УДК 517.518.6

В. В. Бритик*

ГОЛОМОРФНОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

V. V. Britik. *Solutions of algebraic equations with the analytic almost periodic coefficients*, Matematychni Studii, **15** (2001) 191–199.

We prove that continuous solutions of algebraic equations with the holomorphic in a tube domain almost periodic coefficients are almost periodic in this domain too.

В. В. Бритик. *Голоморфное решение алгебраического уравнения с аналитическими почти периодическими коэффициентами* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.191–199.

Доказано, что неперерывные решения алгеброидных решений с голоморфными в трубчатой области почти периодическими коэффициентами являются также почти периодическими.

Хорошо известно, что решения $w(z)$ уравнения

$$a_m(z)\,w^m + a_{m-1}(z)\,w^{m-1} + \cdots + a_1(z)\,w + a_0(z) = 0 \tag{1}$$

часто наследуют свойства коэффициентов $a_j(z)$, $j = 0, \ldots, m,$. Например, если коэффициенты почти периодические функции на оси, $a_m(z) = 1$, и дискриминант $D(z)$ полинома (1) удовлетворяет условию

$$|D(z)| \geq \gamma > 0, \tag{2}$$

тогда каждое решение (1) почти периодическая функция ([1], [2]). Однако условие (2) невозможно заменить более слабым условием

$$D(z) \neq 0 \tag{3}$$

даже для уравнения вида

$$w^2 - a_0(z) = 0 \tag{4}$$

(см. [3]). Тем не менее, для аналитических почти периодических коэффициентов $a_j(z)$, $j = \overline{0,m}$ в полосе S, условия $a_m(z) \equiv 1$ и (3) достаточны для того, чтобы каждое

2000 *Mathematics Subject Classification:* 43A60, 30D35.

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, проект 99-00089

непрерывное решение (1) было аналитической почти периодической функцией в полосе (см. [4]).

Заметим также, что классическую теорему Бора о делении аналитических почти периодических функций (см., например, [5], стр. 334) можно сформулировать следующим образом: аналитическое решение (1) для $m = 1$ и аналитических почти периодических функций $a_1(z)$, $a_0(z)$ в полосе также почти периодическая функция в полосе.

Естественно рассматривать аналитическое решение (1) с аналитическими почти периодическими коэффициентами без каких-либо ограничений на дискриминант $D(z)$. Нам известен один результат такого типа, именно, аналитическое решение (4) с аналитической почти периодической функцией $a_0(z)$ в полосе также почти периодическая функция. Однако, по нашему мнению, доказательство этого результата в [6] не полно.

В [7] был получен следующий результат:

Теорема A. *Пусть $w(z)$ непрерывное решение (1) в S и $a_k(z)$ — аналитические почти периодические функции в S для всех $0 \le k \le m$. Тогда $w(z)$ — аналитическая почти периодическая функция в S .*

Здесь мы, используя другой метод доказательства, распространяем этот результат на голоморфные почти периодические функции в трубчатых областях.

Пусть G выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Трубчатой областью T_G в $\mathbb{C}^n$ мы назовем множество вида $\{z : z = x + iy, y \in G, x \in \mathbb{R}^n\}$. Следуя [9], назовем функцию $f(z)$ *аналитической почти периодической в трубчатой области* T_G, если $f(z)$ принадлежит замыканию множества конечных экспоненциальных сумм вида

$$\sum a_n e^{i\langle z,\lambda_n\rangle}, \;\; a_n \in \mathbb{C}, \;\; \lambda_n \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{C}^n$$

в топологии равномерной сходимости в каждой меньшей трубчатой области $T_{G'}$, такой, что $G' \Subset G$.

Эквивалентное определение следующее: семейство $\{f(z+h)\}_{h\in\mathbb{R}^n}$ компактно в топологии равномерной сходимости в каждой меньшей трубчатой области $T_{G'}$, такой, что $G' \Subset G$.

Обозначим пространство голоморфных почти периодических функций в T_G через $APH(T_G)$. Будем говорить, что последовательность функций $f_n(z)$сходиться к функции $f(z)$ в $APH(T_G)$, если в любой $T_{G'}$, такой, что $G' \Subset G$, последовательность сходится равномерно , т.е.

$$\sup_{T_{G'}} |f_n(z) - f(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{5}$$

(нетрудно видеть, что в этом случае $f \in APH(T_G)$).

Поскольку любую область $G' \Subset G$ можно покрыть конечным числом прямоугольных параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$, условие (5) можно проверять только для областей $T_{G'}$, где G' — такой параллелепипед.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$ непрерывное решение уравнения*

$$a_m(z)\,w^m + a_{m-1}(z)\,w^{m-1} + \ldots + a_1(z)\,w + a_0(z) = 0 \tag{6}$$

в T_G и $a_k(z) \in APH(T_G)$, $0 \le k \le m$. Тогда $w(z) \in APH(T_G)$.

Будем считать, что дискриминант уравнения (6) не тождественный нуль в T_G. В противном случае, дословно повторив соответствующие выкладки из (см. [7]), можно свести задачу к случаю с ненулевым дискриминантом.

Теорему 1 получим из следующего несколько более общего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $a_{j,k}(z)$, $j \in \overline{0,m}$, $k \in \mathbb{Z}$ — функции из $APH(T_G)$, причем $a_{j,k}(z)$ сходятся к $\overline{a}_j(z)$ в пространстве $APH(T_G)$, $j \in \overline{0,m}$. Пусть, далее, старший коэффициент $\overline{a}_m(z)$ и дискриминант $\overline{D}(z)$ уравнения*

$$\overline{a}_m(z)\, w^m + \overline{a}_{m-1}(z)\, w^{m-1} + ... + \overline{a}_1(z)\, w + \overline{a}_0(z) = 0 \tag{7}$$

не равны тождественно нулю. Тогда из любой последовательности непрерывных решений уравнений

$$a_{m,k}(z)w^m + ... + a_{1,k}(z)w + a_{0,k}(z) = 0 \tag{8}$$

можно выделить подпоследовательность, которая сходится в $APH(T_G)$ к непрерывному (и голоморфному) решению уравнения (7).

Укажем, как из этой теоремы следует теорема 1. Действительно, согласно определению почти периодической функции $f(z)$, из любой последовательности сдвижек $f\left(z+h^k\right)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $APH(T_G)$, и предельная функция будет также почти периодической в T_G. Не ограничивая общности, будем считать, что $a_j(z+h^k)$ сходятся к $\overline{a}_j(z)$ в $APH(T_G)$. Предельным уравнением назовем уравнение вида (7). Обозначим $\overline{D}(z)$– дискриминант (7). Так как у исходного уравнения $a_m(z) \not\equiv 0$ и $D(z) \not\equiv 0$,то $\overline{a}_m(z) \not\equiv 0$ и $\overline{D}(z) \not\equiv 0$ в силу равномерной сходимости. Можно рассматривать $w(z+h^k)$, как последовательность решений. Доказав возможность выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к решению предельного уравнения, тем самым покажем, что семейство $w(z+h^k)$ компактное, а значит $w(z)$– почти периодическая.

Заметим, что теорема 2 при $n=1$ была по существу доказана в [7]: для этого надо только в доказательстве теоремы 1 $a_j(z+h^k)$ заменить на $a_{j,k}(z)$, а $w(z+h^k)$ на $w_k(z)$. Поэтому доказывать теорему 2 для произвольного n можно в предположении, что при $n-1$ теорема 2, а, значит, и теорема 1, уже доказана. Далее, так как любая функция из $APH(T_G)$ ограничена в любой области $T_{G'}$, $G' \Subset G$, можно при доказательстве теоремы, не ограничивая общности, считать, что все $a_j(z)$ ограничены в T_G.

Доказательство теоремы 2 опирается на следующую лемму, в дальнейшем называемую основной.

Лемма (основная). *В условиях теоремы 2 положим для $\delta > 0$*

$$M_\delta = \{z \in T_G : |\overline{D}(z)| > \delta \ \ u \ \ |\overline{a}_m(z)| > \delta\}$$

и пусть $\tilde{M}_\delta$– какая-нибудь связная компонента множества M_δ, а $w_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$ какие-нибудь непрерывные решения уравнений (8). Тогда для любого $0 < \varepsilon \le \varepsilon(\delta)$ и $N > N(\delta)$ выполнение неравенства $|w_k(z) - w_i(z)| \le \varepsilon$ при $i, k > N(\delta)$ в одной точке $\tilde{M}_\delta$ влечет выполнение этого неравенства на всем $\tilde{M}_\delta$.

В частности, если последовательность $w_k(z)$ сходится в одной точке $\tilde{M}_\delta$, то она равномерно сходится во всем $\tilde{M}_\delta$.

Доказательство опирается на две элементарные леммы о корнях полиномов

$$Q\left(w\right) = w^m + b_{m-1}w^{m-1} + \ldots + b_1 w + b_0. \tag{9}$$

(см. [7]) Пусть $d\left(Q\right)$ – дискриминант $Q\left(w\right)$, $M\left(Q\right) = \max_j \left|b_j\right|$, и $\delta(Q,\tilde{Q}) = \max_j \left|b_j - \tilde{b_j}\right|$ для полиномов $Q\left(w\right)$, $\tilde{Q}(w)$ вида (9).

Лемма 1. *Расстояние между любыми двумя корнями полиномов вида (9) с $d\left(Q\right) \neq 0$ больше чем $\tau > 0$, где постоянная τ зависит только от $\left|d\left(Q\right)\right|$ и $M\left(Q\right)$.*

Лемма 2. *Для любых $N < \infty$, $\varepsilon > 0$, существует постоянная $\nu > 0$, зависящая только от N и ε такая, что корни $\{w_j\}_{j=1}^m$, $\{\tilde{w}_j\}_{j=1}^m$ полиномов Q, $\tilde{Q}$ с $M(Q) \leq N$, $M\left(\tilde{Q}\right) \leq N$, $\delta\left(Q,\tilde{Q}\right) \leq \nu$ и подходящей нумерацией удовлетворяют условиям $\left|w_j - \tilde{w}_j\right| < \varepsilon$, $j = 1,\ldots,m$.*

Доказательство леммы (основной). Из определения M_δ и ввиду равномерной сходимости и ограниченности коэффициентов $a_{j,k}\left(z\right)$ найдется такое N, что для всех $k > N$ в точках множества M_δ выполняются неравенства $\left|d_k(z)\right| \geq \frac{\delta}{2M}$, $\left|a_{m,k}(z)\right| \geq \frac{\delta}{2}$, где $M = \max_{T_G}\left|\overline{a}_m(z)\right|$ и $d_k(z)$ дискриминант полинома

$$Q_k\left(w\right) = w^m + \frac{a_{m-1,k}\left(z\right)}{a_{m,k}\left(z\right)}w^{m-1} + \ldots + \frac{a_{0,k}\left(z\right)}{a_{m,k}\left(z\right)}.$$

В силу леммы 1 мы получаем, что расстояние между двумя корнями полиномов $Q_k(w)$ больше, чем $\tau = \tau(\delta) > 0$, τ не зависит от k. Так как $a_{j,k}(z)/a_{m,k}(z)$ сходятся равномерно по $z \in M_\delta$ к $\overline{a}_j(z)/\overline{a}_m(z)$, то для $Q_k(w)$ и $Q_i(w)$ существует такое N_1, что для всех $k,i > N_1$ полиномы $Q_k(w)$ и $Q_i(w)$ удовлетворяют условиям леммы 2, а значит для каждого фиксированного z из M_δ существует решение $\tilde{w}(z)$ уравнения $Q_i(w) = 0$ такое, что $\left|w_k(z) - \tilde{w}(z)\right| \leq \varepsilon$. При этом можно считать $\varepsilon \leq \varepsilon(\delta) = \frac{\tau}{3}$. Теперь имеется только две возможности для точек $z \in M_\delta$:
либо

$$\tilde{w}(z) = w_i(z) \;\; u \;\; \left|w_k(z) - w_i(z)\right| \leq \varepsilon = \frac{\tau}{3}, \tag{10}$$

либо

$$\tilde{w}(z) \neq w_i(z) \, u \, \left|w_k(z) - w_i(z)\right| \geq \left|\tilde{w}(z) - w_i(z)\right| - \left|w_k(z) - \tilde{w}(z)\right| \geq \frac{2}{3}\tau. \tag{11}$$

Зафиксируем точку $z_0 \in \tilde{M}_\delta$. Пусть (10) выполняется в точке z_0. Так как множество $\tilde{M}_\delta$ связно, а функция $\left|w_k(z) - w_i(z)\right|$– непрерывна, то неравенство (11) не реализуется в $\tilde{M}_\delta$. Осталось положить $N(\varepsilon,\delta) = \max(N, N^1)$. □

Для доказательства теоремы нам потребуется также следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $f(z) \in APH(T_G)$, $G \Subset G' \subset \mathbb{R}^n$, тогда множество точек $(\tau') \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что $(\tau',0)$ — ε-почти период $f(z)$, относительно плотно в $\mathbb{R}^{n-1}$.*

Доказательство леммы 3. Пусть это не так, тогда существует ε_0 такое, что для всех сколь угодно больших $l \in \mathbb{R}_+$ существует куб со стороной l в $\mathbb{R}^{n-1}$ такой, что в этом кубе нет ε_0- почти периодов функции $f(z)$. Другими словами, для всех τ' из этого куба $\sup_{T_{G'}} |f(z+(\tau',0)) - f(z)| > \varepsilon_0$. Пусть последовательность l_i такая, что $l_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Обозначим C_i- куб, соответствующий l_i, а $t_i'-$ центр этого куба. Построим подпоследовательность $f(z+h_j)$ следующим образом.
Положим $h_1 = (t_1', 0)$. Далее выберем l_{i_2} такое, что $|l_{i_2}| > 2(|h_1| + l_1)$ и положим $h_2 = (t_{i_2}', 0)$, далее $|l_{i_j}| > 2(|h_{j-1}| + l_{i_{j-1}})$ и $h_j = (t_{i_j}', 0)$ Не ограничивая общности, в силу компактности семейства сдвижек $f(z+h_i)$, будем считать последовательность $f(z+h_i)$ сходящейся в $APH(T_G)$, то есть $\sup_{T_{G'}} |f(z+h_i) - f(z+h_{i-1})| \to 0$ при $i \to \infty$ Но тогда $\sup_{T_{G'}} |f(z+h_i-h_{i-1}) - f(z)| < \varepsilon_0$ для достаточно больших i, что силу выбора h_i невозможно. □

Продолжим доказательство теоремы 2. Покажем, что $w_k(z)$ — непрерывное решение (8) есть голоморфная функция в T_G. Зафиксируем произвольно $z^0 \in T_G$. Пусть $D_k(z)$ — дискриминант (8). Можно считать k столь большим, что $D_k(z) \not\equiv 0$. Предположим, что $D_k(z)$ и $a_{m,k}(z)$ не равны тождественно нулю, как функции каждой координаты при фиксированных остальных в окрестности z^0. В этом предположении рассмотрим $w_k(z_1, \prime z)$ как функцию z_1. По теореме о неявной функции решение $w_k(z_1, \prime z)$ аналитично в окрестности каждой точки $(z_1, \prime z)$ такой, что $D_k(z_1, \prime z) \neq 0$ и $a_{m,k}(z_1, \prime z) \neq 0$. Так как нули $D_k(z_1, \prime z)$ и $a_{m,k}(z_1, \prime z)$ как функций переменной z_1 изолированны, а функция $w_k(z_1, \prime z)-$ непрерывна и аналитична в окрестности этой точки, то она аналитична и в самой точке. Аналогично доказывается и аналитичность по другим переменным. Применяя теорему Гартогса, получаем аналитичность $w_k(z)$ как функции от $z \in T_G$ в окрестности z^0.

Осталось доказать, что в произвольной точке z существует такая линейная замена координат, при которой $D_k(z)$ и $a_{m,k}(z)$ не равны тождественно нулю как функций от каждой отдельно взятой координаты в окрестности z^0.
Не ограничивая общности, положим $z = 0$ и пусть

$$z_j = a_{j1}\xi_1 + \ldots + a_{jn}\xi_n, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

ξ_i — новые переменные. Рассмотрим функцию $D_k(z)a_{m,k}(z)$. Разложим ее в ряд по однородным полиномам. Рассмотрим полиномы минимальной степени и сделаем подстановку (12). Пусть для определенности минимальная степень полиномов равна p. Тогда новое разложение $w_k(z)$ в ряд содержит члены вида $\Big(\sum\limits_{p_1+\ldots+p_n=p} a_{1i}^{p_1} \cdots a_{ni}^{p_n}\Big)\xi_i^p$, Причем эти и только эти члены разложения содержат ξ_i^p. Рассмотрим произведение коэффициентов такого разложения для всех $i = \overline{1,n}$. Полученное выражение имеет вид полинома от переменных $a_{11}, \cdots, a_{nn}$. Выберем $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ такие, что этот полином не равен тождественно нулю. После замены (12) с такими коэффициентами функции $D_k(z)$ и $a_{m,k}(z)$, как функции от каждой координаты не будут равны нулю тождественно в окрестности 0.

Теперь покажем, что из последовательности $\{w_k(z)\}$ можно выделить сходящуюся равномерно на компактах в T_G подпоследовательность. Для этого сначала проверим, что из последовательности $w_k\,(z)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в окрестности произвольной точки.

Пусть в точке z_0 выполняются условия $\overline{D}(z_0) \neq 0$ и $\overline{a}_m(z_0) \neq 0$. В силу равномерной непрерывности $\overline{D}(z_0)$ и $\overline{a}_m(z_0)$ существуют такие ε и γ_0, что $|\overline{D}(z_0)| > \gamma_0$ и $|\overline{a}_m(z_0)| > \gamma_0$ в $\varepsilon-$ окрестности точки z_0. В силу сходимости $a_{j,k}(z)$ к $\overline{a_j}(z)$ в $APH(T_G)$ для достаточно больших n в этой окрестности выполняются неравенства $|a_{m,k}(z)| > \gamma_0/2$ и $|D_k(z)| > \gamma_0/2$. Так как коэффициенты $a_{j,k}(z)/a_{m,k}(z)$ приведенных уравнений равномерно ограничены общей константой, то семейство $\{w_k(z)\}$ ограничено в этой окрестности общей константой, а следовательно, существует подпоследовательность, сходящаяся равномерно в окрестности z_0.

Пусть в точке z_0 выполняется хотя бы одно из равенств $\overline{D}(z_0) = 0$ и $\overline{a}_m(z_0) = 0$ и при этом $\overline{D}(z_1, \prime z) \not\equiv 0$ и $\overline{a}_m(z_1, \prime z) \not\equiv 0$ как функции от переменной z_1. Тогда существуют $\overline{r} > r$ и $\gamma > 0$ такие,что в кольце $B_{\overline{r}}(z_1) \backslash B_r(z_1) \subset \mathbb{C}$ выполнены неравенства $|\overline{a}_m(z_1, \prime z_0)| > \gamma$ и $|\overline{D}(z_1, \prime z)| > \gamma$. В силу равномерной непрерывности $\overline{a}_m(z)$ найдется такое r_1, что в окрестности,

$$\{z : z_1 \in B_{\overline{r}}(z_1) \backslash B_r(z_1), \quad \prime z \in U_{\overline{r}_1}(\prime z_0)\} \tag{13}$$

где $U_{\overline{r}_1}(\prime z_0)-$ окрестность $\prime z_0$ в $\mathbb{C}^{n-1}$, выполняются неравенства $|\overline{a}_m(z)| > \gamma/2$ и $|\overline{D}(z)| > \gamma/2$. Применив основную лемму к связному множеству (13), получим равномерную сходимость $w_k(z)$ на множестве (13). Применяя принцип максимума к функциям $(w_k(z) - w_{\overline{k}}(z))$, получаем равномерную сходимость на множестве $\{z : z_1 \in B_{\overline{r}}(z_1, \prime z_0)\ , \prime z \in B_{\overline{r}_1}(\prime z_0)\}$. Случай $\overline{a}_m(z_1, \prime z) \equiv 0$ или $\overline{D}(z_1, \prime z) \equiv 0$ как функции от переменной z_1 сводится к рассмотренному после подходящей линейной замены вида (12). Так как любой компакт в T_G можно покрыть конечным числом окрестностей, в которых можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то, применяя диагональный процесс, получаем подпоследовательность $\{w_{k'}(z)\}$ сходящуюся равномерно на компактах в T_G. Не ограничивая общности, будем считать, что $\{w_k(z)\}$ сходится к какому-то голоморфному решению предельного уравнения.

Покажем, что эта сходимость будет сходимостью в $APH(T_G)$, то есть в любой $T_{G'}$, такой, что G' — прямоугольный параллелепипед, компактно вложенный в G, последовательность сходится равномерно в $T_{G'}$. По предположению $\overline{D}(z) \not\equiv 0$, тогда найдется такая точка z_0, что $\overline{D}(z_0) \neq 0$. Не теряя общности будем считать, что $z_0 = 0$. Пусть S — такая полоса в $\mathbb{C}$, что $T_{G'} \bigcap \{z : z\prime = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^n : z\prime = 0, z_n \in S\}$ и S_0, S_1, S_2 — полосы в $\mathbb{C}$ такие, что $S_0 \Subset S_1 \Subset S_2 \Subset S$. Обозначим $Z_S(\overline{a}_m(0\prime, z_n))$ и $Z_S(\overline{D}(0\prime, z_n))$ нули $\overline{a}_m(0\prime, z_n)$ и $\overline{D}(0\prime, z_n)$ как функций переменной z_n в полосе S. Пусть, далее, U_r будет r-окрестностью множества $[Z_S(\overline{a}_m(0\prime, z_n)) \cup Z_S(\overline{D}(0\prime, z_n))] \cap S_2$. Проверим, что r можно выбрать так, чтобы существовали прямоугольники Π_l такие, что $S_0 \subset \bigcup_l \Pi_l \subset S_1$ и $\partial \Pi_l$ не пересекались с U_r для всех $l \in N$. Так как функции $\overline{a}_m(0\prime, z_n)$ и $\overline{D}(0\prime, z_n)$ почти периодические как функции от z_n в S, то количество нулей функций $[Z_S(\overline{a}_m(0\prime, z_n)) \cup Z_S(\overline{D}(0\prime, z_n))]$ внутри прямоугольника $\{z \in S_2 : |\operatorname{Re} z_n - t| < 1\}$ ограничено числом K, не зависящим от $t \in \mathbb{R}$ (можно посмотреть например [5], стр. 347). Следовательно, для $r < \frac{1}{4k}$ и для всех $t \in \mathbb{R}$ существует $c_t \in \mathbb{R}$ такое, что $|c_t - t| < 1$ и прямая $\operatorname{Re} z_n = t$ не пересекаются с U_r. Тогда существует последовательность прямоугольников $\{z_n \in S_1 : c_l \leq \operatorname{Re} z_n \leq c_l'\}$ покрывающих полосу S_1 таких, что вертикальные стороны прямоугольников не пересекались с U_r. Далее, положим

$$r < (8k)^{-1} \min\{\inf\{|z_n - z_n'| : z \in S_0, z_n' \notin S_1\}, \inf\{|z_n - z_n'| : z_n \in S_1, z_n' \notin S_2\}\}.$$

Тогда существуют сегменты $\{z_n : \operatorname{Im} z_n = d_l, c_l \leq \operatorname{Re} z_n \leq c_l'\} \subset S_1 \setminus S_0$ не пересекающиеся с U_r. Тогда прямоугольники $\Pi_l = \{z_n : c_l \leq \operatorname{Re} z_n \leq c_l', d_l \leq \operatorname{Re} z_n \leq d_l'\}$ с подходящими d_l, $d_l^{'}$ те, что требовались. При этом можно считать, что длины прямоугольников равномерно ограничены. Сдвигая начало координат по переменной $x_n = \operatorname{Re} z_n$ можно считать, что 0 лежит на стороне одного из прямоугольников. Так как почти периодические функции вне r-окрестности нулевого множества ограничены от нуля (см. [5], стр. 347), то можно считать, что для некоторого $\gamma > 0$, $|\overline{a}_m(0\prime, z_n)| \geq 4\gamma$ и $|\overline{D}(0\prime, z_n)| \geq 4\gamma$ вне U_r.

Рассмотрим множество γ-почти периодов функции $\overline{D}(z)$ вида $\{(\tau^{'}, 0)\}$, $\tau^{'} \in \mathbb{R}^{n-1}$. В силу леммы 3, множество $\{\tau^{'}\}$ относительно плотно в $\mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим также множество $\gamma-$ почти периодов функции $\overline{a}_m(z)$ вида $\{(\tau^{'}, 0)\}$, $\tau^{'} \in \mathbb{R}^{n-1}$.
Поскольку эти функции равномерно непрерывны в $T_{G'}$, то, повторяя классическое доказательство из книги (см.,[8], стр.46), нетрудно увидеть, что множество

$$E = \{\tau^{'} : (\tau^{'}, 0) \text{ есть общий почти период для функций } \overline{D}(z) u \ \ \overline{a}_m(z)\}$$

относительно плотно в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Рассмотрим множества $S_\alpha(\tau^{'}) = \{z \in T_G : z' = \tau^{'}, z_n \in S_\alpha\}$ где $\alpha = 0, 1, 2$. Аналогично введем $\Pi_l(\tau^{'}) = \{z \in S_2(\tau^{'}) : z' = \tau^{'}, z_n \in \Pi_l\}$ и $(\partial\Pi_l)(\tau^{'}) = \{z \in S_2(\tau^{'}) : z' = \tau^{'}, z_n \in \partial\Pi_l\}$. Кроме того, на $z_n \in \partial\Pi_l$ выполняются неравенства

$$|\overline{a}_m(0\prime, z_n)| \geq 4\gamma, \quad |\overline{D}(0\prime, z_n)| \geq 4\gamma,$$

поэтому на $(\partial\Pi_l)(\tau^{'})$, $\tau^{'} \in E$, выполняются неравенства

$$|\overline{a}_m(z)| \geq 3\gamma \quad u \quad |\overline{D}(z)| \geq 3\gamma$$

Рассмотрим уравнения (8) и (7) при $z \in F_{G'} = T_{G'} \cap \{(z\prime, z_n) : z_n = 0\}$

$$a_{m,k}(z', 0)\, w^m + a_{m-1,k}(z', 0)\, w^{m-1} + ... + a_{1,k}(z', 0)\, w + a_{0,k}(z', 0) = 0. \tag{14}$$

$$\overline{a}_m(z', 0)\, w^m + \overline{a}_{m-1}(z', 0)\, w^{m-1} + ... + \overline{a}_1(z', 0)\, w + \overline{a}_0(z', 0) = 0. \tag{15}$$

По предположению индукции голоморфные решения (14) $w_k(z', 0)$ после перехода к подпоследовательности сходятся равномерно на $F'_{G'}$ к $\tilde{w}(z', 0)$ – решению (15) в $F_{G'}$. Но так как $w_i(z)$ сходятся равномерно на компактах к $\overline{w}(z)$ — решению (7), то $\tilde{w}(z', 0) = \overline{w}(z', 0)$ на $F_{G'}$. Так как $\{w_i(z', 0)\}$ — последовательность Коши на $F_{G'}$, то неравенства

$$|w_k(z) - w_{\overline{k}}(z)| \leq \delta, \quad k, \overline{k} \geq k(\delta) \tag{16}$$

выполняются во всех точках $\{(\tau^{'}, 0) : \tau^{'} \in E\}$ одновременно. Из основной леммы получаем, что выполнение неравенства (16) в одной точке достаточно для выполнения этого неравенства в связной компоненте множества $\{z : |\overline{a}_m(z)| \geq \gamma$ и $|\overline{D}(z)| \geq 3\gamma\}$, содержащей эту точку, поэтому (16) выполняется на множестве $A = \bigcup_{\tau^i \in E} \bigcup_l (\partial\Pi_l)(\tau^{'})$. т.е. $w_k(z)$ последовательность Коши на этом множестве. Таким образом, из того, что $w_k(z)$ сходится к $\overline{w}(z)$ на компактах, следует, что $w_k(z)$ равномерно (после перехода к подпоследовательности) сходится к $\overline{w}(z)$ на множестве A.

Покажем, что эта сходимость будет сходимостью во всей T_G в смысле сходимости в $APH(T_G)$.

Предположим противное. Тогда существует последовательность $z^k = x^k + iy^k \in T_{G'}$ такая, что

$$|w_k(iy^k + x^k) - \overline{w}(iy^k + x^k)| > \delta. \tag{17}$$

Рассмотрим вспомогательные семейства $\{a_{j,k}(z+x^k)\}$ и $\{\overline{a}_j(z+x^k)\}$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\overline{a}_j(z+x^k)$ сходится к $\tilde{a}_j(z)$ в $APH(T_G)$. Далее, так как $a_{j,k}(z)$ сходится к $\overline{a}_j(z)$ в $APH(T_G)$, то

$$\sup_{T_{G'}} |\tilde{a}_j(z) - a_{j,k}(z+x^k)| \leq \sup_{T_{G'}} |\tilde{a}_j(z) - \overline{a}_j(z+x^k)| + \sup_{T_{G'}} |a_{j,k}(z+x^k) - \overline{a}_j(z+x^k)|.$$

Поэтому $a_{i,k}(z+x^k)$ сходится равномерно в $T_{G'}$ к $\tilde{a}_i(z)$. Аналогично получаем, что $D_k(z+x^k)$ и $\overline{D}(z+x^k)$ в $APH(T_G)$ сходятся к $\tilde{D}(z)$ — дискриминанту полинома из левой части уравнения

$$\tilde{a}_m(z)\, w^m + \tilde{a}_{m-1}(z)\, w^{m-1} + ... + \tilde{a}_1(z)\, w + \tilde{a}_0(z) = 0. \tag{18}$$

Так как $y^k \in G' \subset\subset G$, то можно считать, что последовательность y^k сходится к $y^0 \in \overline{G'}$.

Аналогично доказанному ранее для уравнений (6) и (7), доказывается, что подпоследовательность $w_{k_i}(z+x^{k_i})$ сходится равномерно на компактах к $w^{(1)}(z)$ и $\overline{w}(z+x^{k_i})$ сходится равномерно на компактах к $w^{(2)}(z)$. В дальнейшем считаем, что сама последовательность сходится. Нетрудно видеть, что $w^{(1)}(z)$ и $w^{(2)}(z)$ голоморфные решения (18). Из их непрерывности следует, что для достаточно больших k:

$$|w^{(1)}(iy^k) - w^{(1)}(iy^0)| \leq \frac{\delta}{6}, \quad |w^{(2)}(iy^k) - w^{(2)}(iy^0)| \leq \frac{\delta}{6}.$$

Из сходимости $w_k(z+x^k)$ к $w^{(1)}(z)$ на компактах следует неравенство:

$$|w^{(1)}(iy^k) - w_k(iy^k + x^k)| \leq \frac{\delta}{6}.$$

И поэтому

$$|w_k(iy^k + x^k) - w^{(1)}(iy^0)| < \frac{\delta}{3}. \tag{19}$$

Аналогично

$$|\overline{w}(iy^k + x^k) - w^{(2)}(iy^0)| < \frac{\delta}{3}. \tag{20}$$

Из неравенства (17) и неравенств (19) и (20) для достаточно больших k следует неравенство:

$$|w^{(1)}(iy^0) - w^{(2)}(iy^0)| \geq \frac{\delta}{3}.$$

Таким образом $w^{(1)}(z)$ и $w^{(2)}(z)$ различные решения уравнения (18). Так как $\overline{D}(z+x^k)$ и $\overline{a}_m(z+x^k)$ сходится в $APH(T_G)$ соответственно к $\tilde{D}(z)$ и $\tilde{a}_m(z)$, то при $k \geq k_0$, $z \in T_{G'}$ в точках $G' \subset\subset G$ выполняются неравенства

$$|\overline{a}_m(z+x^k) - \tilde{a}_m(z)| \leq \gamma, \quad |\overline{D}(z+x^k) - \tilde{D}(z)| \leq \gamma.$$

Если теперь выполняются неравенства $|\overline{a}_m(z+x^k)| \geq 3\gamma$ и $|\overline{D}(z+x^k)| \geq 3\gamma$ то для этого z выполняются неравенства $|\tilde{a}_m(z)| \geq 2\gamma$ и $|\tilde{D}(z)| \geq 2\gamma$. А поскольку $w^{(1)}(z)$ и $w^{(2)}(z)$ различные решения уравнения (18), то по лемме 1 существует $\delta_1 > 0$ такое, что

$$|w^{(1)}(z) - w^{(2)}(z)| \geq \delta_1 \tag{21}$$

в точках множества $\{z : |\tilde{a}_m(z)| \geq 2\gamma$ и $|\tilde{D}(z)| \geq 2\gamma\}$.

Положим $A_k := A - x^k$. Так как в точках этого множества $w_k(z)$ сходится к $\overline{w}(z)$ равномерно, то при $k \geq k^1$ и $z \in A_k$

$$|w_k(z + x^k) - \overline{w}(z + x^k)| < \frac{\delta_1}{4}. \qquad (22)$$

Заметим, что расстояние от точек $T_{G'}$ до множества A равномерно ограничено сверху, поэтому можно выбрать компакт $K = \{z : x + iy : |x| \leq l, y \in \overline{G'}\}$ таким образом, что он имеет непустое пересечение с A_k при любом k.

Так как на компактах $w_k(z + x^k)$ и $\overline{w}(z + x^k)$ сходятся, соответственно, к $w^{(1)}(z)$ и $w^{(2)}(z)$, то при $k \geq k_2$ на K выполняются неравенства:

$$|w^{(1)}(z) - w_k(z + x^k)| \leq \frac{\delta_1}{4}, \quad |w^{(2)}(z) - \overline{w}(z + x^k)| \leq \frac{\delta_1}{4}. \qquad (23)$$

Поэтому для $z \in A_k \cap K$ и $k \geq \max\{k_0, k_1, k_2\}$ из (22), (23) следует:

$$|w^{(1)}(z) - w^{(2)}(z)| \leq |w^{(1)}(z) - w_k(z + x^k)| + |w_k(z + x^k) - \overline{w}(z + x^k)| +$$
$$+|\overline{w}(z + x^k) - w^{(2)}(z)| \leq \frac{3\delta_1}{4}.$$

Это противоречит (21). Итак, семейство $w_k(z)$ — компактное, что и доказывает теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cameron R. H. *Implicit functions of almost periodic functions* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – V.40. – P.895–904.
2. Bohr H., Flanders D. A. *Algebraic equation with almost-periodic coefficients* // Mat.-fysike Medd. – 1937. – №15. – P.1–49.
3. Walther A. *Algebraische Funktionen von fastperiodischen Funktionen* // Monatshefte für Mathematik und Physik. – 1933. – Bd. 40. – P.444–457.
4. Bohr H., Flanders D. A. *Algebraic functions of almost-periodic functions*// Duke Math. J. – 1938. – №4. – P.779–787.
5. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. – Москва: ГИТТЛ., 1953. – 396 с.
6. Jessen B., Torneave H. *Mean motion and zeros of almost-periodic functions* // Acta Math. – 1945. – V.77. – P.137–279.
7. Brytik V. V., Favorov S. Yu. *Solution of algebraic equations with almost-periodic coefficients* // МАГ. – 2000. – №4. – P.380–386.
8. Бор Г. Почти периодические функции. – Москва-Ленинград, ОГИЗ., 1934. – 128 с.
9. Ронкин Л.И., *Теоремы Иессена для голоморфных почти периодических функций в трубчатых областях* // Сиб. мат. журн. – 1987. –Т.28, №3. – С.199–204.

Харьков национальный университет,
пл. Свободы 4, Харьков, 61077, Украина
vladimir@valbri.kharkov.ua

Поступило 30.08.2000