УДК 517.9

С. І. Підкуйко

ПРО ЩІЛЬНІСТЬ НЕІНТЕГРОВНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ, БЛИЗЬКИХ ДО БІЛЬЯРДНИХ

S. I. Pidkuyko. *On density of nonintegrable Hamiltonian systems close to being billiard*, Matematychni Studii, **16** (2001) 86–92.

The class of Hamiltonian systems close to billiard systems is considered. It is proved that the nonintegrable Hamiltonian systems in that class form an everywhere dense subset (some analogue of the famous Siegel theorem).

С. И. Пидкуйко. *О плотности неинтегрируемых гамильтоновых систем, близких к бильярдным* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №1. – С.86–92.

Рассматривается класс гамильтоновых систем, близких к бильярдным. Доказано, что неинтегрируемые гамильтоновые системы в этом классе образуют всюду плотное множество (некоторый аналог известной теоремы Зигеля).

Розглядається гамільтонова система з гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + V(f(x_1, x_2)), \tag{1}$$

де функція $f(x_1, x_2)$ — поліном, і рівняння

$$f(x_1, x_2) = 0 \tag{2}$$

задає замкнену криву в $\mathbb{R}^2$, що обмежує деяку область. Нехай функція V, яку будемо називати потенціалом для даної гамільтонової системи, мероморфна в околі нуля і має в цій точці полюс. Тоді ця система породжує однопараметричну сім'ю гамільтонових систем, що збігається до більярдної системи в області, обмеженій кривою (2). Тому цю систему природно назвати близькою до більярдної (або спорідненою з більярдною).

Виникає задача: чи справедливі аналоги відомих результатів Зігеля про щільність та масивність неінтегровних гамільтонових систем в даному класі гамільтоніанів (1).

Для гамільтонових систем з гамільтоніаном $H(x_1, x_2, p_1, p_2)$, дійсно аналітичним в околі точки положення рівноваги, у випадку двох ступенів вільності відповідь дано в статтях [1, 2]. Узагальнення цих результатів на випадок $n > 2$ ступенів вільності отримано автором в статтях [6, 7].

У даній статті досліджено щільність множини неінтегровних гамільтоніанів вигляду (1) для випадку, коли крива (2) є еліпсом. Близькими будемо називати гамільтоніани

2000 *Mathematics Subject Classification:* 37J35, 37K10.

(гамільтонові системи), що мають близькі коефіцієнти розкладу в ряди Тейлора (в околі точки положення рівноваги).

Слід зазначити, що визначення понять, які розглядає автор у статті (гамільтонова система, рівняння Гамільтона, інтегровність за Ліувіллем, більярдна система, дужка Пуассона, канонічне перетворення), а також питання, близькі до розглядуваних автором, можна знайти в [3], [4], [5].

Перейдемо до точного формулювання отриманих результатів.

Розглядається гамільтонова система з гамільтоніаном (1), де на функції f і V накладаються такі умови:

I. Функція $f(x_1, x_2)$ має вигляд

$$f(x_1, x_2) = 1 - \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) .$$

II. Коефіцієнти a_1, a_2 є раціонально незалежними.

III. Функція V аналітична у виколотому околі точки 0, що містить 1, і її похідна в цій точці менша за нуль, $V'(1) < 0$.

За цих припущень гамільтоніан H є аналітичним в околі нуля (початку координат) і початок координат є локальним мінімумом для H.

Крім того, можна вважати, що $H(0,\,0,\,0,\,0) = V(1) = 0$.

Теорема 1. *Для довільної гамільтонової системи (1) з умовами I, II і III на функції f і V, і для довільної додатної послідовності $\{\varepsilon_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, існує гамільтонова система вигляду (1) з гамільтоніаном $\widetilde{H}$ і функціями $\widetilde{f}$ і $\widetilde{V}$, для яких:*

1) $|a_1 - b_1| < \varepsilon_0\,, \quad |a_2 - b_2| < \varepsilon_0\,, \quad \widetilde{f}(x_1, x_2) = 1 - \left(\dfrac{x_1^2}{b_1^2} + \dfrac{x_2^2}{b_2^2} \right);$

2) $(\forall n \in \mathbb{N}) : |V^{(n)} - \widetilde{V}^{(n)}| < \varepsilon_n\,;$

3) будь-який аналітичний в околі нуля перший інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном $\widetilde{H}$ є функцією від $\widetilde{H}$.

Доведення. Розкладемо функцію H в ряд Тейлора в околі нуля

$$H = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2) - \frac{V'(1)}{1!}\,\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) + \dots + (-1)^n\,\frac{V'(n)}{n!}\,\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^n + \cdots \tag{3}$$

Лема 1. *Існує канонічне перетворення змінних $(x_1, x_2, p_1, p_2) \mapsto (u_1, u_2, v_1, v_2)$, яке квадратичну частину*

$$H_2 = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2) - \frac{V'(1)}{1!}\,\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)$$

гамільтоніана (3) зводить до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_1\,u_1\,v_1 + \lambda_2\,u_2\,v_2\,,$$

при цьому коефіцієнти λ_1, λ_2 чисто уявні і раціонально незалежні.

Доведення леми 1. Для доведення леми 1 ми побудуємо таке канонічне перетворення.

Введемо позначення:

$$c_1 = \sqrt[4]{-\frac{2V'(1)}{a_1^2}}, \quad c_2 = \sqrt[4]{-\frac{2V'(1)}{a_2^2}}.$$

Оскільки числа a_1, a_2 є раціонально незалежними, то числа c_1^2, c_2^2 також раціонально незалежні. Нехай $\mathcal{A}$ позначає матрицю лінійної частини канонічних рівнянь Гамільтона

$$\dot{x}_k = H_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -H_{x_k}, \qquad k = 1, 2.$$

Відомо [1], що стовпці матриці такого канонічного перетворення є власними векторами матриці $\mathcal{A}$, яка в нашому випадку має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_1^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен цієї матриці має вигляд $\lambda^4 + \lambda^2 (c_1^4 + c_2^4) + c_1^4 c_2^4$. Звідси знаходимо власні значення $\lambda_{1,3} = \pm i\, c_1^2$, $\lambda_{2,4} = \pm i\, c_2^2$, і $(1, 0, \pm\, i\, c_1^2, 0)^T$, $(0, 1, 0, \pm\, i\, c_2^2)^T$ — власні вектори матриці $\mathcal{A}$. Враховуючи, що канонічне перетворення зберігає вигляд канонічних рівнянь Гамільтона, отримуємо шукану матрицю

$$\begin{pmatrix} 1/c_1\sqrt{2} & 0 & i/c_1\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/c_2\sqrt{2} & 0 & i/c_2\sqrt{2} \\ i\, c_1/\sqrt{2} & 0 & c_1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & i\, c_2/\sqrt{2} & 0 & c_2/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x_1 = (u_1 + i\, v_1)/(c_1\sqrt{2}), \quad x_2 = (u_2 + i\, v_2)/(c_2\sqrt{2}),$$
$$p_1 = c_1(i\, u_1 + v_1)/\sqrt{2}, \quad p_2 = c_2(i\, u_2 + v_2)/\sqrt{2}.$$

Позначимо наш гамільтоніан H, записаний у нових змінних через E. Тоді E розкладається в суму однорідних компонент

$$E(u_1, u_2, v_1, v_2) = \sum_{n=2}^{\infty} E_n,$$

де $E_2(u_1, u_2, v_1, v_2) = i\, c_1^2\, u_1\, v_1 + i\, c_2^2\, u_2\, v_2$. □

У нових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2) гамільтоніан E задовольняє систему канонічних рівнянь Гамільтона

$$\dot{u}_k = E_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -E_{u_k}, \qquad k = 1, 2. \tag{4}$$

Для доведення теореми 1 нам потрібні кілька тверджень з [1], які ми сформулюємо у вигляді лем.

Лема 2 [1]. *Існує перший інтеграл системи (4)*

$$s = u_1 v_1 + \sum_{n=3}^{\infty} s_n , \tag{5}$$

без членів вигляду

$$c \prod_{k=1}^{2} (u_k v_k)^{\alpha_k} , \qquad \alpha_1 + \alpha_2 > 1 ,$$

при цьому кожний перший інтеграл системи (4) є рядом за степенями E, s .

У формулюванні леми 2 член ряду s_n позначає однорідну степеня n компоненту степеневого ряду s. Потрібно також зазначити, що степеневий ряд s, взагалі кажучи, розбіжний.

Введемо таке позначення: для однорідного многочлена G від кількох змінних через $\overline{|G|}$ будемо позначати абсолютну величину максимального за модулем коефіцієнта многочлена G.

Лема 3 [1]. *Нехай гамільтонова система (4) допускає аналітичний в околі початку координат, незалежний з E перший інтеграл. Тоді послідовність*

$$\frac{\ln \overline{|s_k|}}{k \ln k} , \qquad k = 2, 3, \dots ,$$

обмежена.

Лема 4. *Нехай* $\{\epsilon_k\}$ *— довільна послідовність,* $0 < \epsilon_k < 1, \quad k = 2, 3, \dots ,$ *і два цілих числа* q, r *задовольняють нерівності*

$$q > 1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} + 2\, c_2^2\, {\epsilon_2}^{-1} , \qquad \left| q \, \frac{c_2^2}{c_1^2} + r \right| < 1 .$$

Визначимо три послідовності $\{q_m\}, \{r_m\}, \{l_m\}, \quad m = 1, 2, \dots ,$ *за формулами*

$$l_m = q_m + |r_m|, \quad r_m = q_m \left(\frac{r}{q} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{q_k} \right) , \quad q_1 = q^2,$$

де q_{m+1} *є найменшим цілим степенем числа* q, *що задовольняє нерівність*

$$q_{m+1} > q_m^2 + 4\, c_2^2\, {\epsilon_{2l_m}}^{-1}\, {l_m}^{m l_m} .$$

Нехай

$$d_2 = c_2^2 , \qquad d_1 = c_1^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_m} - \frac{r}{q} \right) .$$

Тоді

1. *послідовність* $\{l_m\}$ *строго зростає і* $l_1 \geq 4$;
2. *числа* d_1, d_2 *є раціонально незалежними і* $|c_1^2 - d_1| < \epsilon_2$;
3. *члени послідовності* $\rho_m = d_1\, q_m + d_2\, r_m, \quad m = 1, 2, \dots ,$ *задовольняють нерівності*

$$|q_m\, {\rho_m}^{-1}\, \epsilon_{2l_m}| > 2\, {l_m}^{m l_m}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Формулювання і доведення леми 4 майже повністю збігаються з формулюванням і доведенням відповідного твердження в [1].

Використовуючи метод Зігеля, побудуємо тепер за гамільтоніаном E гамільтоніан $\widetilde{E}$, для якого

$$\overline{|E_m - \widetilde{E}_m|} < \epsilon_m\,, \qquad m = 2, 3, \dots\,, \tag{6}$$

і відповідний перший інтеграл (5), який ми позначимо $\widetilde{s}$, задовольняє нерівність

$$\overline{|\widetilde{s}_{l_m}|} > {l_m}^{ml_m}\,, \qquad m = 2, 3, \dots\,.$$

Тоді, згідно з лемою 2, гамільтонова система з гамільтоніаном $\widetilde{E}$ є неінтегровною. Приймемо

$$\widetilde{E}_2 = i\, d_1\, u_1\, v_1 + i\, d_2\, u_2\, v_2\,.$$

Згідно з лемою 4, $\widetilde{E}_2$ задовольняє нерівність (6).

Припустимо, що $\widetilde{E}_k$ побудовано для $k = 2, 3, \dots, 2l_m - 1$. Побудуємо $\widetilde{E}_k$ для $k = 2l_m, 2l_m + 1, \dots, 2l_{m+1} - 1$.

Оскільки $\widetilde{s}$ є першим інтегралом гамільтонової системи (4), то його дужка Пуассона з гамільтоніаном $\widetilde{E}$ дорівнює нулю,

$$\{\widetilde{s}, \widetilde{E}\} = 0\,.$$

Звідси отримуємо

$$\sum_{k=2}^{l} \{\widetilde{s}_k, \widetilde{E}_{l+2-h}\} = 0, \qquad l = 3, 4, \dots\,.$$

Розписуючи дужку Пуассона в цій сумі, остаточно одержуємо

$$\begin{aligned} id_1\left(u_1\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial u_1} - v_1\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial v_1}\right) + id_2\left(u_2\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial u_2} - v_2\frac{\partial\widetilde{s}_l}{\partial v_2}\right) &= \\ = u_1\frac{\partial\widetilde{E}_l}{\partial u_1} - v_1\frac{\partial\widetilde{E}_l}{\partial v_1} - \sum_{k=2}^{l}\{\widetilde{s}_k, \widetilde{E}_{l+2-h}\} &= 0\,. \end{aligned}$$

Позначимо

$$s_{m_1m_2n_1n_2} u_1^{m_1} u_2^{m_2} v_1^{n_1} v_2^{n_2}, \quad E_{m_1m_2n_1n_2} u_1^{m_1} u_2^{m_2} v_1^{n_1} v_2^{n_2}, \quad m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = l,$$

одночлени поліномів $\widetilde{s}_l$, $\widetilde{E}_l$ з відповідними індексами. Тоді вираз

$$s_{m_1m_2n_1n_2} - \frac{m_1 - n_1}{(m_1 - n_1)id_1 + (m_2 - n_2)id_2} E_{m_1m_2n_1n_2}$$

залежить лише від m_1, m_2, n_1, n_2 і коефіцієнтів поліномів $\widetilde{s}_k, \widetilde{E}_k, \quad k = 3, 4, \dots l - 1$.

Для $l = 2l_m$ визначимо

$$\begin{aligned} &m_1 = 2q_m\,, \quad m_2 = 2r_m\,, \quad n_1 = 0\,, \quad n_2 = 0\,, \quad \text{коли} \quad r_m \geq 0\,, \\ &m_1 = 2q_m\,, \quad m_2 = 0\,, \quad n_1 = 0\,, \quad n_2 = 2r_m\,, \quad \text{коли} \quad r_m < 0\,. \end{aligned}$$

і відповідні коефіцієнти поліномів $\widetilde{s}_{l_m}, \widetilde{E}_{l_m}, E_{l_m}$ позначимо через $\widetilde{\sigma}_m, \widetilde{\eta}_m, \eta_m$. Якщо тепер для $\widetilde{\eta}_m$ вибрати два значення

$$\widetilde{\eta}_m = \eta_m \pm \frac{1}{2}\,\epsilon_{2l_m}\,, \tag{7}$$

то ми отримаємо два значення для $\widetilde{\sigma}_m$, які будуть відрізнятися на $\frac{q_m}{i\rho_m}\,\epsilon_{2l_m}$. Отже, згідно з лемою 4, в (7) можна так вибрати знак, щоб

$$|\widetilde{\sigma}_m| > {l_m}^{ml_m}\,. \tag{8}$$

Звідси випливає побудова $\widetilde{E}_k$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_{2l_m} &= E_{2l_m} \pm \frac{1}{2}\,\epsilon_{2l_m}(u_1^{2q_m}u_2^{2r_m} + (-1)^{l_m}v_1^{2q_m}v_2^{2r_m})\,, \qquad r_m \ge 0\,, &(9)\\
\widetilde{E}_{2l_m} &= E_{2l_m} \pm \frac{1}{2}\,\epsilon_{2l_m}(u_1^{2q_m}v_2^{-2r_m} + (-1)^{l_m}v_1^{2q_m}u_2^{-2r_m})\,, \qquad r_m < 0\,, &(10)\\
\widetilde{E}_k &= E_k\,, \qquad 2l_m < k < 2l_{m+1}\,,
\end{aligned}$$

де знак $\pm$ вибирається так, щоб справджувалась оцінка (8).

Але таких змін (9), (10) не можна досягти жодною зміною похідних $V^{(n)}(1)$, $n = 1, 2, \dots$. Проте, цю перешкоду можна усунути, що випливає із зауважень, які і завершують доведення Теореми 1:

i. Виберемо b_1, b_2 за формулами

$$b_2 = a_2, \qquad b_1 = \frac{\sqrt{-2V'(1)}}{d_1}\,.$$

Тоді можна так підібрати ϵ_2, що

$$|c_1^2 - d_1| < \epsilon_2 \Rightarrow |a_1 - b_1| < \varepsilon_0\,.$$

ii. Коефіцієнти полінома $\widetilde{E}_{2l_m}$ (відмінні від змінюваних нами) не впливають на оцінку (8) для жодного $\widetilde{\sigma}_k$, $k \le m$. Отже, їх можна змінювати так, щоб отримувана зміна породжувалась зміною $V^{(l_m)}$.

iii. Кожен вираз

$$\left[\frac{1}{2c_1^2}\,(u_1 + i\,v_1)^2 + \frac{1}{2c_2^2}\,(u_2 + i\,v_2)^2\right]^n$$

містить всі одночлени вигляду

$$u_1^{2m}u_2^{2n-2m}\,, \quad u_1^{2m}v_2^{2n-2m}\,, \qquad m = 0, 1, \dots n,$$

з ненульовими коефіцієнтами. Отже, зміною похідної $V^{(l_m)}(1)$ ми завжди можемо досягти відповідних змін (9), (10). Побудуємо тепер послідовність $\{\epsilon_n\}$ за послідовністю $\{\varepsilon_n\}$ згідно з формулами

$$\begin{aligned}
\epsilon_{2l_m} &= \frac{\varepsilon_{l_m}}{2^{l_m}\,c_1^{2q_m}\,c_2^{2r_m}\,(q_m)!\,(r_m)!}\,, \qquad r_m \ge 0\,,\\
\epsilon_{2l_m} &= \frac{\varepsilon_{l_m}}{2^{l_m}\,c_1^{2q_m}\,c_2^{-2r_m}\,(q_m)!\,(-r_m)!}\,, \qquad r_m < 0\,.
\end{aligned}$$

Тоді зміна похідної $V^{(l_m)}(1)$ на $\pm\dfrac{1}{2}\,\varepsilon_{l_m}$ еквівалентна до зміни відповідної похідної $E^{(2l_m)}$ на $\pm\dfrac{1}{2}\,\epsilon_{2l_m}$.

iv. Оскільки процес побудови неінтегровного гамільтоніана не залежить від поведінки послідовності $\{\varepsilon_n\}$ при $n \to \infty$, то зрозуміло, що функцію $\widetilde{V}$ можна вибрати саме з того класу, до якого належить функція V.

$\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Siegel C. L. *On the integrals of canonical systems* // Ann. of Math. (2). – 1941. – V.42. – P.806–822.
2. Siegel C. L. *Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung* // Math. Ann. – 1954. – V.128. – P.144–170.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики, – М.: Наука, 1974.
4. Брюно А. Д., *Нормальная форма системы, близкой к гамильтоновой* // Матем. заметки. – 1990. – Т.48, №5. – С.35–46.
5. Козлов В.В. *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике* // УМН. – 1983. – Т.38, №1. – С.3–67.
6. Пидкуйко С.И. *О плотности множества неинтегрируемых гамильтонианов* // Изв. РАН, Сер. Матем. – 1992. – Т.56, №4. – С.863–876.
7. Пидкуйко С.И. *О массивности множества неинтегрируемых гамильтонианов* // Матем. сборник. – 1994. – Т.185, №12. – С.101–122.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 28.04.1999