УДК 512.552.12

Б. В. Забавський

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД ПРАВИМИ КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ СКІНЧЕННОГО СТАБІЛЬНОГО РАНГУ

Zabavskyi B. V. *Reduction of matrices over right Bezout rings with finite stable rank*, Matematychni Studii, **16** (2001) 115–116.

It is proved that over a right Bezout ring of stable rank not exceeding n any unimodular string of length $\geq n+1$ possesses a diagonal reduction.

Забавский Б. В. *Редукция матриц над правыми кольцами Безу конечного стабильного ранга* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.115–116.

Доказано, что произвольная унимодулярная строка длины не менее $n+1$ обладает диагональной редукцией над правым кольцом Безу стабильного ранга не больше n.

Поняття стабільного рангу кільця, введене Х. Бассом, виявилося корисним при розгляді різних проблем теорії кілець і модулів, зокрема при розгляді кілець елементарних дільників [1]–[3]. В [1] доведено, що праве Ермітове кільце є кільцем стабільного рангу не більшого за 2. Виявилося, що комутативне кільце Безу є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли його стабільний ранг не більший за 2 [2]. У некомутативному випадку показано, що праве кільце Безу стабільного рангу 1 є правим Ермітовим [2]. Тут же сформульована задача, чи буде праве кільце стабільного рангу не більшого за 2 правим Ермітовим кільцем? У цьому повідомленні наведено частковий розв'язок цієї задачі. А саме доведено, що над правим кільцем Безу стабільного рангу не більшого за n довільний унімодулярний рядок довжини не меншої за $n+1$ володіє канонічною діагональною редукцією.

Наведемо всі необхідні означення і факти. Всі кільця, які розглядаються, є асоціативними з $1 \neq 0$. Кільце називається *правим кільцем Безу*, якщо довільний скінченнопороджений правий ідеал є головним. Якщо над кільцем R для довільної матриці A розміру 1×2 існує зворотня матриця P другого порядку така, що $AP = (d, 0)$, для деякого $d \in R$, тоді R називається *правим Ермітовим кільцем* [3]. Позначимо через $GL_n(R)$ повну лінійну групу порядку n над кільцем R, а через $GE_n(R)$ — підгрупу в групі $GL_n(R)$, породжену елементарними матрицями. Рядок $(a_1, \dots, a_n)$ елементів кільця R називається *правим унімодулярним*, якщо існують елементи $x_1, \dots, x_n \in R$ такі, що $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 1$.

Стабільним рангом кільця R (скорочено *ст.р.*(R)) називається найменше натуральне число n, для якого виконується наступна умова: для довільного правого унімодулярного рядка $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ існують такі $b_1, \dots, b_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 +$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16S10.

$a_{n+1}b_2, \dots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є правим унімодулярним. Якщо такого натурального n не існує, то приймемо $ст.р.R = \infty$ [4].

Теорема 1. *Нехай R праве кільце Безу стабільного рангу не більшого за n. Тоді для довільних $a_1, \dots, a_n \in R$ існує матриця $P \in GE_{n+1}(R)$ така, що*

$$(a_1, \dots, a_n, 0)P = (d, 0, \dots, 0).$$

Доведення. Оскільки $ст.р.(R) \le n$, то для правого унімодулярнго рядка $(a_1, \dots, a_{n+1})$ існують такі $c_1, \dots, c_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}c_1, \dots, a_n + a_{n+1}c_n)$ є правим унімодулярним. Тоді існують такі $p_1, \dots, p_n \in R$, що $(a_1 + a_{n+1}c_1)p_1 + \dots + (a_n + a_{n+1}c_n)p_n = 1$. Розглянемо матриці

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & p_1(1 - a_{n+1}) \\ 0 & 1 & \dots & p_2(1 - a_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n(1 - a_{n+1}) \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $P_1, P_2 \in GE_{n+1}(R)$. Тоді

$$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P_1P_2 = (a_1 + a_{n+1}c_1, \dots, a_n + a_{n+1}c_n, 1).$$

Очевидно, що даний рядок елементарними перетвореннями стовпчиків, приводиться до вигляду $(1, 0, \dots, 0)$. Останнє є еквівалентним до твердження, що існує матриця P_3 з $GE_{n+1}(R)$ така, що $(a_1 + a_{n+1}c_1, \dots, a_n + a_{n+1}c_1)P_3 = (1, 0, \dots, 0)$. Тобто для довільного правого унімодулярного рядка $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ існує матриця $P \in GE_{n+1}(R)$ така, що $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})P = (1, 0, \dots, 0)$. Власне, $P = P_1P_2P_3$.

Оскільки R — праве кільце Безу, то для довільних $a_1, \dots, a_n \in R$ існує таке $d \in R$, що $a_1R + \dots + a_nR = dR$. Тоді $a_1 = db_1, \dots, a_n = db_n$ і $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = d$ для деяких $b_1, \dots, b_n, u_1, \dots, u_n \in R$. Позначимо $b_{n+1} = 1 - b_1u_1 - \dots - b_nu_n$. Тоді $db_{n+1} = 0$ і $b_1R + \dots + b_nR + b_{n+1}R = R$. Оскільки $ст.р.(R) \le n$ і рядок $(b_1, \dots, b_n, b_{n+1})$ є правим унімодулярним, то за доведеним $(b_1, \dots, b_n, b_{n+1})P = (1, 0, \dots, 0)$. Враховуючи, що $db_{n+1} = 0$, маємо $(a_1, \dots, a_n, 0)P = (d, 0, \dots, 0)$, що і доводить теорему. □

Простим наслідком з теореми 1 є наступна теорема [2].

Теорема 2. *Праве кільце Безу стабільного рангу не більшого за 1 є правим Ермітовим кільцем.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Menal P., Mancasi J. *On regular rings with stable range 2* // J. Pure. Appl. Algebra. – 1982. – V.24. – P.25–40.

2. Забавський Б. В. *Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу 2* // III міжн. алг. конф. в Україні. Тези: Суми, – 2001. – С.179.

3. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – V.66. – P.464–491.

4. Васерштейн Л. И. *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств* // Функц. анализ. – 1971. – Т.49. – С.17–27.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 27.09.2001