УДК 517.956

Г. П. Лопушанська

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ІЗ СИЛЬНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ В ПРАВИХ ЧАСТИНАХ

H. P. Lopushanska. *On the solution of the parabolic boundary value problem with strong power singularities on the right*, Matematychni Studii, **15** (2001) 179–190.

The solvability of the normal parabolic boundary value problem in special spaces of the generalized functions (containing functions with power singularities) is proved.

Г. П. Лопушанская. *О решении параболической краевой задачи при наличии сильных степенных особенностей в правых частях* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.179–190.

Доказана разрешимость нормальной параболической краевой задачи в специальных пространствах обобщенных функций (содержащих функции со степенными особенностями).

Нехай Ω_0 — область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею Ω_1 з класу C^∞, $Q_i = \Omega_i \times (0,T]$ $(i=0,1)$, $Q_2 = \Omega_0$.

Використовуватимемо такі простори функцій:

$$D(\overline{Q}_i) = C^\infty(\overline{Q}_i), \quad D^0(\overline{Q}_i) = \{\varphi \in D(\overline{Q}_i) : (D_t)^k \varphi \,|_{t=T} = \left.\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}\right|_{t=T} = 0,\, k=0,1,\dots\},$$

$$D_0(\overline{Q}_i) = \{\varphi \in D(\overline{Q}_i) : (D_t)^k \varphi \,|_{t=0} = 0,\, k=0,1,\dots\}, \quad i=0,1,$$

$$D_0(\overline{Q}_2) = D_0(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}_0) : D^\alpha \varphi \,|_{\Omega_1} = 0 \,\text{для довільного мультиіндексу}\, \alpha\},$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Штрихами позначатимемо простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій та вектор-функцій) на відповідних функціональних просторах, а через $(\varphi, F)_i$ — значення узагальненої функції $F \in D'(\overline{Q}_i)$ $\big($відповідно $F \in (D^0(\overline{Q}_i))'\big)$ на основній функції $\varphi \in D(\overline{Q}_i)$ $\big($відповідно $\varphi \in (D^0(\overline{Q}_i))\big)$, $i=0,1,2$.

Розглядаємо нормальну крайову задачу для $2b$-параболічної системи рівнянь [1,2]

$$Lu \equiv (D_t - A(x,t,D_x))u(x,t) = F_0(x,t),\, (x,t) \in Q_0,$$
$$B_j u \equiv \sum_{|\alpha|\le r_j} b_{j\alpha}(x,t) D^\alpha u \,|_{Q_1} = F_j, \quad 0 \le r_j \le 2b-1, 1 \le j \le m,\, m = bp, \tag{1}$$
$$u\,|_{t=0} = F_{m+1},$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K35.

де u — вектор-функція (стовпець висоти p), $A(x,t,D_x) = \sum_{|\alpha|\le 2b} a_\alpha(x,t) D^\alpha$, $a_\alpha(x,t)$ — квадратні порядку p матриці з нескінченно диференційовними елементами. Система крайових диференціальних виразів B_j є нормальною на Q_1 [2-4] і задовольняє умову Лопатинського.

У [2] на основі дослідження операторів Гріна [1-4], а в [5] на основі теорем про ізоморфізми доведена розв'язність крайових задач для параболічних систем відповідно в гельдерових та соболєвих просторах узагальнених функцій. У [6] доведено розв'язність (в іншому формулюванні) нормальної параболічної крайової задачі (1) з даними із просторів типу D'. У [4] та [6] одержано зображення розв'язків за допомогою векторфункцій Гріна.

Функції з високими степеневими особливостями не належать до просторів узагальнених функцій типу гельдерових, соболєвих чи D'. Використовуючи методи регуляризації, у [7,8] доведено розв'язність еліптичних, а в [9] — параболічних крайових задач за наявності степеневих особливостей довільного порядку.

У [10] та [11] вивчені спеціальні класи функцій із степеневими особливостями і одержано точні оцінки композиції ядер з неінтегровними особливостями. У [10] на основі вивчення операторів Гріна еліптичної крайової задачі в спеціальних класах функцій одержано точні оцінки розв'язку узагальненої (у певному розумінні) еліптичної крайової задачі з особливостями в правих частинах, але не високого порядку. У [12] на основі іншого, подібного до [6], трактування узагальненого розв'язку задачі доведено розв'язність нормальної еліптичної крайової задачі при сильних степеневих особливостях даних.

У даній статті результати [12] поширюються на випадок нормальної параболічної крайової задачі (1).

У [2-4, 13] досліджено матрицю Гріна $G = (G_0, G_1, \ldots, G_m)$ задачі (1), оператори Гріна

$$(\mathcal{G}_i\varphi)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_{(i)}} G_i(x,t,y,\tau)\varphi(y,\tau)dy$$

та спряжені оператори Гріна

$$(\hat{\mathcal{G}}_i\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} \varphi(x,t) G_i(x,t,y,\tau)dx, \quad 0 \le i \le m,$$

$$(\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi)(y) = (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,0), \quad (i) = \begin{cases} 1, & 1 \le i \le m \\ 0, & i = 0 \text{ або } i = m+1. \end{cases}$$

Зокрема, встановлено оцінки похідних матриці G і доведено, що $\mathcal{G}_i : D(\overline{Q}_{(i)}) \to D(\overline{Q}_{(i)})$, $D_0(\overline{Q}_{(i)}) \to D_0(\overline{Q}_{(i)})$, $\hat{\mathcal{G}}_i : D(\overline{Q}_0) \to D(\overline{Q}_{(i)})$, $D^0(\overline{Q}_0) \to D^0(\overline{Q}_{(i)})$, $0 \le i \le m$, $\hat{\mathcal{G}}_{m+1} : D(\overline{Q}_0) \to D(\overline{\Omega}_0)$.

У [2,4] доведено формулу Гріна для $\{u,v\} \subset D(\overline{Q}_0)$

$$\int_{Q_0} (Luv - uL^*v)dxdt = \sum_{j=1}^m \int_{Q_1} (B_j u \hat{C}_j v - C_j u \hat{B}_j v)dxdt + \int_{\Omega_0} (uv)\mid_{t=0}^{t=T} dx, \qquad (2)$$

де $L^* = -D_t - A^*$ — формально спряжений вираз до L, крайові диференціальні вирази $C_j, \hat{C}_j, \hat{B}_j$ мають порядки $m_j, 2b-1-r_j, 2b-1-m_j$ відповідно.

Нехай $X(\overline{Q}_0)=\{\varphi\in D^0(\overline{Q}_0):\hat{B}_j\varphi\mid_{Q_1}=0, 1\le j\le m\}$. У [6] отримано тотожності

$$\begin{gathered}\hat{\mathcal{G}}_0(L^*\psi)(y,\tau)=\psi(y,\tau),\quad (y,\tau)\in\overline{Q}_0,\\ \hat{\mathcal{G}}_j(L^*\psi)(y,\tau)=(\hat{C}_j\psi)(y,\tau),\quad (y,\tau)\in\overline{Q}_1,\ 1\le j\le m,\\ \hat{\mathcal{G}}_{m+1}(L^*\psi)(y)=\psi(y,0),\quad y\in\overline{\Omega}_0,\ \psi\in X(\overline{Q}_0).\end{gathered}\tag{3}$$

Доведено також, що при $F_0\in X'(\overline{Q}_0), F_j\in(D^0(\overline{Q}_1))', F_2\in D'(\overline{\Omega}_0)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) у просторі $(D^0(\overline{Q}_0))'$, а саме, така узагальнена функція $u\in(D^0(\overline{Q}_0))'$, що

$$(L^*\psi,u)_0=(\psi,F_0)_0+\sum_{j=1}^{m}(\hat{C}_j\psi,F_j)_1+(\psi(y,0),F_{m+1})_2,\quad \psi\in X(\overline{Q}_0).\tag{4}$$

Цей розв'язок визначається формулою

$$(\varphi,u)_0=(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi,F_0)_0+\sum_{j=1}^{m}(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi,F_j)_1+(\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi,F_{m+1})_2,\quad \varphi\in D^0(\overline{Q}_0).\tag{5}$$

Для зручності далі використовуватимемо позначення $P=(x,t)$, $P_0=(x_0,t_0)$, $M=(y,\tau)$, $r_0=r_{m+1}=2b$, а також такі позначення з [1,4]: $d(P,M)=|PM|=\big(|x-y|^2+|t-\tau|^{\frac{1}{b}}\big)^{\frac{1}{2}}$, де $|x-y|$ — евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$, $E_c(z,t)=\exp\{-cz^{\frac{2b}{2b-1}}t^{-\frac{1}{2b-1}}\}$, $\Phi_c^k(z,t)=(z^k+1)E_c(z,t)$, $\tilde{\Phi}_c^k(z,t)=z^kE_c(z,t)$, $k\in\mathbb{R}^1$, $z>0, t>0$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_m,\alpha_0)=(\alpha,\alpha_0)$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_m$, $|\overline{\alpha}|=|\alpha|+\alpha_0$, $\overline{\alpha}_i=\begin{cases}\overline{\alpha}, & 0\le i\le m\\ \alpha, & i=m+1\end{cases}$, $D^{|\alpha|}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}\partial t^{\alpha_0}}$.

Нехай $P_0\in\overline{Q}_0$, $\varrho(P,P_0)$, $P\in\overline{Q}_0$, — така нескінченно диференційовна фінітна функція, що $\varrho(P_0,P_0)=0$, $\varrho(P,P_0)=O(|PP_0|)$ в околі точки P_0, $\eta\in D(\mathbb{R}_+)$, $\eta(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\le\frac{r}{2}\\ 0, & \lambda>r\end{cases}$, r — досить мале число.

Для довільних числа $k\in\mathbb{R}$ і точки $P_0\in\overline{Q}_0$ введемо такі простори функцій:

$$\begin{gathered}Z_k(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in C^\infty(\overline{Q}_i\setminus P_0):|D^{\overline{\alpha}_i}(\varphi(P))|\le\Phi_c^{k-|\overline{\alpha}_i|}(\varrho(P,P_0),t-t_0)|\varphi_{\overline{\alpha}_i}(P)|,\\ P\in\overline{Q}_i,\ \varphi_{\overline{\alpha}_i}\in C(\overline{Q}_i)\text{ для довільного мультиіндексу }\overline{\alpha}_i\},\\ \tilde{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in C^\infty(\overline{Q}_i\setminus P_0):|D^{\overline{\alpha}_i}(\eta(|PP_0|)\varphi(P))|\le\tilde{\Phi}_c^{k-|\overline{\alpha}_i|}(\varrho(P,P_0),t-t_0)|\varphi_{\overline{\alpha}_i}(P)|,\\ P\in\overline{Q}_i,\ \varphi_{\overline{\alpha}_i}\in C(\overline{Q}_i)\text{ для довільного мультиіндексу }\overline{\alpha}_i\},\quad i=0,1,2,\\ Z_k^0(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in Z_k(\overline{Q}_i,P_0):(D_t)^l\varphi\mid_{t=T}=0,\ l=0,1,\dots\},\\ \tilde{Z}_k^0(\overline{Q}_i,P_0)=\{\varphi\in\tilde{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0):(D_t)^l\varphi\mid_{t=T}=0,\ l=0,1,\dots\},\quad i=0,1.\end{gathered}$$

Зрозуміло, що $\tilde{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)\subset Z_k(\overline{Q}_i,P_0)$, $Z_k(\overline{Q}_i,P_0)$ та $\tilde{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)$ по суті збігаються при $k<0$.

Скажемо, що $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ у просторі $Z_k(\overline{Q}_i,P_0)$, якщо для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}_i$ послідовність функцій $\varphi_{\overline{\alpha}_i\nu}(P)=D^{\overline{\alpha}_i}\varphi_\nu(P)/(\varrho^{k-\overline{\alpha}_i}(P,P_0)+1)$, $P\in\overline{Q}_i$, збігається до нуля при $\nu\to\infty$ рівномірно в $\overline{Q}_i$, $\varphi_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ у просторі $\tilde{Z}_k(\overline{Q}_i,P_0)$, якщо для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}_i$ послідовність функцій

$$\varphi_{\overline{\alpha}_i\nu}(P)=D^{\overline{\alpha}_i}((1-\eta(|PP_0|)\varphi_\nu(P))+\varrho^{\overline{\alpha}_i-k}(P,P_0)D^{\overline{\alpha}_i}(\eta(|PP_0|)\varphi_\nu(P)),\quad P\in\overline{Q}_i,$$

збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{Q}_i$, $i = 0, 1, 2$.

Функції з просторів $Z_k = Z_k(\overline{Q}_i, P_0)$ та $\tilde{Z}_k = \tilde{Z}_k(\overline{Q}_i, P_0)$ мають спільні властивості. Ми формулюватимемо та доводитимемо їх для випадку $Z_k(\overline{Q}_i, P_0)$, пам'ятаючи при цьому, що доведення для класу $\tilde{Z}_k$ здійснюється подібно.

Далі також використовуватимемо позначення $\overline{\alpha}$ замість $\overline{\alpha}_i$.

1. При $k > 0 \quad D(\overline{Q}_i) \subset Z_{-k}(\overline{Q}_i, P_0)$, а тому $Z'_{-k}(\overline{Q}_i, P_0) \subset D'(\overline{Q}_i)$.
2. Якщо $\varphi \in Z_k$, то $D^{\overline{\gamma}}\varphi \in Z_{k-|\gamma|}$, а $D^{\overline{\gamma}}F \in Z'_{k+|\overline{\gamma}|}$ для $F \in Z'_k$.

   Справді,
$$|D^{\overline{\alpha}}(D^{\overline{\gamma}}\varphi(P))| = |D^{\overline{\alpha}+\overline{\gamma}}\varphi(P)| \leq \Phi_c^{k-|\overline{\alpha}+\overline{\gamma}|}(\varrho(P, P_0), t - t_0)|\varphi_{\overline{\alpha},\overline{\gamma}}(P)| = \\ = \Phi_c^{k-|\overline{\gamma}|-|\overline{\alpha}|}(\varrho(P, P_0), t - t_0)|\varphi_{\overline{\alpha}}(P)|,$$
   де $\varphi_{\overline{\alpha},\overline{\gamma}}, \varphi_{\overline{\alpha}} \in C(\overline{Q}_i)$; $D^{\overline{\gamma}}\varphi \in Z_k$ для $\varphi \in Z_{k+|\overline{\gamma}|}$, а тоді для $F \in Z'_k$ визначено $(\varphi, D^{\overline{\gamma}}F) = (-1)^{\overline{|\gamma|}}(D^{\overline{\gamma}}\varphi, F)$, звідки одержуємо, що $D^{\overline{\gamma}}F \in Z'_{k+|\overline{\gamma}|}$.
3. $Z_{k_2} \subset Z_{k_1}$ для $k_2 > k_1$.

   Справді, якщо $\varphi \in Z_{k_2}$, то
$$|D^{\overline{\alpha}}(\varphi(P))| \leq (\varrho^{k_2-|\overline{\alpha}|}(P, P_0) + 1)E_c(\varrho(P, P_0), t - t_0)|\varphi_{\overline{\alpha}}| = (\varrho^{k_1-|\overline{\alpha}|+k_2-k_1}(P, P_0) + 1) \times \\ \times E_c(\varrho(P, P_0), t - t_0)|\varphi_{\overline{\alpha}}| \leq (\varrho^{k_1-|\overline{\alpha}|}(P, P_0) + 1)E_c(\varrho(P, P_0), t - t_0)|\tilde{\varphi}_{\overline{\alpha}}| = \Phi_c^{k-|\overline{\alpha}|}|\tilde{\varphi}_{\overline{\alpha}}|,$$
   де $\tilde{\varphi}_{\overline{\alpha}}(P) = \varphi_{\overline{\alpha}}(P)\max_{P\in\overline{Q}_i}(1, \varrho^{k_2-k_1}(P, P_0))$, $P \in \overline{Q}_i$;
$$\frac{|D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu(P)|}{\varrho^{k_1-\overline{\alpha}}(P, P_0) + 1} = \frac{|D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu(P)|}{\varrho^{k_2-\overline{\alpha}}(P, P_0)\varrho^{k_1-k_2}(P, P_0) + 1} \leq m\frac{|D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu(P)|}{\varrho^{k_2-\overline{\alpha}}(P, P_0) + 1},$$
   де $m = 1/\min(1, \max_P \varrho^{k_2-k_1}(P, P_0))$. Тому із збіжності $\{\varphi_\nu : \nu \geq 1\}$ у просторі Z_{k_2} випливає збіжність цієї послідовності у Z_{k_1}.
4. $Z_{-k} \subset Z'_k$, $k \in \mathbb{R}^1$.

   Для довільних $\varphi \in Z_k$, $f_{\overline{\alpha}} \in Z_{-k}$ визначено
$$\int_{Q_i} \frac{D^{\overline{\alpha}}\varphi(P)D^{\overline{\alpha}}f_{\overline{\alpha}}(P)}{\Phi_c^{k-|\overline{\alpha}|}(\varrho(P, P_0), t - t_0)\Phi_c^{-k-|\overline{\alpha}|}(\varrho(P, P_0), t - t_0)}dP.$$
   Тому $F_N = \sum\limits_{|\alpha|\leq N}(-1)^{|\alpha|}D^{\overline{\alpha}}\Big(\dfrac{D^{\overline{\alpha}}f_{\overline{\alpha}}}{\Phi_c^{k-|\overline{\alpha}|}\Phi_c^{-k-|\overline{\alpha}|}}\Big) \in Z'_k$ для довільного натурального N. Зокрема, при $N = 0$, $F_0 = \dfrac{f_0E_c(\varrho, t - t_0)}{(\varrho^k + 1)(\varrho^{-k} + 1)} \in Z'_k$. Функція $E_c(\varrho, t - t_0)(\varrho^k + 1)^{-1}(\varrho^{-k} + 1)^{-1}$ є обмеженою, тому $f_0 \in Z'_k$ і $(\varphi, f_0) = \int_{Q_i}\varphi f_0 dP$ для довільної $\varphi \in Z_k$. Ми довели, що функція із Z_{-k} є регулярною узагальненою функцією із Z'_k.
5. Якщо $g_0(P)$, $P \in \overline{Q}_i$, — обмежена в Q_i функція, $g(P) = \varrho^{-|\kappa|}(P, P_0)g_0(P)$, то $g \in Z'_{|\kappa|-n+(i)-2b+\varepsilon}(\overline{Q}_i, P_0)$, $\varepsilon > 0$.

   Для довільної неперервної функції φ і числа $\mu < 1$ інтеграл
$$\int_{Q_i} |t - t_0|^{-\frac{n-(i)}{2b}-\mu}E_c(\varrho(P, P_0), t - t_0)\varphi(P)dP$$

збіжний [1–4]. Інтеграл $\int_{Q_i} |t-t_0|^{\frac{p}{2b}} E_c(\varrho(P,P_0),t-t_0)\varphi(P)dP$ є збіжним для $p > -n+(i)-2b\mu$. Функція $|t-t_0|^{\frac{p}{2b}} E_c(\varrho(P,P_0),t-t_0)$ є інтегровна разом з функцією $\varrho^p(P,P_0)E_c(\varrho(P,P_0),t-t_0)$, $P \in \overline{Q}_i$.

Для $\varphi \in Z_k$ функція

$$\tilde{\varphi} = \frac{\varphi E_c(\varrho,t-t_0)}{\varrho^k+1} = \frac{\varphi \varrho^{-k} E_c(\varrho,t-t_0)\varrho^k}{\varrho^k+1}$$

є неперервною, а функція $\frac{\varrho^k}{\varrho^k+1}E_c(\varrho,t-t_0)$ — обмеженою. Тому для обмеженої в Q_i функції g_0, $\varphi \in Z_k$ та $p > -n+(i)-2b\mu$ інтеграли $\int_{Q_i} \frac{\varphi\varrho^p g_0}{\varrho^k+1}dP$ та $\int_{Q_i} \varphi\varrho^{p-k}g_0 dP$ збіжні. Отже, якщо $g(P) = \varrho^{p-k}(P,P_0)g_0(P)$, $P \in \overline{Q}_i$, то $g \in Z'_k$ при $p > -n+(i)-2b\mu$, якщо $g(P) = \varrho^{-|\kappa|}(P,P_0)g_0(P)$, $P \in \overline{Q}_i$, то $g \in Z'_k$ при $-|\kappa| > p-k$, тобто $k > p+|\kappa| > -n+(i)-2b\mu+|\kappa|$, $\mu < 1$.

Визначені простори функцій подібні до класів параболічних ядер, введених в [11], а також відповідних класів функцій з [10,12]. У [10–12] досліджено оператори Гріна в таких класах функцій. Спряжені оператори Гріна діють у просторах Z_k так, як у [10–12], а саме, правильне таке твердження.

Лема 1. *При $k > -n-2b$ оператор $\hat{\mathcal{G}}_i$ діє із $\tilde{Z}_k(\overline{Q}_0,P_0)$ у $Z_{k+r_i+(i)}(\overline{Q}_{(i)},P_0)$, $0 \le i \le m+1$.*

Доведення. Розіб'ємо область $Q_0^\tau = \Omega_0 \times (\tau,T)$ на три: $Q_0^{\tau,1} = \{P \in Q_0 : |PP_0| < \frac{1}{2}|MP_0|\}$, $Q_0^{\tau,2} = \{P \in Q_0 : |MP| < \frac{1}{2}|MP_0|\}$, $Q_0^{\tau,3} = Q_0^\tau \setminus (Q_0^{\tau,1} \cup Q_0^{\tau,2})$, $M \in Q^\tau_{(i)}$, $i = 0,1$.

Нехай $\xi = (x-x_0)/|MP_0|$, $s = (y-x_0)/|MP_0|$, $\xi_0 = (t-t_0)/|MP_0|^{2b}$, $s_0 = (\tau-\tau_0)/|MP_0|^{2b}$. Тоді

$$\begin{gathered}
|PP_0| = (|\xi|^2|MP_0|^2 + |\xi_0|^{\frac{1}{b}}|MP_0|^2)^{\frac{1}{2}} = (|\xi|^2+|\xi_0|^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{2}}|MP_0| = |\overline{\xi}||MP_0|,\\
|MP| = (|\xi-s|^2+|\xi_0-s_0|^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{2}}|MP_0| = |\overline{\xi}-\overline{s}||MP_0|, \quad |s| = 1,\\
E_c(|PP_0|,|t-t_0|) = \exp(-c(|\overline{\xi}||MP_0|)^{\frac{2b}{2b-1}}(|\xi_0||MP_0|)^{\frac{-1}{2b-1}}) =\\
= \exp(-c|MP_0||\overline{\xi}|^{\frac{2b}{2b-1}}|\xi_0|^{\frac{-1}{2b-1}}) = E_{c|MP_0|}(|\overline{\xi}|,|\xi_0|),\\
\tilde{\Phi}^k_c(|PP_0|,|t-t_0|) = |\overline{\xi}|^k|MP_0|^kE_{c|MP_0|}(|\overline{\xi}|,|\xi_0|) = \tilde{\Phi}^k_{c|MP_0|}(|\overline{\xi}|,|\xi_0|)|MP_0|^k,\\
\Phi^k_c(|PP_0|,|t-t_0|) = (|\overline{\xi}|^k|MP_0|^k+1)E_{c|MP_0|}(|\overline{\xi}|,|\xi_0|), \quad dxdt = |MP_0|^{n-(i)+2b}d\overline{\xi}.
\end{gathered}$$

В [1, с. 40] доведено, що $\left(\frac{|\xi_i|}{|\xi_0|^{\frac{1}{2b}}}\right)^q + \left(\frac{|s_i-\xi_i|}{|s_0-\xi_0|^{\frac{1}{2b}}}\right)^q \ge \left(\frac{|s_i|}{|s_0|^{\frac{1}{2b}}}\right)^q$ при $q = \frac{2b}{2b-1}$. Звідси, враховуючи, що $E_c(|\overline{\xi}|,|\xi_0|) = \exp\left(-c\left[\left(\frac{|\xi_1|}{|\xi_0|^{\frac{1}{2b}}}\right)^q + \dots + \left(\frac{|\xi_n|}{|\xi_0|^{\frac{1}{2b}}}\right)^q\right]\right)$, одержуємо

$$E_c(|\overline{\xi}|,|\xi_0|)E_c(|\overline{s}-\overline{\xi}|,|s_0-\xi_0|) \le E_c(|\overline{s}|,|s_0|). \tag{6}$$

З формули [14, с. 588]

$$\begin{gathered}
\int_{(\frac{t_1}{\alpha_1})^{\beta_1}+\dots+(\frac{t_{n+1}}{\alpha_{n+1}})^{\beta_{n+1}} \le 1} f\left(\left(\frac{t_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1} + \dots + \left(\frac{t_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right)^{\beta_{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1} t_k^{\nu_k-1}dt =\\
= \Gamma\left[\begin{matrix}\frac{\nu_1}{\beta_1},\dots,\frac{\nu_{n+1}}{\beta_{n+1}}\\ \frac{\nu_1}{\beta_1}+\dots+\frac{\nu_{n+1}}{\beta_{n+1}}\end{matrix}\right]\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\alpha_k^{\nu_k}}{\beta_k}\int_0^1 f(t)t^{\frac{\nu_1}{\beta_1}+\dots+\frac{\nu_{n+1}}{\beta_{n+1}}-1}dt,
\end{gathered}$$

вибираючи $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 2, \beta_{n+1} = \frac{1}{b}$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n+1} = 1$, $\nu_1 = \cdots = \nu_{n+1} = 1$, $f(t) = t^{\frac{p}{2}}$, одержуємо, що інтеграл

$$\int_{|\overline{\xi}|<1} |\overline{\xi}|^p d\overline{\xi} = \int_{|\overline{\xi}|<1} [\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 + \xi_0^{\frac{1}{b}}]^{\frac{p}{2}} d\overline{\xi} \tag{7}$$

збігається при $p > -n - 2b$.

Справді,

$$\int_{|\overline{\xi}|<1} |\overline{\xi}|^p d\overline{\xi} = \Gamma\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, b \\ \frac{n}{2} + b\end{matrix}\right] \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} b \int_0^1 t^{\frac{p}{2}} t^{\frac{n}{2}+b-1} dt = C_n \int_0^1 t^{\frac{p+n+2b-2}{2}} dt.$$

Цей інтеграл збігається при $p > -n - 2b$.

У [2,4] доведено, що $|D_M^{\overline{\alpha}} G_i(P,M)| \leq (|MP|^{-n-2b+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|} + 1) E_c(|MP|, |t - t_0|)$. Бачимо, що $G_i(\cdot, M) \in Z_{-n-2b+r_i+(i)}(\overline{Q}_{(i)}, M)$.

Запишемо $(\hat{\mathcal{G}}_i\varphi)(M)$, $M \in \overline{Q}_i$, у вигляді

$$(\hat{\mathcal{G}}_i\varphi)(M) = \eta(|MP_0|)(\hat{\mathcal{G}}_i\varphi)(M) + (1 - \eta(|MP_0|))(\hat{\mathcal{G}}_i\varphi)(M).$$

1. При $P \in Q_0^{\tau,1}$ маємо $|\overline{\xi}| < \frac{1}{2}$, $|\overline{\xi} - \overline{s}| \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Тоді

$$|D_M^{\overline{\alpha}}(\eta(|MP_0|)G_i(P,M))| \leq \max(|MP_0|^{-n-2b+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|}, 1)(|\overline{\xi} - \overline{s}|^{-n-2b+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|} + 1) \times$$
$$\times E_{c|MP_0|}(|\overline{\xi} - \overline{s}|, |\xi_0 - s_0|) = \max(|MP_0|^{-n-2b+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|}, 1) E_{c|MP_0|}(|\overline{\xi} - \overline{s}|, |\xi_0 - s_0|) f_\alpha(\overline{\xi}, \overline{s}),$$

де f_α — неперервна функція.

Оскільки при $P \in Q_0^{\tau,1}$ $(1 - \eta(|PP_0|))\eta(|MP_0|) = 0$, то $\eta(|PP_0|)\eta(|MP_0|)\varphi(P) = \eta(|MP_0|)\varphi(P)$ і для $\varphi \in \tilde{Z}_k(\overline{Q}_0, P_0)$

$$\begin{aligned}\eta(|MP_0|)|\varphi(P)| &\leq \eta(|MP_0|)|PP_0|^k E_c(|PP_0|, |t - t_0|) = \\ &= \eta(|MP_0|)|MP_0|^k |\overline{\xi}|^k E_{c|MP_0|}(|\overline{\xi}|, |\xi_0|).\end{aligned} \tag{8}$$

Тепер

$$|D_M^{\overline{\alpha}}\big(\eta(|MP_0|)(\hat{G}_i\varphi)(M)\big)| = \left|\int_{Q_0^{\tau,1}} \varphi(P) D_M^{\overline{\alpha}}(\eta(|MP_0|)G_i(P,M)) dP\right| \leq$$
$$\leq \int_{|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}} |MP_0|^k |\overline{\xi}|^k E_{c|MP_0|}(|\overline{\xi}|, |\xi_0|) f_\alpha(\overline{\xi}, \overline{s}) E_{c|MP_0|}(|\overline{\xi} - \overline{s}|, |\xi_0 - s_0|) d\overline{\xi} \times$$
$$\times \max(|MP_0|^{-n-2b+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|}, 1)|MP_0|^{n+2b} \leq$$
$$\leq C_1 \max(|MP_0|^{k+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|} + |MP_0|^{k+n+2b}) E_{c|MP_0|}(|\overline{s}|, |s_0|) \int_{|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}} |\overline{\xi}|^k |f_\alpha(\overline{\xi}, \overline{s})| d\overline{\xi} =$$
$$= (|MP_0|^{k+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|} + 1) E_{c|MP_0|}(|\overline{s}|, |s_0|)|\tilde{f}_{\overline{\alpha}}(\overline{s})| = \Phi_c^{k+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|}(|MP_0|, |\tau - t_0|)|\varphi_{\overline{\alpha}}(M)|,$$

де $\varphi_{\overline{\alpha}}(M)$, $M \in \overline{Q}_i$, — неперервна функція. Позаяк $1 - \eta(|MP_0|) \neq 0$ для $|MP_0| > r/2$, маємо $|MP| = |\overline{s} - \overline{\xi}||MP_0| > r/4$. Для таких M, P функція $G_i(P,M)$ є нескінченно диференційовною, тому, враховуючи збіжність інтеграла (7), також є нескінченно диференційовною функція $(1 - \eta(|MP_0|))(\hat{G}_i\varphi)(M)$, $M \in \overline{Q}_i$.

2. При $P \in Q_0^{\tau,2}$ $|\overline{s}-\overline{\xi}| \leq \frac{1}{2}$, а тоді $|\overline{\xi}| > \frac{1}{2}$ і $|\overline{\xi}| \leq |\overline{s}-\overline{\xi}| + |\overline{s}| < \frac{3}{2}$. Тому функція $\varphi(P)$, $P \in Q_0^{\tau,2}$, нескінченно диференційовна і за доведеним у [4] є нескінченно диференційовною функція $(1-\eta(|MP_0|))(\hat{G}_i\varphi)(M)$, $M \in \overline{Q}_i$.

Для того, щоб отримати оцінку зверху для $|D_M^{\overline{\alpha}}(\eta(|MP_0|)(\hat{G}_i\varphi)(M))|$, зауважимо, що у випадку коли $\psi \in C^\infty(Q_0)$

$$D_\tau \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} \psi(P) G_i(P,M) dx = -\int_{\Omega_0} \psi(P) G_i(P,M) dx \,|_{t=\tau+0} +$$

$$+\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} \psi(P) D_\tau G_i(P,M) dx = \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} \psi(P)\big(-D_t + D_t + D_\tau\big) G_i(P,M) dx - D_\tau^{q_i}\psi(M),$$

де $q_i = r_i - 2b + (i), q_0 = 0$, а

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} \psi(P)(-D_t) G_i(P,M) dx = \int_\tau^T \big(-D_t \int_{\Omega_0} \psi(P) G_i(P,M) dx\big) dt +$$

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} D_t\psi(P) G_i(P,M) dx = \int_{\Omega_0} \psi(P) G_i(P,M) dx \,|_{t=\tau+0} +$$

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} D_t\psi(P) G_i(P,M) dx = D_\tau^{q_i}\psi(M) + \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} D_t\psi(P) G_i(P,M) dx,$$

тому

$$D_\tau \int_{Q_0^\tau} \psi(P) G_i(P,M) dP = \int_{Q_0^\tau} D_t\psi(P) G_i(P,M) dP + \int_{Q_0^\tau} \psi(P) \left(D_t + D_\tau\right) G_i(P,M) dP,$$

$$D_\tau^{\alpha_0} \int_{Q_0^\tau} \psi(P) G_i(P,M) dP = \sum_{|\beta_0| \leq |\alpha_0|} \int_{Q_0^\tau} D_t^{\beta_0}\psi(P) \left(D_t + D_\tau\right)^{\alpha_0 - \beta_0} G_i(P,M) dP. \tag{9}$$

Нехай $Q_0^{\tau,2,\varepsilon} = Q_0^{\tau,2} \setminus \{P : |PM| < \varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon = \{P : |PM| = \varepsilon\}$. Тоді

$$D_y^\alpha \int_{Q_0^{\tau,2,\varepsilon}} \psi(P) G_i(P,M) dP = \int_{Q_0^{\tau,2,\varepsilon}} \psi(P) D_y^\alpha G_i(P,M) dP =$$

$$= \int_{Q_0^{\tau,2,\varepsilon}} \psi(P) \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} C_{\alpha\beta} (-D_x)^\beta \left(D_y + D_x\right)^{\alpha-\beta} G_i(P,M) dP =$$

$$= \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} C_{\alpha\beta} \int_{Q_0^{\tau,2,\varepsilon}} D_x^\beta \psi(P) \left(D_y + D_x\right)^{\alpha-\beta} G_i(P,M) dP +$$

$$+ \sum_{|\beta| \leq |\alpha|, |\gamma| \leq |\beta|} C_{\alpha\beta\gamma} \int_{\partial Q_0^{\tau,2} \cup \Gamma_\varepsilon} \psi(P) \nu_P^\gamma (-D_x)^{\beta-\gamma} \left(D_y + D_x\right)^{\alpha-\beta} G_i(P,M) dP,$$

$C_{\alpha,\beta}, C_{\alpha,\beta,\gamma}$ — певні сталі. Отже,

$$|D_M^{\overline{\alpha}}(\eta(|MP_0|)(\hat{G}_i\varphi)(M))| =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{|\overline{\beta}| \leq |\overline{\alpha}|} C_{\alpha\beta} \int_{Q_0^{\tau,2,\varepsilon}} D_P^{\overline{\beta}} \varphi(P) \left(D_M + D_P\right)^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}} \big(\eta(|MP_0|) G_i(P,M)\big) dP + \tag{10}$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{\substack{|\overline{\beta}| \leq |\overline{\alpha}| \\ |\gamma| \leq |\beta|}} C_{\alpha\beta\gamma} \int_{\partial Q_0^{\tau,2,\varepsilon}} D_t^{\beta_0} \varphi(P) \nu^\gamma (-D_P)^{\beta-\gamma} (D_M + D_P)^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}} (\eta(|MP_0|) G_i(P,M)) dP.$$

Зауважимо, що оператори $(D_M+D_P)^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}$ не збільшують порядок особливості функції G_i.

Переходимо до локальної розпрямляючої системи координат η_0, η', η_n на Γ_ε. Враховуючи, що для дотичного оператора $D_{\eta'}$ існує спряжений $D^*_{\eta'}$ $\big(\int_{\Gamma_\varepsilon} \psi D_{\eta'} v d\Gamma = \int_{\Gamma_\varepsilon} D^*_{\eta'}\psi\cdot v d\Gamma\big)$ та φ — нескінчено диференційовна на Γ_ε та на $\partial Q_0^{\tau,2,\varepsilon}$ $(|PP_0| > \frac{\varepsilon}{2})$, одержуємо, що інтеграли по Γ_ε є величинами порядку $O\big(\max(\varepsilon^{-n+1-2b+r_i+(i)}, 1)\varepsilon^{n-1+2b}\big) = O\big(\max(\varepsilon^{r_i+(i)}, \varepsilon^{n-1+2b})\big) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

З рівності (10) при $\varepsilon \to 0$ одержуємо

$$|D_M^{\overline{\alpha}}(\eta(|MP_0|)(\hat{G}_i\varphi)(M))| \le$$
$$\le \max\big(|MP_0|^{-n-2b+r_i+(i)}, 1\big)|MP_0|^{n+2b}| \int_{|\overline{s}-\overline{\xi}|<\frac{1}{2}} |f_{\overline{\alpha}}(\overline{s},\overline{\xi})| d\overline{\xi} E_{c|MP_0|}(|\overline{s}|, |s_0|) =$$
$$= \max\big(|MP_0|^{r_i+(i)}, |MP_0|^{n+2b}\big) E_c(|MP_0|, \tau - t_0)|\varphi_{\overline{\alpha}}(M)|, \quad \varphi_{\overline{\alpha}} \in C(\overline{Q}_i).$$

3. Для $P \in Q_0^{\tau,3}$ після заміни змінних маємо $|\overline{\xi}| > \frac{1}{2}$ та $|\overline{s}-\overline{\xi}| > \frac{1}{2}$, тому для $P \in Q_0^{\tau,3}$, $M \in Q_0$ $D_M^{\overline{\alpha}} G_i(P, M)$ — є нескінчено диференційовна функція та

$$|D_M^{\overline{\alpha}}(\hat{G}_i\varphi)(M)| = |\int_{Q_0^{\tau,3}} \eta(|PP_0|)\varphi(P) D_M^{\overline{\alpha}}(\eta(|MP_0|)G_i(P,M))dQ +$$
$$+ \int_{Q_0^{\tau,3}} (1-\eta(|PP_0|))\varphi(P) D_M^{\overline{\alpha}}(\eta(|MP_0|)G_i(P,M))dQ| \le$$
$$\le \max\big(|MP_0|^{-n-2b+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|+k}, 1\big) \int_{|\overline{\xi}|>\frac{1}{2}, |\overline{s}-\overline{\xi}|>\frac{1}{2}} |f_{\overline{\alpha},3}(\overline{s},\overline{\xi})| d\overline{\xi} E_{c|MP_0|}(|\overline{s}|, |s_0|)|MP_0|^{n+2b} \le$$
$$\le \big(|MP_0|^{k+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|} + 1\big) E_c(|MP_0|, \tau - t_0)|\varphi_{\overline{\alpha}}(M)|, \quad \varphi_{\overline{\alpha}} \in C(\overline{Q}_i).$$

□

Нехай $P_0 \in \overline{Q}_0, P_j \in \overline{Q}_1$, $1 \le j \le m$, $P_{m+1} \in \Omega_0$, $\overline{P}_0 = (P_0, P_1, \ldots, P_{m+1})$, $\overline{k} = (k_0, k_1, \ldots, k_{m+1})$, $Z^0_{\overline{k}} = Z^0_{\overline{k}}(\overline{Q}_0, \overline{P}_0) = \{\varphi \in Z^0_{k_j-(j)}(\overline{Q}_0, P_j),\ j = \overline{0, m+1}\}$, $X_{\overline{k}} = X_{\overline{k}}(\overline{Q}_0, \overline{P_0}) = \{\varphi \in Z^0_{k_0}(\overline{Q}_0, P_0) \cup Z_{k_{m+1}}(\overline{Q}_2, P_{m+1}) : \hat{C}_j\varphi \in Z_{k_j}(\overline{Q}_1, P_j), \hat{B}_j\varphi\,|_{\overline{Q}_1} = 0, 1 \le j \le m\}$.

Лема 2. *Простір $X_{\overline{k}}$ непорожній.*

Доведення. Нехай $\mathcal{D}_j(P, D_x) = \sum_{|\alpha|\le j-1} d_{j\alpha}(P) D^\alpha, d_{j\alpha} \in D^0(\overline{Q}_1), j = \overline{1, 2b}$, $\mathcal{D}(P, D_x) = (\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{2b})$ — матриця Діріхле, $\varphi_j \in Z_q(\overline{Q}_1, \hat{P}) \subset Z_{q-j}(\overline{Q}_1, \hat{P}), j = \overline{1, 2b}$. Застосуємо крайові оператори $\mathcal{D}_j$ до вектор-функції Φ, яка у довільному крайовому координатному околі V $(V \cap \overline{Q}_1 \ne \varnothing)$ у локальних розпрямляючих координатах $\xi = (\xi', \xi_n, t)$ має вигляд $\Phi(P) = \tilde{\Phi}(\xi) = \sum_{i=0}^{2b+r-1} \xi_n^i \tilde{\varphi}_i(\xi', t)$, де r — довільне натуральне число, $\tilde{\varphi}_i$ — невідомі функції. У локальних координатах ξ $D_x^\alpha = h^\alpha(\xi)(\frac{\partial}{\partial \xi_n})^{|\alpha|} + \sum_{|\gamma|<|\alpha|} R_\alpha(\xi, t, D')(\frac{\partial}{\partial \xi_n})^{|\gamma|}$, де $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot h_n^{\alpha_n}$, $h_i \in C^\infty(V)$, R_α — дотичні диференціальні вирази порядків $\le |\alpha| - |\gamma|$. Тоді

$$\mathcal{D}_j\Phi = \sum_{|\gamma|\le j-1} d_{j\alpha}(P)\Big[h^\alpha\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\Big)^{|\gamma|} + \sum_{|\gamma|<|\alpha|} R_\alpha(\xi, t, D')\Big(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\Big)^{|\gamma|}\Big]\Big(\sum_{i=0}^{2b+r-1} \xi_n^i \tilde{\varphi}_i(\xi', t)\Big) =$$
$$= \sum_{i=0}^{2b+r-1} \xi_n^i \Big[\sum_{|\alpha|=j-1} d_{j\alpha}(P) h^\alpha(\xi) \frac{(i+j-1)!}{i!} \tilde{\varphi}_{i+j-1}(\xi', t) + \sum_{l=0}^{j-2} \sum_{|\alpha|<j-1} R_{\alpha l}(\xi, t, 7\frac{\partial}{\partial \xi'}) \tilde{\varphi}_l(\xi', t)\Big],$$

де $R_{\alpha l}$ — дотичні диференціальні вирази порядків $|\alpha|-l$. Оскільки $\sum\limits_{|\alpha|=j-1} d_{j\alpha}(P)h^{\alpha} \neq 0$ для довільної точки $P \in \overline{Q}_1$ та всіх $j=\overline{1,2b}$, то для довільних $\varphi_j \in Z_{q-j}(\overline{Q}_1,\hat{P})$ існують функції $\tilde{\varphi}_j \in Z_{q-j}(\overline{Q}_1,\hat{P})$, $j=\overline{1,2b}$, такі що $D_j\tilde{\Phi}\mid_{\xi_n=0} = \varphi_j(\xi',t)$, $j=\overline{1,2b}$. Подібно

$$(L^*\Phi)(\xi,t) = \sum_{i=0}^{2b+r-1} \xi_n^i \Big[-\frac{\partial\tilde{\varphi}_i}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2b} a_\alpha(P)h^\alpha(\xi)\frac{(i+2b)!}{i!}\tilde{\varphi}_{i+2b}(\xi',t) +$$

$$+\sum_{|\alpha|<2b}\sum_{l=0}^{|\alpha|} M_{\alpha l}(\xi,t,D')\tilde{\varphi}_{i+l}(\xi',t)\Big],$$

де $M_{\alpha l}$ — дотичні диференціальні оператори порядків не більших за $2b-|\alpha|$. Прирівнюючи до нуля множники біля ξ_n^i при $i=0,\ldots,r-1$ та враховуючи, що $\sum_{|\alpha|=2b} a_\alpha(P)h^\alpha(\xi) \neq 0$, за вибраними $\tilde{\varphi}_0,\ldots,\tilde{\varphi}_{2b-1}$ знаходимо $\tilde{\varphi}_{2b},\ldots,\tilde{\varphi}_{2b+r-1}$ і одержуємо, що $(L^*\Phi)(\xi,t) = \xi_n^r\varphi(\xi,t)$ при малих ξ_n, де φ — нескінченно диференційовна й обмежена функція в V.

У вираз для $\tilde{\varphi}_{2b+j}$ входять $\tilde{\varphi}_0,\ldots,\tilde{\varphi}_{2b-1}$ та їх похідні до порядків $2b+j, 2b+j-1,\ldots,j+1$, $j=\overline{0,r}$. Тому $\tilde{\varphi}_j \in Z_{q-j}$ також при $j=\overline{2b,2b+r-1}$. Функція φ виражається через $\tilde{\varphi}_0,\ldots,\tilde{\varphi}_{2b+r-1}$ та їх похідні відповідно до порядків $2b+r, 2b+r-1,\ldots,1$. Отже, $\varphi \in Z_{q-2b-r}(\overline{Q}_0,\hat{P})$ і $L^*\Phi \in Z_{q-2b}(\overline{Q}_0,\hat{P})$.

Використовуючи розклад одиниці, відповідний до покриття $\{V_l\}$ поверхні $\overline{Q}_1$, будуємо вектор-функцію $\psi(M) = \tilde{\Phi}^{(l)}(\xi,t)$ у V_l, при цьому $\psi \in Z_q(V_l,\hat{P})$, $L^*\psi \in Z_{q-2b}(\overline{Q}_0,\hat{P})$, $\mathcal{D}_j\psi\mid_{\overline{Q}_1} = \varphi_j$ для довільних $\varphi_j \in Z_{q-j+1}(\overline{Q}_1,\hat{P})$, $j=\overline{1,2b}$, зокрема $\hat{B}_j\psi \in Z_{q+m_j+1-2b}(\overline{Q}_1 \cap V_l,\hat{P})$, $\hat{C}_j\psi \in Z_{q-2b+1+r_j}(\overline{Q}_1 \cap V_l,\hat{P})$.

Для довільних натурального числа p, дійсного числа q, функції $s_0 \in Z_q(\overline{\Omega}_0,P_{m+1})$ існують такі функції $s_j \in Z_{q-2bj}(\overline{\Omega}_0,P_{m+1})$, що $L^*[\sum_{i=0}^p t^i s_i(x)] = t^p s(x,t)$, $s \in Z_{q-2bp}(\overline{Q}_0, P_{m+1})$.

Справді, $L^*[\sum_{i=0}^p t^i s_i(x)] = \sum_{i=0}^p t^i[s_{i+1}(x) - \sum_{|\alpha|\le 2m} c_\alpha(x,t)D_x^\alpha s_i(x)]$. Зображаючи $c_\alpha(x,t)$ за допомогою многочленів Тейлора за степенями t та прирівнюючи до нуля коефіцієнти біля t^i, $i=\overline{0,p-1}$, послідовно знаходимо $s_1(x),\ldots,s_p(x)$. Інші доданки дають $t^p s(x,t)$. Бачимо, що $s_j \in Z_{q-2bj}(\overline{\Omega}_0,P_{m+1})$, функція s є сумою добутків гладких функцій від s_j та їх похідних до порядку $2b$. Тому $s \in Z_{q-2bp}(\overline{Q}_0,P_{m+1})$.

Використовуючи розклад одиниці, відповідний до покриття $\{\tilde{V}_l\}$ області $\overline{Q}_2$, будуємо вектор-функцію ψ, $\psi(M) = \sum_{i=0}^p t^i s_i(x)$ у $\tilde{V}_l$, при цьому $\psi \in Z_q(\overline{Q}_0,P_{m+1}) \cup Z_q(\overline{\Omega}_0,P_{m+1})$, $L^*\psi \in Z_{q-2b(p-1)}(\overline{Q}_0,P_{m+1})$.

За властивістю 3 просторів Z_k, навіть у випадку збігу точок P_j, вибираючи $q \geq \max[k_0, \max\limits_{1\le j\le m}(k_j-r_j+2b-1), r', k_{m+1}]$, $r' = \max\limits_{1\le j\le m} r_j$, одержуємо, що $\psi \in Z_q(\overline{Q}_0,P_0) \subset Z_{k_0}(\overline{Q}_0,P_0)$, $\psi \in Z_q(\overline{Q}_0,P_{m+1}) \subset Z_{k_{m+1}}(\overline{Q}_0,P_{m+1})$, $\hat{C}_j\psi \in Z_{q-2b+1+r_j}(\overline{Q}_1,P_j) \subset Z_{k_j}(\overline{Q}_1,P_j)$, $\hat{B}_j\psi\mid_{\overline{Q}_1} = 0$, $1\le j\le m$, тобто $\psi \in X_{\overline{k}}$. □

Лема 3. *Для довільної $\psi \in Z_q^0(\overline{Q}_0,P_0)$, $P_0 \in \overline{Q}_{(j)}$, $q>-n$, $j=0,1,2$, правильні формули (3).*

Доведення. З доведення в [6] видно, що формули (3) правильні для $\psi \in C_{x,t}^{2b,1}(\overline{Q}_0)$. Нехай $\tilde{\psi}(\cdot,M) \in Z_q^0(\overline{Q}_0,M)$, $M \in \overline{Q}_0$. При $q>-n$ і для довільної $\mu \in D^0(\overline{Q}_0)$ маємо $\int_{Q_0}\tilde{\psi}(P,M)\mu(M)dP \in C_{x,t}^{2b,1}(\overline{Q}_0)$, тому за формулою (3) $\hat{G}_j\big(L_P^*\int_{Q_0}\tilde{\psi}(P,M)\mu(M)dP\big) =$

$\hat{C}_j(\int_{Q_0}\tilde{\psi}(P,M)\mu(M)dP)$. Але

$$\hat{G}_j\Big(L_P^*\int_{Q_0}\tilde{\psi}(P,M)\mu(M)dP\Big)=\hat{G}_j\Big(\int_{Q_0}L_P^*\tilde{\psi}(P,M)\mu(M)dP\Big)r=$$
$$=\int_{Q_0}\hat{G}_j\Big(L_P^*\tilde{\psi}(P,M)\Big)\mu(M)dP,$$
$$\hat{C}_j(\int_{Q_0}\tilde{\psi}(P,M)\mu(M)dP)=\int_{Q_0}\hat{C}_{jP}\tilde{\psi}(P,M)\mu(M)dP$$

для таких значень q. Звідси $\hat{G}_j\Big(L_P^*\tilde{\psi}(P,M)\Big)=\hat{C}_{jP}\tilde{\psi}(P,M)$ для довільної точки $M\in\overline{Q}_0$ та $q>-n$. □

Розв'язком задачі (1) при $F_0\in Z^0_{k_0}{}'(\overline{Q}_0,P_0), F_j\in Z^0_{k_j}{}'(\overline{Q}_1,P_j), 1\le j\le m, F_{m+1}\in Z'_{k_{m+1}}(\overline{\Omega}_0,P_{m+1})$ називається узагальнена функція u, яка задовольняє тотожність (4) для довільної $\psi\in X_{\overline{k}}$.

Теорема 1. *Нехай* $F_0\in(Z^0_{k_0}(\overline{Q}_0,P_0))'$, $F_j\in(Z^0_{k_j}(\overline{Q}_1,P_j))'$, $1\le j\le m$, $F_{m+1}\in Z'_{k_{m+1}}(\overline{Q}_2,P_{m+1})$, $k_j>r_j+(j)-n-2b$, $0\le j\le m+1$. *Існує єдиний розв'язок задачі (1), який для довільної* $\varphi\in Z^0_{\overline{k}-\overline{r}}$ *виражається формулою (5)* $u=\sum_{j=0}^{m+1}u_j$, $u_j\in\tilde{(}Z^0_{k_j-(j)-r_j}(\overline{Q}_0,P_j))'$, $0\le j\le m+1$.

Це твердження точне в тому сенсі, що наприклад у випадку $F_1=\cdots=F_{m+1}=0$ для розв'язку задачі u з $(\tilde{Z}^0_{k-2b-\varepsilon}(\overline{Q}_0,P_0))'$, $\varepsilon>0$, існує $F_0=Lu$ з $(Z^0_k(\overline{Q}_0,P_0))'$, а при $u\in(Z^0_{k-2b+\varepsilon}(\overline{Q}_0,P_0))'$ може не існувати такої $F_0\in(Z^0_k(\overline{Q}_0,P_0))'$, при якій u є розв'язком. Справді, для $u\in(\tilde{Z}^0_{k-2b-\varepsilon}(\overline{Q}_0,P_0))'$

$$Lu\in(\tilde{Z}^0_{k-\varepsilon}(\overline{Q}_0,P_0))'\subset(\tilde{Z}^0_k(\overline{Q}_0,P_0))'\subset(Z^0_k(\overline{Q}_0,P_0))',$$

а $(Z^0_k(\overline{Q}_0,P_0))'\subset(Z^0_{k+\varepsilon}(\overline{Q}_0,P_0))'$ при $\varepsilon>0$.

Доведення теореми. Якщо $\varphi\in Z^0_{\overline{k}-\overline{r}}$, то $\varphi\in Z^0_{k_j-r_j-(j)}(\overline{Q}_0,P_j)$, $0\le j\le m$, $\varphi\in Z_{k_{m+1}-2b}(\overline{Q}_2,P_{m+1})$. За лемою 1 $\hat{\mathcal{G}}_j\varphi\in Z^0_{k_j}(\overline{Q}_{(j)},P_j)$, $0\le j\le m$, $\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi(P)\in Z_{k_{m+1}}(\overline{Q}_2,P_{m+1})$ при $k_j-r_j-(j)>-n-2b$, $j=\overline{0,m+1}$, і тому відображення $F_j\to u_j$, що визначається формулою

$$(\varphi,u_j)_0=(\hat{\mathcal{G}}_j\varphi,F_j)_1,\ 1\le j\le m,\tag{11}$$

для довільної $F_j\in(Z^0_{k_j}(\overline{Q}_1,P_j))'$ при $k_j>1-n-2b+r_j$ задає $u_j\in(Z^0_{k_j-r_j-1}(\overline{Q}_0,P_j))'$, а формулою $(\varphi,u_0)_0=(\hat{\mathcal{G}}_0\varphi,F_0)_0$ при $k_0>-n$ ($k_0>1-n$, якщо $P_0\in\overline{Q}_1$) визначена функція $u_0\in(Z^0_{k_0-2b}(\overline{Q}_0,P_0))'$, і нарешті, формулою $(\varphi,u_{m+1})_0=(\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi,F_{m+1})_2$ при $k_{m+1}>-n$ визначено функцію $u_{m+1}\in Z'_{k_{m+1}-2b}(\overline{Q}_0,P_{m+1})$.

З леми 3 випливає, що вектор-функція (5) задовольняє умову (4) для довільної $\psi\in X_{\overline{k}}$. Справді, за лемою 2 існує $\psi\in Z^0_{k_j+2b-r_j-(j)}(\overline{Q}_0,P_j)$, $j=\overline{0,m+1}$, при цьому $\hat{C}_j\psi\in Z^0_{k_j}(\overline{Q}_1,P_j)$, $\hat{B}_j\psi\mid_{\overline{Q}_1}=0$,

$$L^*\psi\in Z^0_{k_0-2b}(\overline{Q}_0,P_0)\cup Z_{k_{m+1}-2b}(\overline{Q}_2,P_{m+1})\cup Z^0_{k_j-r_j-1}(\overline{Q}_0,P_j)\cup Z^0_{r'-2b}(\overline{Q}_0,P_j),$$

$1\le j\le m$, $r'=\max_{1\le j\le m}r_j$.

За лемою 1 якщо $k_0 > -n$, то $\hat{\mathcal{G}}_0(L^*\psi) \in Z^0_{k_0}(\overline{Q}_0, P_0)$, якщо $k_j - r_j - 1 > -n - 2b$, тобто $k_j > 1 - n - 2b + r_j$, $1 \le j \le m$, то $\hat{\mathcal{G}}_j(L^*\psi) \in Z^0_{k_j}(\overline{Q}_1, P_j)$, а якщо $k_{m+1} > -n$, то $(\hat{\mathcal{G}}_{m+1}(L^*\psi)) \in Z^0_{k_{m+1}}(\overline{Q}_2, P_{m+1})$. За лемою 3 $\hat{\mathcal{G}}_0(L^*\psi) = \psi$ при $k_0 > -n$, $\hat{\mathcal{G}}_{m+1}(L^*\psi) = \psi$ при $k_{m+1} > -n$, $\hat{\mathcal{G}}_j(L^*\psi) = \hat{C}_j\psi$ при $k_j - r_j - 1 + 2b > -n$, а отже при $k_j > 1 - n - 2b + r_j$, $1 \le j \le m$. Тоді для довільної $\psi \in X^0_{\overline{k}}$ згідно з формулами вигляду (11) $(L^*\psi, u_0)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_0(L^*\psi), F_0)_0 = (\psi, F_0)_0$ при $k_0 > (i) - n(P_0 \in Q_{(i)})$, $i = 0, 1, 2$, $(L^*\psi, u_j)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_j(L^*\psi), F_j)_1 = (\hat{C}_j\psi, F_j)_1$, при $k_j > r_j + 1 - 2b - n$, $1 \le j \le m$, $(L^*\psi, u_{m+1})_0 = (\hat{\mathcal{G}}_{m+1}(L^*\psi), F_{m+1})_2 = (\psi, F_{m+1})_2$, при $k_{m+1} > -n$. Нехай v, w — два розв'язки задачі (1) (із $(Z^0_{\overline{k}-\overline{r}})'$). Тоді вектор-функція $u = v - w$ задовольняє тотожність $(L^*\psi, u)_0 = 0$ для довільної $\psi \in X_{\overline{k}}$. Для довільної $\varphi \in Z^0_{\overline{k}-\overline{r}}$ існує $\psi = \hat{\mathcal{G}}_0\varphi \in Z_{k_0}(\overline{Q}_0, P_0) \cup Z_{k_{m+1}}(\overline{Q}_2, P_{m+1})$, $L^*\psi = \varphi$. За властивостями матриці Гріна [2,4] $L^*\psi = \varphi$, $\hat{B}_j\psi\mid_S = 0$, $\hat{C}_j\psi = \hat{C}_j\hat{\mathcal{G}}_0\varphi = \hat{\mathcal{G}}_j\varphi \in Z_{k_j}(\overline{Q}_1, P_j)$, $1 \le j \le m$. Отже, $\psi \in X_{\overline{k}}$. Тому $(\varphi, u)_0 = 0$ для довільної $\varphi \in Z^0_{\overline{k}-\overline{r}}$, тобто $u = 0$ у просторі $(Z^0_{\overline{k}-\overline{r}})'$.

Виясним, при якому найбільшому зростанні $F_0, F_1, \ldots, F_{m+1}$ існує розв'язок задачі (1), визначений формулою (5).

Нехай $F_j(P) = f_j(P)|PP_j|^{-\kappa_j}$, $P \in \overline{Q}_j$, $f_j \in L_\infty(\overline{Q}_j)$, $j = \overline{0, m+1}$. Тоді $F_j \in Z'_{\kappa_j - n - 2b + (j) + \varepsilon_j}(\overline{Q}_{(j)}, P_j)$, $\varepsilon_j > 0, j = \overline{0, m+1}$.

Формулою (5) визначено узагальнений розв'язок задачі

$$u = \sum_{j=0}^{m} u_j, \quad u_j \in Z'_{\kappa_j - n - 2b - r_j + \varepsilon_j}(\overline{Q}_0, P_j), \quad \varepsilon_j > 0.$$

З умов на k_j випливає $\kappa_j - n - 2b + (j) + \varepsilon_j > r_j - n - 2b + (j)$, тобто $\kappa_j > r_j - \varepsilon_j$, ε_j – довільні додатні числа, $j = \overline{0, m+1}$.

Отже, при досить сильному степеневому зростанні даних задачі формулою (5) визначено її узагальнений розв'язок. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Эйдельман С. Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
2. Ивасишен С. Д. *Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями* // ДАН СССР. – 1971. – Т.197,№2. – С.261–264.
3. Эйдельман С. Д., Ивасишен С. Д. *Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи* // Труды Моск. мат. о-ва. – 1970. – Т.23. – С.179–234.
4. Ивасишен С. Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев:Выща школа, 1990. – 200 с.
5. Житарашу Н. В. *Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И. Г. Петровскому уравнения* // Матем. сб. – 1985. – Т.128,№4. – С.451–473.
6. Лопушанская Г. П. *О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций* // Укр. мат. ж. – 1986. – Т.38,№6. – С.795–798.
7. Ройтберг Я. А. *О разрешимости общих граничных задач для эллиптических уравнений при наличии степенных особенностей в правых частях* // Укр. мат. ж. – 1968. – Т.20,№3. – С.412–417.

8. Ройтберг Я. А. Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях I-IV.- Чернигов:Изд-во Чернигов. пед. ин-та, 1990,1991.

9. Житарашу Н. В. *О разрешимости параболической граничной задачи при наличии степенных особенностей в правых частях* // "Мат. исслед."(Кишинев). – 1987. – №92. – С.69–97.

10. Красовский Ю. П. *Дифференциальные свойства решений эллиптических граничных задач со степенными особенностями в правых частях* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т.35, №1. – С.202–209.

11. Ивасишен С. Д. *О композиции параболических ядер* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, №1. – С.35–45.

12. Лопушанська Г. П. *Розв'язки узагальнених еліптичних граничних задач із сильними степеневими особливостями* // Мат. студії. – 1998. – Т.9,№1. – С.29–41.

13. Солонников В. А. *О матрицах Грина для параболических краевых задач* // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1969. – Т.14. – С.256–287.

14. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.:Наука, 1981. – 800 с.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 25.01.2000
Після переробки 5.03.2001