|^s\le\mu\|u^j;\ \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\|^s,$$

де, крім того, $1<\frac{2(q(x)-2)p(x)}{p(x)-2}<\frac{2n}{n-2m}$, якщо $n>2m$. Звідси
$\tau_{12}\le(q_2-1)e^1\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{1}{2}|u^j_{tt}|^2+\frac{1}{p_1}|u^j_t|^{p(x)}\right]dx\,dt+I_1,$ де

$$I_1=\begin{cases}\max\limits_{\Omega}\left[\frac{2p(x)(q(x)-2)}{q(x)(p(x)-2)}\right]\int\limits_{Q_\tau}|u^j|^{q(x)}\,dx\,dt+M_5, & \text{якщо } 4p(x)-2q(x)-p(x)q(x)>0;\\ \mu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)\int\limits_0^T\left(\int\limits_\Omega\sum\limits_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2\,dx\right)^{s/2}dt, & \text{якщо } 2q(x)p(x)-5p(x)+2>0.\end{cases}$$

Подібно, застосувавши твердження 1 та теорему вкладення, одержимо оцінку

$$\tau_{13}=\int\limits_{Q_\tau}e_t(x,t)|u^j|^{q(x)-2}u^ju^j_{tt}\,dx\,dt\le\frac{e^1\delta_8}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^j_{tt}|^2\,dx\,dt+\frac{e^1\mu}{2\delta_8}\int\limits_0^T\left(\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2\,dx\right)^{s_1/2}dt,$$

де $q(x)<\frac{2(n-m)}{n-2m}$, якщо $n>2m$, а $s_1$ — стала. На підставі проведених оцінок, з (11) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left(|u^j_{tt}|^2+(a_0-\delta_4\xi)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j_t|^2+\frac{2g_1}{p_2}|u^j_t|^{p(x)}\right)dx+\int\limits_{Q_\tau}\Big[(2b_0-\Gamma_l\delta_4(1-\xi)-$$

$$-\Gamma_l k^0\delta_1-\Gamma_l\delta_2-\Gamma_l\delta_5)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_{tt}^j|^2+g_0(p_2-1)|u_t^j|^{p(x)-2}|u_{tt}^j|^2\Big]\,dx\,dt\le$$

$$\le\int\limits_{Q_\tau}\Big[\Big(\frac{1}{\delta_0}+\frac{1}{\delta_1}+\delta_6+\delta_7+(q_2-1)e^1+e^1\delta_8\Big)|u_{tt}^j|^2+(a^1+\Gamma_m c^0\delta_0+\xi(2a^1\Gamma_m+\delta_4))\times$$

$$\times\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_t^j|^2+\Big(\frac{\Gamma_l b^1}{\delta_5}+\frac{\Gamma_l k^1}{\delta_7}\Big)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2\Big]\,dx\,dt+\xi\frac{a^1}{\delta_4}\Gamma_m\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\frac{2g^2}{p_1}+\frac{2e^1(q_2-1)}{p_1}\Big]|u_t^j|^{p(x)}\,dx\,dt+I_1+\frac{e^1\mu}{\delta_8}\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2\,dx\Big)^{s_1/2}dt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_{tt}^j|^2+a^0\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_1^j|^2+a^1\xi\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}D^\beta u_0^j D^\alpha u_1^j+\frac{2q^1}{p_1}|u_1^j|^{p(x)}\Big]\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big(\frac{\xi a^2\Gamma_m}{\delta_4}+\frac{(1-\xi)a^1\Gamma_m}{\delta_4}+\frac{c^1\Gamma_m}{\delta_6}\Big)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2\,dx\,dt+\frac{1}{\delta_2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le l_0}|f_{\alpha t}(x,t)|^2\,dx\,dt. \tag{13}$$

Виберемо додатні $\delta_i$ так, щоб виконувалися нерівності: $a_0-\delta_4\xi>0$, $2b_0-\Gamma_l\delta_4(1-\xi)-\Gamma_l k^0\delta_1-\Gamma_l\delta_2-\Gamma_l\delta_5>0$. На підставі (9) і леми Гронуолла-Беллмана з (13) випливатиме оцінка

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_{tt}^j|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u_t^j|^2+|u_t^j|^{p(x)}\Big]\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_{tt}^j|^2+|u_t^j|^{p(x)-2}|u_{tt}^j|^2\Big]\,dx\,dt\le M_6, \tag{14}$$

де $M_6$ не залежить від $j$.

З (9) та (14) випливатимуть такі збіжності підпослідовності послідовності $u^j$ (за якою збережемо те саме позначення):

$$\begin{aligned}
&u_t^j\to u_t &&-\ *\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega));\\
&u^j\to u &&-\ *\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega));\\
&u_t^j\to u_t &&-\ \text{слабко в } L^2(0,T;\ \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega));\\
&u^j\to u &&-\ *\text{-слабко в } L^\infty(0,T;\ L^{q(x)}(\Omega)),\\
&u_t^j\to u_t &&-\ \text{слабко в } L^{p(x)}(Q);\\
&u_{tt}^j\to u_{tt} &&-\ *\text{- слабко в } L^\infty(0,T;\ L^2(\Omega)),\\
&u_t^j\to u_t &&-\ *\text{- слабко в } L^\infty(0,T;\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega));\\
&u_t^j\to u_t &&-\ \text{слабко в } L^2(0,T;\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))
\end{aligned}\tag{15}$$

при $j\to\infty$. Із збіжностей (15) випливає, що $u_t^j\to u_t$ при $j\to\infty$ сильно в $L^2(\Omega)$ і майже всюди на $Q$. Тому за лемою 1.3 [4, с.25] $|u_t^j|^{p(x)-2}u_t^j\to|u_t|^{p(x)-2}u_t$ слабко в $L^{p'(x)}(\Omega)$, $|u^j|^{q(x)-2}u^j\to|u|^{q(x)-2}u$ слабко в $L^{q'(x)}(\Omega)$.

Доведемо, що $u$ — розв'язок задачі (1)-(3). З рівності (5) можна отримати рівність

$$\int\limits_{\Omega} u_t^j v^{j_0}\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1^j v^{j_0}\,dx + \int\limits_{Q} \Big[ -u_t^j v_t^{j_0} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^j D^\alpha v^{j_0} + \\ + \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t^j D^\alpha v^{j_0} + \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x,t) D^\alpha u^j v^{j_0} + \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha(x,t) D^\alpha u_t^j v^{j_0} + \\ + g(x,t)|u_t^j|^{p(x)-2} u_t^j v^{j_0} + e(x,t)|u^j|^{q(x)-2} u^j v^{j_0} \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q} \sum_{|\alpha|\le l_0} f_\alpha(x,t) D^\alpha v^{j_0}\,dx\,dt,$$

яка правильна для всіх $v^{j_0} = \sum_{k=0}^{j_0} c_{kj_0}(t)\varphi^k(x)$. Сукупність таких $v^{j_0}$ є щільною в $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\cap L^{p(x)}(\Omega)\cap L^{q(x)}(\Omega)$. У попередній тотожності перейдемо до границі при $j\to\infty$ за вибраною вище послідовністю. Отримаємо, що $u$ задовольняє (1). За лемою 1.2 [4, с. 19] $\{u,\,u_t\}\subset C(0,T;L^2(\Omega))$, оскільки $\{u,\,u_t,\,u_{tt}\}\subset L^2(Q)$. Отже, початкові умови також будуть виконуватися. Тому $u$ є розв'язком задачі (1)–(3). □

### 3. Єдиність розв'язку.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови* **(A)**–**(E)** *і, крім того* $2 < q(x) \le q_2$, *де* $q_2 = \frac{2(n-m+l)}{n-2m}$, *якщо* $n > 2m$, $n > 2l$; $q_2 < \frac{3n-2m}{n-2m}$, *якщо* $2l > n$, $2m < n$ *і* $q_2 < +\infty$ *в інших випадках. Тоді задача (1)–(3) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

*Доведення.* Нехай $u^1$, $u^2$ — два розв'язки задачі (1)–(3). Позначимо $u = u^1 - u^2$. Тоді $u$ задовольнятиме рівність

$$\int\limits_{\Omega_T} |u_t|^2\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[ -|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha u_t + \sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le l} b_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t D^\alpha u_t + \\ + \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(x,t) D^\alpha u u_t + \sum_{|\alpha|\le l} k_\alpha(x,t) D^\alpha u_t u_t + g(x,t)[|u_t^1|^{p(x)-2}u_t^1 - |u_t^2|^{p(x)-2}u_t^2] \times \\ \times [u_t^1 - u_t^2] + e(x,t)[|u^1|^{q(x)-2}u^1 - |u^2|^{q(x)-2}u^2][u_t^1 - u_t^2] \Big]\,dxdt = 0. \tag{16}$$

Оцінки перших п'яти доданків цієї рівності такі ж, як оцінки інтегралів $\tau_1,\ldots,\tau_5$. Крім того,

$$\int\limits_{Q_\tau} g(x,t)[|u_t^1|^{p(x)-2}u_t^1 - |u_t^2|^{p(x)-2}u_t^2][u_t^1 - u_t^2]\,dxdt \ge 0;$$

$$\int\limits_{Q_\tau} e(x,t)[|u^1|^{q(x)-2}u^1 - |u^2|^{q(x)-2}u^2][u_t^1 - u_t^2]\,dxdt \le \\ \le e^0(q_2-1)\int\limits_{Q_\tau} |u|(|u^1|^{q(x)-2} + |u^2|^{q(x)-2})|u_t|\,dxdt \le \\ \le e^0(q_2-1)r_p \int\limits_0^\tau \||u^1|^{q(x)-2} + |u^2|^{q(x)-2};\ L^{r_1}(\Omega)\| \cdot \|u;\ L^{r_2}(\Omega)\| \cdot \|u_t;\ L^{r_3}(\Omega)\|\,dt.$$

Нехай числа $r_1 > 1$, $r_2 > 1$, $r_3 > 1$ такі, що $1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3 = 1$. Якщо $n > 2m$, $n > 2l$ і $q_2 \le \frac{2(n-m+l)}{n-2m}$, то $r_1$, $r_2$, $r_3$ вибиратимемо з умов

$$1 < (q_2-2)r_1 \le \frac{2n}{n-2m};\ 1 < r_2 \le \frac{2n}{n-2m};\ 1 < r_3 \le \frac{2n}{n-2l}.$$

Якщо $2l > n$, $2m < n$ і $q_2 < \frac{3n-2m}{n-2m}$, то $r_1$, $r_2$, $r_3$ вибиратимемо з умов

$$1 < (q_2-2)r_1 \le \frac{2n}{n-2m};\quad 1 < r_2 \le \frac{2n}{n-2m}.$$

Якщо $2l < n$, $2m > n$, то $r_1$, $r_2$, $r_3$ вибиратимемо з умов

$$1 < (q_2-2)r_1 < +\infty;\quad 1 < r_2 < +\infty;\ r_1 > 1;\quad 1 < r_3 \le \frac{2n}{n-2l}.$$

У цьому та інших випадках $q_2$ може бути довільним числом.

За теоремою 2.8 [11], теоремами вкладення [12, с. 47] та твердженнями 1, 2 матимемо:

$$\||u^1|^{q(x)-2} + |u^2|^{q(x)-2};\ L^{r_1}(\Omega)\| \le \sum_{i=1}^{2} \||u^i|^{q(x)-2};\ L^{r_1}(\Omega)\| \le \sum_{i=1}^{2} \|u^i; L^{r_1(q(x)-2)}(\Omega)\|^s \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{2} \|u^i; L^{r_1(q_2-2)}(\Omega)\|^s \le \mu \sum_{i=1}^{2} \|u^i; \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\|^s \le M_7;$$
$$\|u;\ L^{r_2}(\Omega)\|^2 \le \mu \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\,dx; \qquad \|u_t;\ L^{r_3}(\Omega)\|^2 \le \mu \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2\,dx,$$

де $s$ — стала. Звідси

$$I \le M_7\mu \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{1}{b_0} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \frac{b_0}{4} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2\right] dx\,dt.$$

Тому з (16) так само, як з (7), одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left(|u_t^j|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + |u^j|^{q(x)}\right) dx + \int\limits_{Q_\tau} \left(\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2 + |u_t^j|^{p(x)}\right) dx\,dt \le 0,$$

з якої випливає, що $u = 0$. □

*Зауваження.* Зазначимо, що існування розв'язку одержано за додаткової умови $4p(x) - 2q(x) - p(x)q(x) > 0$ або $2q(x)p(x) - 5p(x) + 2 > 0$, яка не потрібна для доведення єдиності.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И. *Краевые задачи для некоторых классов уравнений 3 порядка* // Нелинейные граничные задачи. – 1990. – №2. – С.51–55.

2. Masayoshi Tsutsumi, Riichi Iino. *On the global solution of a certain nonlinear partial differential equation* // Proc. of the Japan Academy. – 1969. – V.45, №6. – P.466–469.

3. Хлуднев А. М. *О разрешимости начально-краевых задач для одной слабо нелинейной системы* // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т.14, №11. – С.2026–2037.

4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.,1972.

5. Суворов С. Г. *Нелинейные параболические уравнения в общих нецилиндричесих областях* // Нелинейные граничные задачи. – 1990. – №2. – С.109–113.

6. Скрыпнык И. В. *Поточечная оценка решений модельной нелинейной параболической задачи* // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – №3. – С.72–86.

7. Радченко И. В. *Об автомодельном решении одного нелинейного дифференциального уравнения и одной сингулярно возмущенной краевой задачи* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2000. – Т.40, №4. – С.579–589.

8. Бугрій О., Лавренюк С. *Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації* // Вісн. Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 2000. – Вип.56. – С.33–43.

9. Бокало М. М., Сікорський В. М. *Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації* // Вісн. Львів. ун-ту, серія мех.-мат. – 1998. – Вип.51. – С.85–98.

10. Самохин В. Н. *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации* // Дифференц. уравнения. - 1996. – Т.32, №5. – С.643–651.

11. Kováčik O., Rákosnik J. *On spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{k,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – V.41, №4. – P.592–618.

12. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

13. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– М., 1958.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

*Надійшло 12.12.2000*