УДК 517.54

М. Т. Бродович

УСЛОВИЕ ПОСТОЯНСТВА ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЕННОЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

M. T. Brodovych. *Condition of constancy of function defined in spatial domain*, Matematychni Studii, **16** (2001) 117–123.

Generalizing Yu. Trokhimchuk's theorem we prove that a function $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ on a domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ is constant provided that the directional derivatives of f with respect to four fixed vectors not lying in a half-space vanish at all points of $\mathcal{D}$.

М. Т. Бродович. *Условие постоянства функции, определенной в пространственной области* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.117–123.

Обобщая одну теорему Ю. Трохимчука, мы доказываем, что функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ постоянна в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ при условии, что все ее производные по направлениям четырех фиксированных векторов, не лежащих в одном полупространстве, равны нулю в $\mathcal{D}$.

В работе [1] Ю. Ю. Трохимчук для непрерывных функций $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, получил условия постоянства, т. е. условия того, что значения $f(x)$ во всех точках $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}$ одинаковы.

Ю. Ю. Трохимчук вводит следующее условие $\mathcal{K}_0$.

Определение. Функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, в точке $x \in \mathcal{D}$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}_0$, если для векторов некоторого базиса $e_1(x), e_2(x), \dots,$ $e_n(x)$ выполняются равенства

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda e_i(x)) - f(x)}{\lambda} = 0 \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Теорема Трохимчука. *Если непрерывная функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, удовлетворяет в каждой точке области $\mathcal{D}$, за исключением не более, чем счетного их множества, условию $\mathcal{K}_0$, то функция f постоянна в области $\mathcal{D}$.*

Определенное в работе [1] условие $\mathcal{K}_0$ напоминает известное условие $\mathcal{K}'''$ (а также $\mathcal{K}''$) Д. Е. Меньшова (см., например [2]), введенное им для случая гомеоморфизмов $f\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, где $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ — области в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 26B05.

Напомним, функция f в точке $z \in \mathcal{D}$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}'''$, если из этой точки исходят два неколлинеарных луча $t_i(z), i \in \{1, 2\}$, вдоль которых существует конечный предел

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0, \\ z+\Delta z \in \bigcup_{i=1}^{2} t_i(z)}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Д. Е. Меньшов доказал, что гомеоморфизмы $f\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, а Ю. Ю. Трохимчук, что непрерывные отображения $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющие в каждой точке области $\mathcal{D}$, за исключением не более, чем счетного их множества, условию $\mathcal{K}'''$ (или $\mathcal{K}''$, $\mathcal{K}'$), голоморфные функции. Автор в работах [3–5] распространяет теоремы Меньшова-Трохимчука о $\mathcal{K}''$, $\mathcal{K}'$ условиях на взаимно однозначные отображения $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, не предполагаемые априори непрерывными.

В предлагаемой работе доказана теорема о постоянстве функции $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ — область в пространстве $\mathbb{R}^3$, непрерывность которой не предполагается.

Теорема. *Пусть $\mathcal{D}$ — область в пространстве $\mathbb{R}^3$, а функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, в каждой точке $x \in D$ для единичных векторов e_1, e_2, e_3, e_4 фиксированного направления, не лежащих в одном полупространстве, удовлетворяет условию*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda e_i) - f(x)}{\lambda} = 0, \tag{2}$$

где $\lambda \geq 0$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда функция f постоянна в области $\mathcal{D}$.

Заметим, что в формулировке теоремы требование: в каждое открытое полупространство попадает хотя бы один вектор системы e_1, e_2, e_3, e_4, существенно. В противном случае отображение $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ могло бы быть разрывным, например:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x_1 > 0, \\ 0 & \text{для } x_1 \leq 0, \end{cases}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathcal{D} = \mathbb{R}^3$.

Доказательство сформулированой выше теоремы основывается на двух леммах.

Используя метод математической индукции, лемму 1 удобно доказать для функции $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ — область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Непрерывность функции f не предполагается.

Лемма 1. *Пусть функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ в каждой точке области $\mathcal{D}$ вдоль направлений фиксированного репера из n единичных векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ имеет нулевые производные. Тогда найдется открытое, всюду плотное в области $\mathcal{D}$ множество, в каждой компоненте которого функция f постоянна.*

Доказательство. Рассуждаем по индукции. Рассматриваем сечение области $\mathcal{D}$ подпространством $\mathcal{R}$, имеющим базис e_1, т.е. прямой. Пусть $\epsilon > 0$. Для каждой точки x рассматриваемого сечения и для некоторого натурального числа k справедливо неравенство

$$|f(x+\lambda e_1) - f(x)| \leq \epsilon\lambda, \tag{3}$$

где $0 < \lambda < \frac{1}{k}$.

Пусть интервал δ содержится в рассматриваемом сечении и множество δ_k состоит из точек интервала δ, для которых (3) выполняется для натурального числа k. Тогда справедливо равенство $\delta = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \delta_k$ и, поскольку интервал δ множество не первой категории, то найдется натуральное число k_0, такое, что множество δ_{k_0} всюду плотно на некотором интервале, $\delta_0 \subset \delta$, длины меньше, чем $\frac{1}{k_0}$. Пусть x_1, x_2 произвольные точки интервала δ_0, последовательности $\{x_1 + \lambda_p e_1\}, \{x_2 + \lambda'_p e_1\}$ состоят из точек множества $\delta_{k_0} \cap \delta_0, \lambda_p > 0, \lambda'_p > 0$, $p \subset \mathbb{N}$, и $\lambda_p \to 0, \lambda'_p \to 0$ при $p \to \infty$. В силу (3) верны следующие соотношения

$$\lim_{p\to\infty} f(x_1 + \lambda_p e_1) = f(x_1), \quad \lim_{p\to\infty} f(x_2 + \lambda'_p e_1) = f(x_2),$$
$$|f(x_1 + \lambda_p e_1) - f(x_2 + \lambda'_p e_1)| \le \epsilon |x_1 - x_2 + (\lambda_p - \lambda'_p) e_1|.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $p \to \infty$, получим

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \epsilon |x_1 - x_2|. \tag{4}$$

Убедимся, что функция f постоянна на интервале δ_0. Для этого удобно представить точки x из δ_0 в виде $x = x_0 + \lambda e_1, \lambda \in (a, b), x_0 \in \delta$, тогда $f(x) = f(x_0 + \lambda e_1) = \varphi(\lambda)$. Поскольку для произвольных λ_1, λ_2 из (a, b) справедливо:

$$|\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)| = |f(x_0 + \lambda_1 e_1) - f(x_0 + \lambda_2 e_1)| < \epsilon_1 |\lambda_1 - \lambda_2|,$$

то функция $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица, и, так как

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = 0$$

для произвольного $\lambda_0 \in (a, b)$, то функция φ в точке λ_0 обладает нулевой правой производной. Поскольку, функция $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, то она почти всюду дифференцируемая, ее призводная почти всюду на интервале (a, b) равна нулю. Следовательно, функция φ постоянна на интервале (a, b), а вместе с ней на интервале δ_0 постоянна функция f.

Рассмотрим сечение области $\mathcal{D}$ подпространством $\mathbb{R}^k$ $(k < n)$, для которого векторы $e_1, e_2, ..., e_k$ составляют базис. Допустим, что справедливо утверждение: на таком сечении найдется открытое всюду плотное на нем множество, в каждом компоненте которого функция f постоянна. Докажем справедливость сформулированного утверждения для сечений области $\mathcal{D}$ подпространствами $\mathbb{R}^{k+1}$, имеющими базис $e_1, e_2, ..., e_{k+1}$.

Для множеств A и B, где A множество на сечении области $\mathcal{D}$ подпространством $\mathbb{R}^k$, B — множество действительных чисел, обозначим через $A \times B$ множество, состоящее из точек подпространства $\mathbb{R}^{k+1}$ вида $x + \lambda e_{k+1}$, где $x \in A, \lambda \in B$. Пусть $\mathcal{U} \times (a, b)$ открытое множество сечения области $\mathcal{D}$ подпространством $\mathbb{R}^{k+1}$, где $\mathcal{U}$ — некоторая открытая окресность в сечении области $\mathcal{D}$ подпространством $\mathbb{R}^k$. Пусть система открытых окресностей $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — база топологии в окрестности $\mathcal{U}$. Для $\lambda \in (a, b)$ обозначим через $\mathcal{U}^\lambda$ сечение множества $\mathcal{U} \times (a, b)$, состоящее из точек $x + \lambda e_{k+1}$, где $x \in \mathcal{U}$; как сечения множеств $\mathcal{U}_n \times (a, b), n \in \mathbb{N}$, определяем окресности $\mathcal{U}_n^\lambda$ базы топологии на сечении $\mathcal{U}^\lambda$. Согласно допущению на каждом сечении $\mathcal{U}^\lambda$, $\lambda \in (a, b)$, найдется открытое всюду плотное на нем множество, в каждой компоненте которого функция

f постоянна. Пусть B_n множество тех λ из (a,b) , для которых функция f постоянна на окресности $\mathcal{U}_n^\lambda$. Очевидно, $(a,b)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ и найдется натуральное число n_0 такое, что множество B_{n_0} всюду плотно на некотором интервале $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$. Из доказанного выше для сечения области $\mathcal{D}$ прямыми следует, что на сечении множества $\mathcal{U}_{n_0}\times(\alpha,\beta)$ прямой $x=x_0+\lambda e_{k+1}$, где x_0 некоторая точка из $\mathcal{U}_{n_0}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, найдется интервал $\{x_0\}\times(\alpha',\beta'),(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$, на котором функция f постоянна. Следовательно, функция f постоянна на множестве $\mathcal{U}_{n_0}\times((\alpha',\beta')\cap B_{n_0})$. Поскольку функция f имеет нулевую производную вдоль направления e_{k+1}, то она постоянна на открытом множестве $\mathcal{U}_{n_0}\times(\alpha',\beta')\subset\mathcal{U}\times(a,b)\subset\mathcal{D}$. Лемма 1 доказана. □

Далее вернемся к рассмотрению функции $f\colon\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ — область пространства $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathcal{G}$ множество точек области $\mathcal{D}$, для каждой из которых найдется окресность, в которой функция f постоянна; пусть $\mathcal{G}_k, k\in\{1,2,...\}$, компоненты открытого множества $\mathcal{G}$ и для $x\in\mathcal{G}_k$ пусть $f(x)=y_k$. Согласно лемме 1 замкнутое множество $\beta=\mathcal{D}\setminus\bigcup_k\mathcal{G}_k$ нигде не плотно в области $\mathcal{D}$ и в силу (2) множество β совершенно в области $\mathcal{D}$. Предположим, что выполняется условие $\beta\neq\varnothing$.

Лемма 2. *В области $\mathcal{D}$ найдется такой открытый шар d ,что $d\cap\beta\neq\varnothing$ и на множестве $\alpha\cap\{\bigcup_k\mathcal{G}_k\}$ функция f удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Согласно условию (2), для наперед заданного произвольного числа $\epsilon>0$ можно представить множество β в виде суммы $\beta=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\beta_n$, где β_n — множество тех точек x множества β , для которых справедливы неравенства

$$|f(x+\lambda e_i)-f(x)|\leq\epsilon\lambda,\quad 0<\lambda<\frac{1}{n},\ i\in\{1,2,3,4\}. \tag{5}$$

Поскольку совершенное множество β не является суммой нигде не плотных на множестве β множеств, то найдется натуральное число n_0 такое, что множество β_{n_0} всюду плотно на некоторой порции β_0, определяемой открытым шаром d_0 $(\beta_0=\beta\cap d_0)$. Пусть $\beta'=\beta_{n_0}\cap\beta_0, r_0<\frac{1}{n_0}$ и диаметр шара d_0 меньше чем r_0.

Сохраним для компонент открытого множества $\{\bigcup_k\mathcal{G}\}\cap d_0$ обозначения $\mathcal{G}_k$. Убедимся, что на границе $\partial\mathcal{G}_k$ области $\mathcal{G}_k$ $(k=1,2,...)$ находится всюду плотное множество точек, достижимых шаром из области $\mathcal{G}_k$, т.е. точек x множества $\partial\mathcal{G}_k$, для которых найдется открытый шар, содержащийся в области $\mathcal{G}_k$, с точкой x на границе. Действительно, в произвольном открытом шаре $C(x_0,r)$ с центром в точке $x_0\in\partial\mathcal{G}_k$ радиуса r, найдется шар $C(x_1,r_1)$ с центром в точке x_1 радиуса r_1, такой, что $C(x_1,r_1)\subset\mathcal{G}_k\cap C(x_0,r)$. Нетрудно видеть, что на отрезке x_1x_0 , соединяющим точки x_1 и x_0 найдется точка $\overline{x}$ такая, что $C(\overline{x},r_1)\subset\mathcal{G}_k\cap C(x_0,r)$ и пересечение $\overline{C(\overline{x},r_1)}\cap\partial\mathcal{G}_k$ содержит хотя бы одну искомую достижимую точку границы $\partial\mathcal{G}$. Предположим, что точка x множества $\partial\mathcal{G}_k\cap d_0$ достижима шаром, пусть $C(x_1,r_1)$ из области $\mathcal{G}_k$. Поскольку $\partial\mathcal{G}_k\cap d_0\subset\beta_0$, то $x\in\beta_0$. Согласно условию теоремы найдется такой вектор $e_i,i\in\{1,2,3,4\}$, что для некоторого λ_0, точки $x+\lambda e_i,\lambda\in(0,\lambda_0]$ попадают в шар $C(x_1,r_1)$. Поэтому, в силу (2) получаем равенство $f(x)=y_k$. Из определения множества β' и условия (5) вытекает, что в точке x функция f непрерывна относительно множества β' и $\lim\limits_{x'\to x,x'\in\beta'}f(x')=y_k$.

Покажем, что найдется угол α меньший чем $\frac{\pi}{2}$, что для любого единичного вектора e для одного из векторов $e_i,i\in\{1,2,3,4\}$, предположим вектора e_{i_0}, выполняется условие $\widehat{e_{i_0}e}<\alpha<\alpha'<\frac{\pi}{2}$ ($\widehat{e_{i_0}e}$ — угол между векторами e_{i_0} и e). Очевидно вектор e можно рассматривать как точку на единичной сфере $\partial C(0,1)$ с центром в начале координат. Пусть для $e \in \partial C(0,1)$ определена функция $\phi(e) = \widehat{ee_i}$, где e_i тот из векторов $e_i, i \in \{1,2,3,4\}$, для которого этот угол наименьший. Нетрудно видеть, что функция ϕ непрерывна на сфере $\partial C(0,1)$. Согласно теореме о достижении непрерывной функцией своего наибольшего и наименьшего значений найдется такой вектор e_0, что $\max\limits_{e\in\partial C(0,1)} \phi(e) = \phi(e_0) = \widehat{e_0e_i}$, где i определено выше. В силу определения системы векторов $e_i, i \in \{1,2,3,4\}$, угол $\widehat{e_0e_i} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и для $e \in \partial C(0,1)$ справедливо требуемое неравенство $\phi(e) < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Пусть шар d содержится в шаре d_0, $d \cap \beta_0 \neq \varnothing$ и расстояние $\rho(d, \partial d_0)$ больше диаметра шара d $\quad(\rho(d,\partial d_0) > \operatorname{diam} d)$. Для такого шара d для произвольных точек $x_0, \tilde{x}$ множества $d \cap \{\bigcup_k \mathcal{G}_k\}$ все построенные ниже точки и окрестности находятся в шаре d_0. Пусть $x_0 \in \mathcal{G}_{k_0}, \tilde{x} \in \mathcal{G}_{\tilde{k}}, f(x_0) \neq f(\tilde{x}), |x_0 - \tilde{x}| = h$, где $|x_0 - \tilde{x}|$ — расстояние между точками $x_0 = \{x_{01}, x_{02}, x_{03}\}, \tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\}$, т.е. $|x_0 - \tilde{x}| = \sum_{i=1}^{3} (x_{0i} - \tilde{x}_i)^2 = \rho(x_0, \tilde{x})$. На границе области $\mathcal{G}_{k_0}$ найдется точка x' , для которой выполняется равенство $\rho(\tilde{x}, x') = \rho(\tilde{x}, \overline{\mathcal{G}_{k_0}})$. Обозначим через $t_i(x)$ — систему лучей, исходящих из точки x, коллинеарных векторам $e_i, i \in \{1,2,3,4\}$. Пусть $x'\tilde{x}$ — отрезок, соединяющий точки x' и $\tilde{x}$. Согласно доказанному выше для отрезка $x'\tilde{x}$ найдется луч $t_{i_0}(x'), i_0 \in \{1,2,3,4\}$ для которого справедливо неравенство $[t_{i_0}\widehat{(x')\ x'}\tilde{x}] < \alpha$ ($[t_{i_0}\widehat{(x')\ x'}\tilde{x}]$ — меньший угол между лучом $t_{i_0}(x')$ и отрезком $x'\tilde{x}$). Убедимся, что в достаточно малой окрестности точки x' содержится подмножество $\tilde{\beta}$ множества β' такое, что для $x \in \tilde{\beta}$ лучи $t_{i_0}(x)$ образуют всюду плотное множество в некотором цилиндре и выполняются неравенства

$$|x - \tilde{x}| < h, \quad [t_{i_0}\widehat{(x)\ x}\tilde{x}] < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad |f(x) - y_{k_0}| < \epsilon h, \tag{6}$$

где число ϵ то же, что в неравенствах (5).

Действительно, пусть $C(x', r)$ — такая достаточно малая окресность точки x', что для точек $x \in C(x', r)$ выполняется первое и второе неравенство (6), S — шар, содержащийся во множестве $\mathcal{G}_{k_0} \cap C(x', r)$. Лучи $t_{i_0}(x)$ для $x \in S$ образуют некоторый цилиндр P. В достаточно малой окрестности $C(x', r)$ в конусе с вершиной в точке x' и осью $x'\tilde{x}$, угол осевого сечения которого больше 2α , нет точек замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_{k_0}$ (точка x' самая близкая к точке $\tilde{x}$ точка множества $\overline{\mathcal{G}}_{k_0}$). Пусть расстояние $\rho(x', S)$ и диаметр шара S настолько малы, что лучи $t_{i_0}(x), x \in S$, пересекают поверхность построенного конуса внутри окресности $C(x', r)$, и отрезки этих лучей $t_{i_0}(x)$ внутри шара $C(x', r)$ соединяют точки шара $S \subset \mathcal{G}_{k_0}$, и точки, лежащие вне замкнутой области $\overline{\mathcal{G}}_{k_0}$. Поэтому цилиндр P высекает некоторую порцию γ множества $\partial\mathcal{G}_{k_0}$ и справедливо включение $\gamma \subset C(x', r)$. Обозначим через γ' всюду плотное на множестве γ множество точек , достижимых шаром из области $\mathcal{G}_{k_0}$. Лучи $t_{i_0}(x)$ для $x \in \gamma'$ образуют всюду плотное множество в цилиндре P. Так как функция f непрерывна в точках множества γ' относительно множества β' , то в любой окрестности каждой точки множества γ' найдутся точки множества β' , для которых справедливы все три неравенства (6). Из совокупности указанных точек x множества β' состоит множество $\tilde{\beta}$. Поскольку $\gamma' \subset \gamma \subset C(x', r)$, можем полагать, что $\tilde{\beta} \subset C(x', r)$.

Проведем через точку $\tilde{x}$ плоскость, ортогональную лучу $t_{i_0}(x'); x''$ — точка пересечения луча $t_{i_0}(x')$ и этой плоскости, $C(x'', r)$ — окрестность точки x''; полагаем, что $C(x', r) \cap C(x'', r) = \varnothing$. Цилиндр P пересекает окрестность $C(x'', r)$. Поскольку лучи $t_{i_0}(x), x \in \tilde{\beta}$ образуют всюду плотное множество в цилиндре P, открытое множество $\bigcup_k \mathcal{G}_k$ всюду плотное в шаре d_0, то найдутся некоторая область $\mathcal{G}_{k_1}$, луч $t_{i_0}(x)$, где $x \in \tilde{\beta}$ и точка x_1, такие, что $x_1 \in t_{i_0}(x) \cap \mathcal{G}_{k_1} \cup C(x'', r)$. В силу малости окрестностей

$C(x',r), C(x'',r)$ справедливы неравенства $|x-x_1| < |x'-\tilde{x}| < h$ и $|x_1-\tilde{x}| < h\sin\alpha'$ ($|x"-\tilde{x}| < h\sin\alpha$). Так как диаметр шара d_0 меньше чем r_0, согласно определению множеств $\tilde{\beta}$ и β' , условию (5), получаем неравенство $|f(x_1)-f(x)| < \epsilon|x_1-x| < \epsilon h$. Для точки x , поскольку $x\in\tilde{\beta}$, справедливо третье неравенство (6), поэтому приходим к неравенству $|f(x_1)-y_{k_0}| < 2\epsilon h$.

Следовательно, для точек $x_0\in\mathcal{G}_{k_0}, \tilde{x}\in\mathcal{G}_{\tilde{k}}$, для которых $|x_0-\tilde{x}| = h$, построена точка $x_1\in\mathcal{G}_{k_1}$, для которой выполняются неравенства $|x_1-\tilde{x}| < h\sin\alpha', |f(x_1)-f(x_0)| < 2\epsilon h$ ($f(x_0) = y_{k_0}$)). Таким же образом, последовательно для каждого $i\in\{1,2,...\}$ для точек $x_i\in\mathcal{G}_{k_i}$ и $\tilde{x}\in\mathcal{G}_{\tilde{k}}$ строится точка x_{i+1} некоторой области $\mathcal{G}_{k_{i+1}}$. Для точек $x_i, i\in\{1,2,...\}$, справедливы неравенства

$$|x_i-\tilde{x}| < h(\sin\alpha')^i, \quad |f(x_i)-f(x_{i-1})| < 2\epsilon h(\sin\alpha')^{i-1}. \tag{7}$$

Из первого неравенства (7) легко видеть, что начиная с некоторого i точки x_i попадают в область $\mathcal{G}_{\tilde{k}}$; пусть x_{i_0} — первая такая точка; $f(x_{i_0}) = f(\tilde{x})$. Из второго неравенства (7) получаем

$$|f(\tilde{x})-f(x_0)| \le \sum_{i=1}^{i_0}|f(x_i)-f(x_{i-1})| < 2\epsilon h\sum_{i=0}^{i_0-1}(\sin\alpha')^i < 2\epsilon h\frac{1}{1-\sin\alpha'} = L|\tilde{x}-x_0|,$$

где $L = 2\epsilon/(1-\sin\alpha')$

Лемма 2 доказана. □

Доказательство теоремы. В силу лемм 1, 2 для каждой точки $x\in\beta\cap d$ существует конечный предел $\lim\limits_{x'\to x, x'\in\mathcal{G}} f(x')$ ($\mathcal{G} = \bigcup_k \mathcal{G}_k$) и в шаре d можно определить функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } x\in\mathcal{G}\cap d, \\ \lim\limits_{\substack{x'\to x \\ x'\in\mathcal{G}}} f(x') & \text{для } x\in\beta\cap d. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функция ψ непрерывна в шаре d и удовлетворяет в нем условию Липшица.

Пусть $\mathcal{U}\times(a,b)$ открытый параллелепипед в шаре d, где $\mathcal{U}$ — открытый параллелограмм, стороны которого параллельны векторам e_1, e_2; параллелепипед $\mathcal{U}\times(a,b)$ состоит из точек вида $x+\lambda e_3$, где $x\in\mathcal{U}, \lambda\in(a,b)$. Предполагаем, что $\beta\bigcap\{\mathcal{U}\times(a,b)\}\ne\varnothing$. Для $\lambda\in(a,b)$ обозначим через $\mathcal{U}^\lambda$ сечение параллелепипеда $\mathcal{U}\times(a,b)$, состоящее из точек $x+\lambda e_3, x\in\mathcal{U}$. Согласно определению множества $\mathcal{G}$ и лемме 1 множество $\mathcal{G}\cap\{\mathcal{U}\times(a,b)\}$ всюду плотно в параллелепипеде $\mathcal{U}\times(a,b)$. Рассуждая от противного нетрудно убедиться, что в параллелепипеде $\mathcal{U}\times(a,b)$ найдется всюду плотное множество сечений $\mathcal{U}^\lambda$, на которых множество $\mathcal{G}$ всюду плотно. Действительно, пусть для некоторого интервала $(\alpha,\beta), (\alpha,\beta)\subset(a,b)$, для $\lambda\in(\alpha,\beta)$ множество $\mathcal{G}$ не всюду плотно на сечении $\mathcal{U}^\lambda$. Как и при доказательстве леммы 1 обозначим через $\mathcal{U}_n, n\in\mathbb{N}$, открытую базу топологии в параллелограме $\mathcal{U}$, для $\lambda\in(a,b)$ через $\mathcal{U}_n^\lambda$ — множество, состоящее из точек $x+\lambda e_3$, где $x\in\mathcal{U}_n$; совокупность окресностей $\mathcal{U}_n^\lambda, n\in\mathbb{N}$, образует базу топологии на сечении $\mathcal{U}^\lambda$. Тогда, если B_n состоит из тех λ из интервала (α,β), для которых $\mathcal{U}_n^\lambda\cap\mathcal{G} = \varnothing$, то $(\alpha,\beta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ и на некотором интервале $(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$ некоторое множество B_{n_0} всюду плотно. Множество $\mathcal{U}_{n_0}^\lambda\times(B_{n_0}\cap(\alpha',\beta'))$ не пересекает множество $\mathcal{G}$, что противоречит определению множества $\mathcal{G}$ и лемме 1.

Подобным образом как и выше получаем, что, если на сечении $\mathcal{U}^\lambda$ множество $\mathcal{G}$ всюду плотно, то на всюду плотном множестве сечений параллелограмма $\mathcal{U}^\lambda$, параллельных, например вектору e_1, множество $\mathcal{G}$ всюду плотно. На каждом таком сечении рассматриваемого параллелограмма $\mathcal{U}^\lambda$ непрерывная функция ψ и непрерывная вдоль лучей $t_1(x)$ функция f совпадают. Поскольку функция f также непрерывна вдоль лучей $t_2(x)$, то функции f и ψ совпадают на каждом сечении параллелограмма $\mathcal{U}^\lambda$, параллельном вектору e_2, т. е. на параллелограмме $\mathcal{U}^\lambda$. Так как таких сечений $\mathcal{U}^\lambda$, на которых совпадают функции f и ψ, всюду плотное множество в параллелепипеде $\mathcal{U} \times (a, b)$ и функция f непрерывна вдоль лучей $t_3(x)$, то в параллелепипеде $\mathcal{U} \times (a, b)$ функция f совпадает с удовлетворяющей в нем условию Липшица функцией f. Поэтому функция f, удовлетворяющая также условию (2), постоянна на всех сечениях параллелепипеда $\mathcal{U} \times (a, b)$, параллельных векторам e_1, e_2, e_3 и, легко видеть, постоянна в параллелепипеде $\mathcal{U} \times (a, b)$, т.е. $\mathcal{U} \times (a, b) \subset \mathcal{G}$. Полученное включение противоречит условию $\beta \cap \{\mathcal{U} \times (a, b)\} \neq \varnothing$. Следовательно, предположение, что $\beta \neq \varnothing$ невозможно. Поэтому $\beta = \varnothing$ и функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ постоянна. Теорема доказана. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Трохимчук Ю. Ю. *О производных по направлению функций многих переменных* // Укр. мат. журн. – 1965. – Т.17, №6. – С.64–79.

2. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображния и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.

3. Бродович М. Т. *Об условиях моногенности не непрерывных отображений* // Теория функций, функц. анализ и их прил., Харьков, 1970. – Вып.12. – С.94–103.

4. Бродович М. Т. *Достаточное условие голоморфности произвольного отображения, сохраняющего углы* // ред. Сиб. мат. журн. М., 1983. Деп. в ВИНИТИ 02.09.83, №4935-83 (Реф. Сиб. мат. журн. 1984, Т.1. – С.210–211).

5. Бродович М. Т. *О голоморфности произвольного неограниченного отображения плоской области в плоскость, сохраняющего углы вдоль системы лучей* // Сиб. мат. журн. – 1991. – Т.32, №1. – С.28–36.

Национальный университет ”Львовская политехника”

Поступило 2.04.1998
После переработки 21.10.1999
После переработки 19.06.2000