УДК 517.5

Б. В. Винницький, В. М. Дільний

ПРО НЕОБХІДНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЗГОРТКИ

B. V. Vynnytskyi, V. M. Dil'nyi. *On necessary conditions for existence of solutions of convolution type equation*, Matematychni Studii, **16** (2001) 61–70.

A necessary condition is found under which there exists a function f from the Hardy-Smirnov space E^2 in the semistrip $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}, 0 < \sigma < +\infty$, such that f is a solution of the equation $\int_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)\,dw = 0, \tau \leqslant 0$.

Б. В. Винницкий, В. Н. Дильный. *О необходимых условиях существования решений одного уравнения типа свертки* // Математичні Студії. – 2001. – Т.16, №1. – С.61–70.

Найдены необходимые условия для того, чтобы существовала такая не равная тождественно нулю функция f из пространства Харди-Смирнова в полуполосе $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}$, $0 < \sigma < +\infty$, являющаяся решением уравнения $\int_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)\,dw = 0, \tau \leqslant 0$.

Нехай $D_\sigma = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \operatorname{Re} z < 0\}, D^*_\sigma = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_\sigma, 0 < \sigma < +\infty$, а $E^p[D_\sigma]$ і $E^p_*[D_\sigma], 1 \leqslant p < +\infty$, — простори функцій, аналітичних відповідно в D_σ і D^*_σ, для яких

$$\sup\left\{\int_\gamma |f(z)|^p |dz|\right\} < +\infty,$$

де супремум береться за тими відрізками γ, які лежать відповідно в D_σ і D^*_σ і є паралельними одній зі сторін ∂D_σ. Функції f із цих просторів мають [1] майже скрізь (м. с.) на ∂D_σ кутові граничні значення, які позначаємо через $f(z)$, і $f \in L^p[\partial D_\sigma]$.

В [2] і [3] встановлено достатні умови того, що рівняння

$$\int_{\partial D\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = 0, \quad \tau \leqslant 0, \quad g \in E^2_*[D_\sigma], \tag{1}$$

у просторі $E^2[D_\sigma]$ має ненульовий розв'язок. Тут вкажемо необхідні умови. Для цього нам знадобляться деякі допоміжні міркування.

Нехай $E^p_\sigma[\mathbb{C}(\alpha,\beta)], 0 < \beta - \alpha < 2\pi, 1 \leqslant p < +\infty, 0 \leqslant \sigma < +\infty$, — простір аналітичних в $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ функцій, для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr\right\} < +\infty,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D99, 45E10.

© Б. В. Винницький, В. М. Дільний, 2001

$z = re^{i\varphi} = x + iy$. Через $L^p_\sigma(\mathbb{R}), 1 \leqslant p < \infty$, позначимо простір таких функцій f, що $f(y)\exp(-\sigma|y|) \in L^p(\mathbb{R})$. Нехай $\mathbb{C}_+ = \mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \mathbb{C}_- = \mathbb{C}(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}), H^p_\sigma(\mathbb{C}_+) = E^p_\sigma[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})]$. Функції f з просторів $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ [1] і g з $E^p_0[\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$ [4-5] мають м. с. відповідно на $\partial\mathbb{C}_+$ і $\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta)$ кутові граничні значення, які позначаємо через $f(z)$ та $g(z)$, і $f \in L^p_\sigma(\mathbb{R})$ та $g \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha, \beta)]$. Якщо $\sigma = 0$, то [6] $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+) = H^p(\mathbb{C}_+)$, де $H^p(\mathbb{C}_+)$ — клас Гарді в $\mathbb{C}_+$.

Нехай функція f аналітична в $\mathbb{C}_+$ і $\ln|f|$ має додатну гармонійну мажоранту в $Q_R := \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z| < R\}$ для кожного $R > 0$. Функція $f(z)$ (див., наприклад [7]) також має м. с. на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які позначатимемо через $f(it)$ або, якщо це не викликатиме непорозумінь, через $f_0(t)$. Сингулярну граничну функцію $h(t)$ функції f визначають [7] з точністю до адитивної сталої і значень в точках неперервності рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \to 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(x + iy)| dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)| dy.$$

Нехай

$$S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leqslant r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|}, \quad P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) |dh(t)|,$$

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leqslant r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln|f_0(t)| dt.$$

Лема 1 [7]. *Якщо функція f є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і для кожного $R > 0$ функція $\ln|f|$ має додатну гармонійну мажоранту в Q_R, то*

$$K_0(r) + \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \sum_{|\lambda_n| < 1} \operatorname{Re} \lambda_n = \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln|f(re^{i\varphi})| \cos\varphi d\varphi + c_1 + \frac{c_2}{r^2}, \quad r > 0,$$

де c_1 і c_2 — сталі, $K_0(r) = S(r) + P(r) - K(r)$, λ_n — нулі функції f в $\mathbb{C}_+$.

Лема 2. *Якщо $f(z)e^{-cz} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ при деякому $c > 0$, то функція $\ln|f|$ має додатну гармонійну мажоранту в кожному півкрузі Q_R, $R > 0$.*

Доведення. Оскільки функція f належить до класу Смірнова $E^p[Q_R]$, то [8, с.260]

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \left\{ \left| f\left(\varphi(re^{i\theta})\right) \right|^p \left| \varphi'(re^{i\theta}) \right| \right\} d\theta < c_1, \quad 0 < r < 1,$$

де $\varphi(z)$ конформно відображає круг $|z| < 1$ на Q_R, при цьому $|\varphi'(0)| \geqslant 1$ [8, с.178]. З того, що Q_R є областю класу C [8, с.250], маємо

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{1}{\varphi'(re^{i\theta})} \right| d\theta < R(2 + \pi) - 2\pi \ln|\varphi'(0)|, \quad 0 < r < 1.$$

Враховуючи, що $\ln^+|f| \leqslant \ln^+(|f||\varphi'|) + \ln^+\frac{1}{|\varphi'|}$, маємо

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f\left(\varphi(re^{i\theta})\right)\right| d\theta \leqslant \frac{c_2}{p}, \quad 0 < r < 1.$$

А остання нерівність забезпечує існування додатної гармонійної мажоранти для $\ln|f(\varphi(z))|$ в крузі $|z| < 1$. Але оскільки суперпозиція додатної гармонійної функції і конформного відображення є додатною гармонійною функцією, то лему доведено. □

Якщо $f(z)e^{-cz} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $c > 0$, то сингулярна гранична функція функції f є незростаючою. Справді, якщо $t_1 < t_2$, то

$$h(t_1) - h(t_2) = \lim_{x\to 0+}\left(\int_{t_1}^{t_2} \ln^+|f(x+iy)|dy - \int_{t_1}^{t_2}\ln^+|f(iy)|dy\right) -$$

$$-\lim_{x\to 0+}\left(\int_{t_1}^{t_2} \ln^+\left|\frac{1}{f(x+iy)}\right| dy - \int_{t_1}^{t_2}\ln^+\left|\frac{1}{f(iy)}\right|dy\right).$$

Оскільки перша границя [9] дорівнює нулю, то потрібне твердження одержуємо з леми Фату.

Теорема 1. *Нехай послідовність комплексних чисел (λ_n) із $\mathbb{C}_+$, незростаюча на $(-\infty;+\infty)$ функція h, похідна якої м. с. дорівнює нулю, і функція $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ задовольняють умови*

$$\sum_{|\lambda_n|<1} \operatorname{Re}\lambda_n < \infty, \tag{2}$$

$$\ln|f_0(y)| \in L^1(-1;1), \qquad f_0(y)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R}), \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{3}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} K_0(r) < +\infty. \tag{4}$$

Тоді функція

$$f(z) = e^{ia_0 + a_1 z} \prod_{|\lambda_n|\leqslant 1} \frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n} \prod_{|\lambda_n|>1} w(z,\lambda_n) \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\left(\ln|f_0(t)|dt + dh(t)\right)\right\}, \tag{5}$$

де a_0, a_1 — дійсні сталі,

$$w(z,\lambda_n) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\overline{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\overline{\lambda}_n}\right), \quad Q(t,z) = \frac{(tz+i)^2}{(1+t^2)^2(t+iz)},$$

задовольняє умову

$$(\exists c_3 \in (0;+\infty)) : f(z)e^{-c_3 z} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \tag{6}$$

при цьому її послідовність нулів, сингулярна гранична функція і модулі кутових граничних значень збігаються відповідно з (λ_n), h і f_0. Навпаки, якщо функція $f \not\equiv 0$

задовольняє умову (6), то вона подається у вигляді (5), де f_0 — кутова гранична функція на $\partial\mathbb{C}_+$ функції f, h — її сингулярна гранична функція, при цьому $h'(t)=0$ для майже всіх $t\in\mathbb{R}$, (λ_n) — послідовність нулів функції f і виконуються умови (2)-(4), при цьому добутки та інтеграли в (5) збігаються абсолютно та рівномірно на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$.

Доведення. Нехай виконуються умови (2)-(4). Позначимо $\widetilde{f}(y)=|f_0(y)|e^{-\sigma|y|}+{}+e^{-\sqrt{|y|}}$, $f^*(y)=|f_0(y)|/\widetilde{f}(y)$. Очевидно, $|f_0(y)|=f^*(y)\widetilde{f}(y)$, $f^*(y)e^{-\sigma|y|}\in L^\infty(\mathbb{R})$, $\widetilde{f}(y)\in L^p(\mathbb{R})$ і $\ln\widetilde{f}(y)\geqslant-\sqrt{|y|}$. З цього маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln\widetilde{f}(y)|}{1+y^2}dy<\infty, \tag{7}$$

а, отже, і

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln\widetilde{f}(t)dt<\infty.$$

З [10] маємо, що функція

$$f_1(z)=e^{ia_0+a_1z}\prod_{|\lambda_n|\leqslant1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1}w(z,\lambda_n)\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\left(\ln f^*(t)dt+dh(t)\right)\right\},$$

є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і задовольняє умову

$$(\exists c_4\in(0;+\infty))\,(\forall z\in\mathbb{C}_+):|f_1(z)|\leqslant c_4\exp\left\{\sigma|y|+c_4x\right\},$$

при цьому добутки та інтеграли в f_1 збігаються абсолютно і рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$. Крім цього, з (7) маємо, що (див. [11])

$$f_2(z)\stackrel{\text{def}}{=}\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\ln\widetilde{f}(t)dt\right\}\in H^p(\mathbb{C}_+),$$

і $f=f_1f_2$. Тому $f(z)e^{-c_4z}\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Нехай тепер функція $f\not\equiv0$ задовольняє умову (6). Якщо $0<\varepsilon<1$ і $f_\varepsilon(z)=f(z+\varepsilon)$, то, оскільки [9] $|f(z)|\leqslant c_5\exp(\sigma|z|)/x^{1/p}$, маємо $|f_\varepsilon(z)\leqslant c_\varepsilon e^{\sigma|z|}$. Тому [12]

$$f_\varepsilon(z)=e^{ia_\varepsilon+b_\varepsilon z}\prod_{|\lambda_n|\leqslant1}\frac{z-\lambda_{n,\varepsilon}}{z+\overline{\lambda}_{n,\varepsilon}}\prod_{|\lambda_n|>1}w(z,\lambda_{n,\varepsilon})\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Q(t,z)\left(\ln|f(it+\varepsilon)|dt\right)\right\}, \tag{8}$$

де $a_\varepsilon,b_\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\lambda_{n,\varepsilon}\stackrel{\text{def}}{=}\lambda_n-\varepsilon\in\mathbb{C}_+$. З умови (6) випливає (див. [9]) (2) і (3), а (4) випливає з лем 1 і 2, оскільки [9, с.71] для $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ інтеграл $\frac{1}{\pi r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ln|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi$ є обмеженим зверху на $[1;+\infty)$. Перша з умов (3) випливає (див. [7, с.226]) з леми 2. З (4) і другої умови (3) маємо

$$\varlimsup_{r\to\infty}\left(S(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)<+\infty,\quad \varlimsup_{r\to\infty}\left(P(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)<+\infty,\quad \varlimsup_{r\to\infty}\left(K(r)-\frac{\sigma}{\pi}\ln r\right)<+\infty,$$

звідки [10] випливає абсолютна і рівномірна збіжність на компактах із $\mathbb{C}_+$ інтегралів та добутків, що входять в (5) і (8). Зафіксуємо довільне $z \neq \lambda_n, z \in \mathbb{C}_+$ і вважатимемо, що $z \neq \lambda_{n,\varepsilon}$. Покажемо, що добутки та інтеграл у (8) збігаються при прямуванні ε до нуля до відповідних добутків та інтегралів у (5). Це випливає з того, що:

1. $\sum_{|\lambda_n|>\rho} |\ln|w(z,\lambda_n)|| \to 0, \rho \to \infty$. Це отримуємо [1] з абсолютної збіжності добутку $\prod_{|\lambda_n|>1} w(z,\lambda_n)$.
2. $\sum_{|\lambda_n|>\rho} |\ln|w(z,\lambda_{n,\varepsilon})|| \to 0, \rho \to \infty$, рівномірно по ε. Це маємо з того, що [12, с.35] для $|\lambda_n| > 2|z|$
$$|\ln|w(z,\lambda_{n,\varepsilon})|| \leqslant 4|z|\frac{\operatorname{Re}\lambda_{n,\varepsilon}}{|\lambda_{n,\varepsilon}|^3} \leqslant 8|z|\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^3},$$
і [1] $\sum_{|\lambda_n|>\rho} (\operatorname{Re}\lambda_n)/|\lambda_n|^3 < \infty$.
3. Для кожного фіксованого $\rho > 0$ суми
$$\sum_{\substack{\operatorname{Re}\lambda_n<\varepsilon_0,\\ 1<|\lambda_n|<\rho}} |\ln|w(z,\lambda_n)||\,, \quad \sum_{\substack{0<\operatorname{Re}\lambda_{n_\varepsilon}<\varepsilon_0,\\ 1<|\lambda_n|<\rho}} |\ln|w(z,\lambda_{n,\varepsilon})||\,,$$
прямують до нуля при $\varepsilon_0 \to 0$, причому друга рівномірно по $\varepsilon \in (0;1/2)$. Це випливає з того, що [1] $\sum_{1<|\lambda_n|<\rho} \operatorname{Re}\lambda_n < \infty$.
4. Для кожного фіксованого $\rho > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$ внаслідок скінченності числа доданків
$$\sum_{\substack{\operatorname{Re}\lambda_n>\varepsilon_0,\\ 1<|\lambda_n|<\rho}} |\ln|w(z,\lambda_n)/w(z,\lambda_{n,\varepsilon})|| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Отже, модуль другого добутку у (8) збігається до модуля другого добутку у (5) при $\varepsilon \to 0$. Подібне є правильним і для перших добутків з (8) і (5). У [9] доведено, що функція $\Phi_\varepsilon(t) = \int_{-\rho}^{t} \ln|f(it+\varepsilon)|dt$ і її повна варіація на $[-\rho;\rho]$ обмежені сталою, яка від ε, $0 < \varepsilon < 1$, не залежить. Тому за теоремами Хеллі і з означення сингулярної граничної функції

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\rho}^{\rho} Q(t,z)\ln|f(it+\varepsilon)|dt = \int_{-\rho}^{\rho} Q(t,z)(\ln|f(it)|dt + dh(t)).$$

Доведемо, що
$$\int_{|t|>\rho} Q(t,z)\ln|f(it+\varepsilon)|dt \to 0, \quad \rho \to \infty,$$
рівномірно по $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Це випливає з наступних міркувань.

1. $|Q(t,z)| \leqslant (|z|^2+1)/|t|^3, |t| > 1$.
2. Відомо, що (див. [9, с.70]) $\sup_{\varepsilon>0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(is+\varepsilon)|^p e^{-p\sigma|s|}ds < +\infty$.
3. $$\int_{|t|>\rho} \frac{1}{t^3}\ln^+|f(it+\varepsilon)|dt < \frac{1}{p}\int_{|t|>\rho} \frac{|f(it+\varepsilon)|^p e^{-p\sigma|t|}}{t^3}dt + \frac{2\sigma}{\rho} =$$

$$= \frac{1}{t^3}\int_1^t |f(is+\varepsilon)|e^{-p\sigma|s|}ds\Big|_{|t|>\rho} + 3\int_{|t|>\rho}\frac{1}{t^4}\int_1^t |f(is+\varepsilon)|e^{-p\sigma|s|}dsdt + \frac{2\sigma}{\rho}.$$

4. Із лем 1 і 2 та [10] отримуємо

$$\int_1^t \frac{1}{1+s^2}\ln^+\frac{1}{|f(is+\varepsilon)|}ds < c\ln t.$$

5.

$$\int_{|t|>\rho}\frac{1}{|t|^3}\ln^+\frac{1}{|f(it+\varepsilon)|}dt \leqslant \frac{2}{t}\int_1^t \frac{1}{1+s^2}\ln^+\frac{1}{|f(is+\varepsilon)|}ds\Big|_{|t|>\rho} +$$

$$+\int_{|t|>\rho}\frac{2}{t^2}\int_1^t\frac{1}{1+s^2}\ln^+\frac{1}{|f(is+\varepsilon)|}dsdt.$$

Отже, інтеграл у (8) збігається до інтегралу в (5). Оскільки $\lim_{\varepsilon\to 0+}|f_\varepsilon(z)| = |f(z)|$, то модуль правої частини (8) збігається до модуля правої частини (5). Тому з формули Шварца випливає (5).

Доведемо тепер, що $h'(t) = 0$ м. с. на $\mathbb{R}$. Оскільки кутові граничні значення м. с. на $\partial\mathbb{C}_+$ модулів першого [12] і другого [1] добутків у (5) дорівнюють одиниці, а з [12]

$$\exp\left\{\int_{-\rho}^{\rho} Q(t,z)(\ln|f_0(t)|\,dt + dh(t))\right\} =$$

$$= \exp\left(ib_2 + b_3 z + \int_{-1}^{1}\frac{\ln|f_0(t)|dt + dh(t)}{t+iz} + z^2\int_{1<|t|\leqslant\rho}\frac{\ln|f_0(t)|dt + dh(t)}{t^2(t+iz)}\right),$$

то кутові граничні значення модуля інтегралу в (5) [12, с.25] м. с. на $\partial\mathbb{C}_+$ дорівнюють $|f_0(t)|\exp(h'(t))$. Останнє доводить теорему. □

З теореми 1 випливає також наступне твердження.

Теорема 2. *Для того, щоб існувала аналітична в $\mathbb{C}_+$ функція $f\not\equiv 0$ така, що $f\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1\leqslant p<\infty$, і модулі кутових граничних значень якої м. с. на $\partial\mathbb{C}_+$ збігаються з $|f_0(t)|$, необхідно і досить, щоб виконувалось (3) і*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\, K(r) > -\infty.$$

Зауваження 1. Теореми 1 і 2 для випадку $p=\infty$ доведені в [10].

Визначимо для $j\in\{1,2,3\}$ функції

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{l_j} f(w)e^{-zw}dw, G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\partial D_\sigma} g(w)e^{zw}dw, \tag{10}$$

де l_1 і l_3 — півпрямі ∂D_σ, що лежать відповідно під і над дійсною віссю, а l_2 — відрізок $[-i\sigma; i\sigma]$, орієнтація яких узгоджена з додатним обходом ∂D_σ.

Лема 3 [1], [3]. *Якщо $f \in E^2[D_\sigma]$, $g \in E^2_*[D_\sigma]$, то $F_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $F_3(z)e^{i\sigma z} \in H^2(\mathbb{C}_-)$, $G(z) \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Крім цього $F_1(z)+F_2(z)+F_3(z)=0$ м. с. на $\partial\mathbb{C}_+$ і справедлива формула*

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_1(iy)e^{iyw}dy + \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} F_2(x)e^{wx}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} F_3(iy)e^{iyw}dy, \quad w \in D_\sigma.$$

Лема 4 [3]. *Якщо $f \in E^2[D_\sigma]$, $g \in E^2_*[D_\sigma]$, то*

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = i\int\limits_0^{+\infty} \Phi_1(iy)e^{i\tau y}dy - i\int\limits_{-\infty}^{0} \Phi_3(iy)e^{i\tau y}dy + \int\limits_0^{+\infty} \Phi_2(x)e^{\tau x}dx, \quad \tau \leqslant 0,$$

де $\Phi_j = F_jG$.

Лема 5. *Нехай функція $g \in E^2_*[D_\sigma]$ така, що $G(x)\ln(2+x) \in L^2(0;+\infty)$. Тоді для того, щоб функція $f \in E^2[D_\sigma]$ була розв'язком рівняння (1), необхідно і досить виконання однієї з двох умов:*

1) *Значення функції $\Phi_1(iy)$ рівні м. с. кутовим граничним значенням на $\partial\mathbb{C}_+$ такої функції P_1, що $P_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.*
2) *Значення функції Φ_3 рівні м. с. кутовим граничним значенням на $\partial\mathbb{C}_+$ такої функції P_3, що $P_3(z)e^{i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.*

Лема 5 міститься в [13] (умова 2) наводиться під час доведення).

Лема 6. *Нехай $c \in \mathbb{R}$ таке число, що $G_c(z) := e^{cz}G(z) \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Рівняння (1) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли рівняння*

$$\int\limits_{\partial D\sigma} f(w+\tau)g_c(w)dw = 0, \quad \tau \leqslant 0, \tag{11}$$

де

$$g_c(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} G_c(x)e^{-xw}dx, \quad \operatorname{Re} w > 0,$$

має ненульовий розв'язок.

Доведення достатньо провести для $c > 0$. З [1] маємо $g_c(w) = g(w-c)$ і $g_c \in E^2_*[D_\sigma]$. Доведемо, що якщо (1) має ненульовий розв'язок, то його має й (11). Нехай $\square_c = \{z : -c < \operatorname{Re} z < 0; -\sigma < \operatorname{Im} z < \sigma\}$. Тоді, оскільки $f(w+\tau)g(w)$ належить до класу Смірнова E^1 в $\square_c$, то

$$\int\limits_{\partial D\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = \int\limits_{\partial(D\sigma/\overline{\square}_c)} f(w+\tau)g(w)dw + \int\limits_{\partial\square_c} f(w+\tau)g(w)dw =$$

$$= \int\limits_{\partial\left(D\sigma/\overline{\square}_c\right)} f(w+\tau)g(w)dw = \int\limits_{\partial D\sigma} f(w-c+\tau)g_c(w)dw.$$

Отже, функція $f_c(w) = f(w-c) \in E^2[D_\sigma]$ є розв'язком рівняння (11). Нехай тепер (11) має ненульовий розв'язок. Тоді [3] сім'я функцій $\{e^{\tau z}G_c(z)\}_{\tau\leqslant 0}$ не є повною в $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Але $c>0$, тому її підсім'я $\{e^{\tau z}G(z)\}_{\tau\leqslant 0}$ теж не є повною. Отже [3] (1) теж має ненульовий розв'язок.

Теорема 3. *Нехай функція $G \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ має вигляд*

$$G(z) = e^{ia_0+a_1 z}\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\ln|G(it)|dt\right\}, \tag{12}$$

і

$$\varlimsup_{r\to\infty}\int\limits_{1<|t|<r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt < +\infty. \tag{13}$$

Тоді рівняння (1) має лише нульовий розв'язок.

Доведення. Припустимо, що рівняння (1) має ненульовий розв'язок. За лемою 6 можна вважати, що $G(z)e^{c_8 z} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ для деякого $c_8>0$. Тоді $G(x)\ln(2+x) \in L^2(0;+\infty)$. За лемою 5 функції Φ_1 і Φ_3 є кутовими граничними функціями таких функцій P_1 і P_3, що $P_1(z)e^{-i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $P_3(z)e^{i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Нехай

$$\psi_j(z) = \begin{cases} 2F_j(z), & z\in\mathbb{C}_-,\\ P_j(z)/G(z), & z\in\mathbb{C}_+, \end{cases} \qquad j\in\{1,3\},$$

$\Omega_1(z) = \psi_1(z)e^{-i\sigma z}$, $\Omega_3(z) = \psi_3(z)e^{i\sigma z}$. З означення випливає, що Ω_1 і Ω_3 належать до $H^2(\mathbb{C}_-)$. Доведемо, що

$$(\exists c_j\in\mathbb{R}) : \Omega_j(z)e^{-c_j z} \in H^2(\mathbb{C}_+), \quad j\in\{1,3\}. \tag{14}$$

Справді, з умови (12) і теореми 1 одержуємо

$$\Omega_1(z) = e^{ia_0+a_1 z}\prod_{|\lambda_n|\leqslant 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\overline{\lambda}_n}\prod_{|\lambda_n|>1} w(z,\lambda_n)\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(t,z)\left(\ln|\Phi_1(it)e^{\sigma t}/G(it)|dt + dh(t)\right)\right\}, \quad z\in\mathbb{C}_+,\ \lambda_n\in\mathbb{C}_+,$$

при цьому завдяки (13) виконується умова (4) для функції Ω_1. Але оскільки кутові граничні значення на $\partial\mathbb{C}_+$ функції Ω_1 з $\mathbb{C}_+$ і $\mathbb{C}_-$ збігаються м. с., то $\Phi_1(it)e^{\sigma t}/G(it) = F_1(it)e^{\sigma t} \in L^2(-\infty;+\infty)$ і [14]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln|F_1(it)e^{\sigma t}||}{1+t^2}dt < +\infty.$$

Тому з (4) маємо для Ω_1

$$\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r}\left(\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}-\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{r^2}\right)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)|dh(t)|=O(1).$$

Отже, (див. [1], [10], [15, с. 62])

$$\sum_{|\lambda_n|>1}\frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2}<+\infty,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+t^2}<+\infty.$$

Враховуючи наведене вище і (2), маємо (див. [14], [12]) (14) (подібно розглядається випадок $j=3$).

Доведемо, що Ω_1 — ціла функція. Нам досить переконатись, що Ω_1 аналітична в $\triangle_c(-1;1)$ для кожного дійсного c, де $\triangle_c(a,b)=\{z : a<\operatorname{Re}z<b; c<\operatorname{Im}z<c+1\}$. З [6] маємо, що Ω_1 належить до класу Смірнова $E^2\subset E^1$ в $\triangle_c(-1;0)$, і, завдяки (14), до класу $E^2\subset E^1$ в $\triangle_c(0;1)$, $c\in\mathbb{R}$. Тому [8] для $z\in\triangle(-1;0)\cup\triangle(0;1)$

$$\Omega_1(z)=\int\limits_{\partial\triangle_c(-1;0)}\frac{\Omega_1(t)}{t-z}dt+\int\limits_{\partial\triangle_c(0;1)}\frac{\Omega_1(t)}{t-z}dt=\int\limits_{\partial\triangle_c(-1;1)}\frac{\Omega_1(t)}{t-z}dt.$$

Оскільки $\Omega_1\in L^2[\partial\triangle_c(-1;1)]$, то $\Omega_1\in L^1[\partial\triangle_c(-1;1)]$, а тому Ω_1 аналітична в $\triangle_c(-1;1)$ для кожного дійсного c. Отже, Ω_j — цілі функції експоненціального типу, обмежені на $\partial\mathbb{C}_+$. Крім цього,

$$F_2(z)=\Omega_1(z)e^{i\sigma z}+\Omega_3(z)e^{-i\sigma z},\quad z\in\mathbb{C},$$

оскільки F_2, Ω_1 і Ω_3 — цілі і для $z\in\mathbb{C}_+$ ця рівність виконується. За теоремою Пелі-Вінера, F_2 — ціла функція експоненціального типу $\leqslant\sigma$, яка належить до $L^2(-\infty;+\infty)$ і її індикатор

$$h_{F_2}(\theta)\leqslant\sigma|\sin\theta|. \tag{15}$$

Нехай $d_j=\overline{\lim}_{x\to\infty}\frac{\ln|\Omega_i(x)|}{x}$. Якщо $d_1\leqslant 0$, $d_3\leqslant 0$, то $\Omega_1\in H^2(\mathbb{C}_+)$, $\Omega_1\in H^2(\mathbb{C}_-)$ і тому $\Omega_1\equiv 0$. Подібно $\Omega_3\equiv 0$. Якщо ж $d_j>0$, то [16, с.47-49] Ω_j — функція цілком регулярного зростання з індикатором $h_{\Omega_j}(\theta)=d_j\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, що приводить до суперечності з (15). Останнє і лема 3 доводять теорему. □

Зауваження 2. З теореми 2 випливає, що для $G\in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ умова (13) рівносильна до умови

$$\int\limits_{1<|t|<r}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|dt=O(1),\quad r\in[1;+\infty).$$

Відзначимо, що рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{0}f(x+\tau)g(x)dx=0,\quad \tau\leqslant 0,\ g\in L^2(-\infty;0),$$

яке можна вважати граничним випадком (при $\sigma = 0$) рівняння (1) має [17, с. 331] лише нульовий розв'язок $f \in L^2(-\infty; 0)$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$G(z) = \int_{-\infty}^{0} g(t)e^{tz}dt \in H^2(\mathbb{C}_+)$$

є зовнішньою, а зовнішня функція задовольняє умови (12) і (13). Однак ми не знаємо, чи є умови теореми 3 і необхідними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Винницкий Б. В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. – 1994. - Т.46, №5. – С.484–500.
2. Винницький Б. В. *Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій* // Доп. НАН України, Сер.А. – 1995. – №10. – С.13–17.
3. Винницький Б.В. *Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі* // Матем. студії. – 1997. – Т.7, №1. – С.41–52.
4. Григорян Ш. А. *О базисности неполных систем рациональных функций в угловой области* // Изв. АН Армянской ССР. Матем. – 1978. – Т.12, №5-6. – С. 460–487.
5. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. *Интерполяция целыми функциями и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – Т.39, №3. – С.657–702.
6. Седлецкий А. М. *Эквивалентное определение пространств* H^p *в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. – 1975. – Т.96, №1. – С.75–82.
7. Fedorov M. A., Grishin A. F. *Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane* // Math. Physics, Anal. Geom. – 1998. – V.1. – P.223–271.
8. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. – М.-Л.:ГИТТЛ, 1950. – 336 с.
9. Винницький Б. В. *Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині* // Матем. студії. – 1996. – Вып. 6. – С.67–72.
10. Vynnytskyi B. V., Sharan V. L. *On the factorisation of one class of functions analytic in the half-plane* // Матем. студії. – 2000. – V.15, №1. – P.41–48.
11. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций -М.:Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 311 с.
12. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.:Наука. 1964. – 268 с.
13. Дільний В. М. *Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій Харді-Смірнова* // Матем. студії. – 2000.- Т.14, №2. – С.171–174.
14. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М.:Мир, 1984. – 365 с.
15. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.:Наука, 1970. – 592 с.
16. Гурарий В. П. *Гармонический анализ в пространствах с весом* // Труды Моск. математ. общества. – 1976. – 35. – С.21–76.
17. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. – М.:Наука, 1980. – 383 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет фізико-математичний факультет,
82100, Львівська обл., м. Дрогобич, Стрийська 3

Надійшло 9.11.2000