УДК 517.5

В. Л. Шаран

ПРО СИНГУЛЯРНІ ГРАНИЧНІ ФУНКЦІЇ АНАЛІТИЧНИХ У ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ ЗАДАНОГО ФОРМАЛЬНОГО УТОЧНЕНОГО ПОРЯДКУ

V. L. Sharan. *On the singular boundary functions of analytic in half-plane functions of given formal proximate order*, Matematychni Studii, **15** (2001) 173–178.

We describe singular boundary functions of functions $f \not\equiv 0$ which are analytic in half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ and satisfy the condition

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists c_1 > 0)\, (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \le c_1 \exp\left((\sigma + \varepsilon)\, |z|\, \eta\, (|z|)\right),$$

where $0 \le \sigma < +\infty$ and η is a positive function continuously differentiable on $[0; +\infty)$ such that $t\eta'(t)/\eta(t) \to 0$ as $t \to +\infty$.

В. Л. Шаран. *О сингулярных граничных функциях аналитических в полуплоскости функций заданного формального уточненного порядка* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.173–178.

Получено описание сингулярных граничных функций аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функций $f \not\equiv 0$, которые удовлетворяют условию

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists c_1 > 0)\, (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \le c_1 \exp\left((\sigma + \varepsilon)\, |z|\, \eta\, (|z|)\right),$$

где $0 \le \sigma < +\infty$ и η — положительная непрерывно дифференцируемая на $[0; +\infty)$ функция, для которой $t\eta'(t)/\eta(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Нехай фунція f є аналітичною й обмеженою в кожному півкрузі $Q_R = \{z : |z| < R, \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $0 < R < +\infty$. Рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \to +0} \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(x + iy)|\, dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln|f(iy)|\, dy, \quad t_1 < t_2,$$

де $f(iy)$ — кутові граничні значення функції f на уявній осі, визначається [1, с. 23] з точністю до адитивної сталої та значень в точках неперервності незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h, похідна якої дорівнює нулю майже скрізь. Цю функцію називають сингулярною граничною функцією функції f. Відомо [1, с. 30], [2, с. 189–190], що для того, щоб незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h, похідна якої дорівнює нулю

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30E99.

майже скрізь, була сингулярною граничною функцією деякої аналітичної і обмеженої в півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функції $f \not\equiv 0$, необхідно і досить, щоб

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|dh(t)|}{1+t^2} < +\infty. \tag{1}$$

Нехай $0 \le \sigma < +\infty$ — задане число, η — додатна неперервно диференційовна на $[0; +\infty)$ функція, для якої

$$\lim_{t \to +\infty} t\eta'(t)/\eta(t) = 0, \tag{2}$$

а A_η — клас аналітичних в $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists c_1 > 0)\,(\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \le c_1 \exp\left((\sigma + \varepsilon)\,|z|\,\eta\left(|z|\right)\right).$$

Через $c_0, c_1, c_2, c_1(\varepsilon), \ldots$ надалі позначаємо додатні сталі. Нашою метою є доведення наступного твердження.

Теорема. *Для того, щоб незростаюча на $(-\infty; +\infty)$ функція h, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь, була сингулярною граничною функцією деякої функції $f \in A_\eta$, необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists c_0 > 0)\,(\forall r \ge 1) : P(r) \le \frac{\sigma + \varepsilon}{\pi} \psi\,(r) + c_0, \tag{3}$$

де

$$P(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \left(|dh(t)| + dh(-t)\right), \quad \psi\,(r) = \int\limits_1^r \frac{\eta(t)}{t} dt.$$

Зауваження. Якщо функція η така, що $\psi\,(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, то умова (3) еквівалентна до умови

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{P(r)}{\psi\,(r)} \le \frac{\sigma}{\pi}.$$

Для доведення теореми нам потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай функція $f \not\equiv 0$ є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і обмеженою в кожному півкрузі Q_R. Тоді для всіх $r \in [1; +\infty)$ виконується*

$$P(r) \le \frac{1}{\pi r} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| \cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int\limits_1^r \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) \ln|f(it) \cdot f(-it)|\, dt + c_2,$$

де $f(it)$ — кутові граничні значення функції f на уявній осі.

Це твердження отримуємо із узагальненої формули Карлемана [1, с. 26–27].

Лема 2. *Нехай h — незростаюча на $(-\infty;+\infty)$ функція і виконується умова (3). Тоді функція*

$$H(z)=\exp\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(tz+i)^2\,dh(t)}{(1+t^2)^2(t+iz)}\right) \tag{4}$$

є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ і задовольняє умову

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists c_3>0)\,(\forall z\in\mathbb{C}_+):|H(z)|\le\exp\left(\frac{2\,(\sigma+\varepsilon)}{\pi}x\psi\,(r)+c_3x\right), \tag{5}$$

де $z=x+iy=re^{i\varphi}$.

Доведення. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що ±1 є точками неперервності функції h і $h(t)\not\equiv\text{const}$. Із (2) випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ при $r\ge r_0(\varepsilon)$ виконується $\psi\,(r)\le c_4(\varepsilon)r^{\varepsilon}$. Враховуючи це, із (3) отримуємо

$$s(r)\overset{def}{=}\int\limits_1^r\frac{|dh(t)|+dh(-t)}{t^2}\le\frac{4}{3}P(2r)\le c_5(\varepsilon)r^{\varepsilon},\quad r\ge1. \tag{6}$$

З рівності

$$\int\limits_1^R\frac{|dh(t)|+dh(-t)}{t^3}=\int\limits_1^R\frac{ds(t)}{t}=\frac{s(R)}{R}+\int\limits_1^R\frac{s(t)}{t^2}dt,$$

враховуючи (6), одержуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|dh(t)|}{1+|t|^3}<+\infty.$$

Отже, інтеграл із (4) абсолютно і рівномірно збігається на кожному компакті з $\mathbb{C}_+$. Тому нам залишилося довести справедливість оцінки (5). Позаяк

$$\frac{(tz+i)^2}{i\,(1+t^2)^2\,(t+iz)}=-\frac{z}{t^2}+\frac{i}{t+iz}-\frac{it\,(2+t^2)}{(1+t^2)^2}+\frac{z\,(1+2t^2)}{t^2\,(1+t^2)^2},$$

то

$$\begin{aligned}\ln|H(z)|&=\frac{x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{|t+iz|^2}-\frac{1}{t^2}\right)dh(t)+\frac{x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2t^2}{t^2\,(1+t^2)^2}dh(t)=\\&=\frac{x}{\pi}\int\limits_{|t|>1}\left(\frac{1}{|t+iz|^2}-\frac{1}{t^2}\right)dh(t)+\frac{x}{\pi}\int\limits_{|t|\le1}\frac{dh(t)}{|t+iz|^2}-\frac{x}{\pi}\int\limits_{|t|\le1}\frac{t^2dh(t)}{(1+t^2)^2}+\\&+\frac{x}{\pi}\int\limits_{|t|>1}\frac{1+2t^2}{t^2\,(1+t^2)^2}dh(t)=\frac{x}{\pi}\int\limits_{|t|>1}\left(\frac{1}{|t+iz|^2}-\frac{1}{t^2}\right)dh(t)+c_6x.\end{aligned} \tag{8}$$

Якщо $\psi(r) = O(1)$ при $r \in [1; +\infty)$, то оцінка (5) є очевидною. Тому вважаємо, що $\psi(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Функція ψ задовольняє умову (2), тому [3, с. 15] для кожного $c > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\psi(ct)}{\psi(t)} = 1, \tag{7}$$

Нехай $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$. Очевидно можна вважати, що $\lambda \geq 2$. Тоді при $|t| \leq \frac{\lambda r}{2}$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t+iz|^2} \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(|t|+r)^2} \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\lambda r)^2}.$$

Тому, враховуючи, що при $t \neq 0$

$$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t+iz|^2} \leq \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(|t|+r)^2} = \frac{2r\left(|t| + \frac{r}{2}\right)}{t^2\left(|t|+r\right)^2} \leq \frac{2r}{|t|^3},$$

отримуємо

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>1} \left(\frac{1}{|t+iz|^2} - \frac{1}{t^2} \right) dh(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{1<|t|\leq \frac{\lambda r}{2}} \left(\frac{1}{|t+iz|^2} - \frac{1}{t^2} \right) dh(t) + \\ + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\lambda r}{2}} \left(\frac{1}{|t+iz|^2} - \frac{1}{t^2} \right) dh(t) \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{1<|t|\leq \frac{\lambda r}{2}} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\lambda r)^2} \right) |dh(t)| + \\ + \frac{2r}{\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\lambda r}{2}} \frac{|dh(t)|}{|t|^3} \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_1^{\lambda r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\lambda r)^2} \right) (|dh(t)| + dh(-t)) + \\ + \frac{2r}{\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\lambda r}{2}} \frac{|dh(t)|}{|t|^3} = 2P(\lambda r) + \frac{2r}{\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\lambda r}{2}} \frac{|dh(t)|}{|t|^3}.\end{gathered} \tag{9}$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{a/2}^{a} \frac{|dh(t)| + dh(-t)}{t^2} \leq \frac{4}{3} P(2a), \quad a \geq 2,$$

то

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>\frac{\lambda r}{2}} \frac{|dh(t)|}{|t|^3} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{k-1}\lambda r}^{2^k \lambda r} \frac{|dh(t)| + dh(-t)}{t^3} \leq \\ \leq \frac{1}{\pi \lambda r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \int\limits_{2^{k-1}\lambda r}^{2^k \lambda r} \frac{|dh(t)| + dh(-t)}{t^2} \leq \frac{8}{3\lambda r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} P\left(2^k \lambda r\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Тому з (8)–(10), враховуючи (3), при $|z| = r > 1$ отримуємо

$$\begin{gathered}\ln|H(z)| \leq 2xP(\lambda r) + \frac{16x}{3\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} P\left(2^k \lambda r\right) + c_6 x \leq \\ \leq \frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi} x\psi(\lambda r) + \frac{16(\sigma+\varepsilon)x}{3\pi\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \psi\left(2^k \lambda r\right) + \left(c_0 \left(2 + \frac{64}{3\lambda} \right) + c_6 \right) x.\end{gathered} \tag{11}$$

Із (7) маємо

$$\psi\left(2t\right) \leq \frac{3}{2}\psi\left(t\right), \quad t \geq t_0 \geq 2. \tag{12}$$

На основі (12) для всіх $r > 1$ і $\lambda \geq \lambda_0$ отримуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}\psi\left(2^k\lambda r\right) \leq 2\psi\left(\lambda r\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k = 8\psi\left(\lambda r\right).$$

Отже, з (11) при $z \in \mathbb{C}_+$, $|z| = r > 1$, $\lambda \geq \lambda_0$ одержуємо

$$\ln|H(z)| \leq \frac{2\left(\sigma+\varepsilon\right)}{\pi}\left(1+\frac{64}{3\lambda}\right)x\psi\left(\lambda r\right) + \left(c_0\left(2+\frac{64}{3\lambda}\right)+c_6\right)x.$$

Звідси, враховуючи (7) і те, що функція $\frac{1}{x}\ln|H(z)|$ обмежена зверху у кожному півкрузі Q_R, отримуємо (5). $\square$

Зауваження. З доведення видно, що лема 2 залишається справедливою і за умови, що функція ψ є додатною повільно зростаючою на нескінченності.

Доведення теореми. Необхідність. Оскільки функція f є обмеженою в кожному півкрузі Q_R, то для майже всіх $y \in \mathbb{R}$

$$|f(iy)| \leq c_1 \exp\left(\left(\sigma+\varepsilon\right)|y|\,\eta\left(|y|\right)\right).$$

Тому з леми 1 маємо

$$P(r) \leq \frac{2\left(\sigma+\varepsilon\right)}{\pi}\eta\left(r\right) + \frac{\sigma+\varepsilon}{\pi}\psi\left(r\right) + c_7(\varepsilon), \quad r \geq 1$$

звідки, враховуючи (2), отримуємо (3).

Достатність. Нехай виконується умова (3). Тоді з леми 2 випливає, що існує функція β_1 така, що $\beta_1(t) \to 0$ при $t \to 0$ і при $z = x+iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$

$$|H(z)| \leq \exp\left(\frac{2}{\pi}\left(\sigma+\beta_1(r+2)\right)x\psi\left(r\right)+c_3x\right). \tag{13}$$

Крім цього [4, с. 907], існує аналітична у півплощині $\{z : \mathrm{Re}z > -1\}$ функція L, яка задовольняє умову

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists c_8>0)\,(\forall z\in\mathbb{C}_+) : |L(z)| \leq c_8\exp\left(-\frac{2}{\pi}\left(\sigma+\beta(r)\right)x\psi\left(r\right)+\left(\sigma+\varepsilon\right)r\eta(r)\right), \tag{14}$$

при цьому незростаюча неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ функція β задовольняє умову (2) і $\beta(t) \to 0$ при $t \to 0$, $\beta(t) \geq \beta_1(t+2)$ для всіх $t \in [0;+\infty)$. Приймемо

$$F(z) = H(z)\cdot L(z),$$

де H — функція із леми 2. Із (13) і (14) одержуємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$|F(z)| \leq c_9(\varepsilon)\exp\left(\left(\sigma+\varepsilon\right)r\eta(r)+c_3x\right), \quad z = x+iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+.$$

Отже, функція $f(z) = F(z)\exp(-c_3 z)$ належить до класу A_η. Оскільки функція $L(z)\exp(-c_3 z)$ є аналітичною в півплощині $\{z : \mathrm{Re} z \geq 0\}$, то сингулярна гранична функція функції $L(z)\exp(-c_3 z)$ дорівнює нулю з точністю до адитивної сталої. Крім цього, сингулярна гранична функція функції H дорівнює точністю до адитивної сталої функції h (це, фактично, показано в [1, с. 25], див. також [5, с. 60-61]). Тому функція f задовольняє умови теореми. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
2. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ, 1963. – 337 с.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 141 с.
4. Винницький Б. В., Шаран В.Л. *Про нулі аналітичних у півплощині функцій заданого уточненого формального порядку* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, №7. – С. 904–909
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 336 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
фізико-математичний факультет,
82100, Львівська обл, м. Дрогобич, вул. Стрийська, 3

Надійшло 10.02.2000