УДК 517.57

О. Б. Скасків*, О. М. Тракало

ПРО ВИНЯТКОВУ МНОЖИНУ У СПІВВІДНОШЕННІ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

O. B. Skaskiv, O. M. Trakalo. *On Borel relation for entire multiple Dirichlet series*, Matematychni Studii, **15** (2001) 163–172.

The best possible characterization of an exceptional set in asymptotic equality between the logarithms of maximum modulus and maximal term of multiple Dirichlet series is obtained.

О. Б. Скаскив, А. М. Тракало. *О соотношении Бореля для целых двойных рядов Дирихле* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.163–172.

Найдено неулучшаемое описание исключительного множества в асимптотическом равенстве логарифма максимума модуля и максимального члена целого кратного ряда Дирихле.

Нехай $H^p(\lambda)$ — клас цілих рядів Діріхле в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, вигляду

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} F_n e^{\langle z, \lambda_n \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

де $\|b\| = b_1 + b_2 + \cdots + b_p$, $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p$ для $a \in \mathbb{C}^p$, $b \in \mathbb{R}^p$, $\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \ldots, \lambda_{n_p}^{(p)})$ для $n = (n_1, \ldots, n_p)$; при цьому вважаємо, що $0 \leq \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ для кожного $1 \leq j \leq p$. Для $F \in H^p(\lambda)$ та $\sigma \in \mathbb{R}^p$ визначимо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}^p\}$, $\mathcal{M}(\sigma, F) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |F_n| e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|F_n| e^{\langle \sigma, \lambda_n \rangle} : n \in \mathbb{Z}_+^p\}$. Позаяк $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F) \leq \mathcal{M}(\sigma, \mathcal{F})$ для кожного $\sigma \in \mathbb{R}^p$, то замість асимптотичних співвідношень між $\mu(\sigma, F)$ і $M(\sigma, F)$ досить розглядати ті ж співвідношення між $\mu(\sigma, F)$ і $\mathcal{M}(\sigma, \mathcal{F})$, іншими словами досить розглядати ці співвідношення між $F(\sigma)$ і $\mu(\sigma, F)$ у випадку, коли коефіцієнти ряду (1) є невід'ємними $F_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+^p)$. Тобто, не зменшуючи загальності, замість класу $H^p(\lambda)$ досить розглянути його підклас $H_+^p(\lambda)$, в який входять цілі ряди Діріхле вигляду (1) з $F_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+^p)$.

У випадку $p = 1$ в [1] доведено, що для того, щоб для кожної функції $F \in H^1(\lambda)$ співвідношення

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

* Дослідження частково підтримані INTAS, проект 99-00089

виконувалось при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E — деяка множина скінченної лебегової міри) необхідно і досить, щоб при $j = 1$ виконувалась умова

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\lambda_k^{(j)}} < +\infty. \tag{3}$$

У [2,3] цей результат узагальнювався на клас $H^p(\lambda)$, $p \geq 2$. Зокрема в [3, наслідок 1], доведено, що для того, щоб для кожної функції $F \in H^p(\lambda)$ співвідношення (2) виконувалось при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K \setminus E$), де K — довільний конус в $\mathbb{R}^p$ з вершиною в початку координат $O \in \mathbb{R}^p$ такий, що

$$\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F) \equiv \Big\{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \mu(t\sigma, F)}{t} = +\infty\Big\},$$

а $E \subset \mathbb{R}^p$ — множина така, що для міри Лебега в $\mathbb{R}^p$

$$\mathrm{meas}_p(E \cap S_p(R)) = O(R^{p-1}) \quad (R \to +\infty), \tag{4}$$

необхідно і досить, щоб умова (3) виконувалась для кожного $1 \leq j \leq p$; тут $S_p(R)$ — необмежений циліндр в $\mathbb{R}^p$, у який переходить циліндр $S'(R) = \{\sigma' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_p) : (\sigma'_2)^2 + \dots + (\sigma'_p)^2 \leq R^2\}$ при повороті навколо початку координат системи координат $O\sigma'$, при якому додатна піввісь $O\sigma'_1$ переходить у промінь $\{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_p) : \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_p > 0\}$; $|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_p^2}$. У нашому повідомленні ми доповнимо цей результат, обмежившись лише випадком $p = 2$, приймаючи при цьому до уваги, що перехід до загального випадку не складає труднощів.

Помітимо, що у випадку, коли $\psi(t)$ — неперервна додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція така, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$, з того, що для вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^2$ виконується умова (4), випливає

$$\iint_E \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{\psi(|\sigma|)} < +\infty, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2).$$

Зокрема, для кожного $\varepsilon > 0$ маємо $\iint\limits_E \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|^{1+\varepsilon}} < +\infty$. Тут ми доведемо, що у сформульованому вище твердженні з [3] умову (4) при $p = 2$ можна замінити умовою на виняткову множину

$$\iint\limits_E \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} < +\infty,$$

при цьому для кожного $\varepsilon \in (0, 1]$ існують послідовність $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \lambda_{n_2}^{(2)})$, для якої при $j = 1$ і $j = 2$ виконується умова (3), функція $F \in H_+^2(\lambda)$, стала $h > 0$ і вимірна множина $E \subset \mathbb{R}_+^2$ такі, що

$$\iint\limits_E \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|^{1-\varepsilon}} = +\infty,$$

тобто знайдено найкращу в описаному сенсі оцінку при $p = 2$ величини виняткової множини у співвідношенні (2).

Для $F \in H^p(\lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}^p$ позначимо через $n(t,\sigma,F) = \sum\limits_{\langle \lambda_n,\sigma\rangle \le |\sigma| t} 1$ — лічильну функцію членів послідовності $\langle \lambda_n, \sigma/|\sigma|\rangle$ таких, що $F_n \ne 0$, а

$$\gamma_+(F) \equiv \{\sigma \in \mathbb{R}^p : (\forall t > 0)\, [n(t,\sigma,F) < +\infty]\},$$

$$\gamma_1(F) \equiv \{\sigma \in \gamma_+(F) : \int^{+\infty} \frac{\ln n(t,\sigma,F)}{t^2} dt < +\infty\}.$$

Відзначимо, що $\gamma_+(F)$ і $\gamma_1(F)$ є конусами в $\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат.

Нехай $n_j(t) = \sum_{\lambda_k^{(j)} \le t} 1$ — лічильна функція послідовності j-тих компонент векторної послідовності $\lambda = (\lambda_n)$. Відомо [1], що умова (3) виконується тоді і лише тоді, коли $\int^{+\infty} t^{-2} \ln n(t,\sigma,F)\, dt < +\infty$, а для $\sigma \in \mathbb{R}_+^p = \{\sigma = (\sigma_1,\dots,\sigma_p),\, \sigma_j > 0\, (1 \le j \le p)\}$

$$n(t,\sigma,F) \le n_1\Big(\frac{|\sigma|}{\sigma_1} t\Big) n_2\Big(\frac{|\sigma|}{\sigma_2} t\Big) \dots n_p\Big(\frac{|\sigma|}{\sigma_p} t\Big),$$

то з умови (3) для $1 \le j \le p$ випливає, що $\mathbb{R}_+^p \subset \gamma_1(F)$. Крім цього [5], $\sigma \in \gamma(F)$ тоді і лише тоді, коли $\sup\{\langle \sigma, \lambda_n\rangle : n \in \mathbb{Z}_+^p\} = +\infty$, тобто $\mathbb{R}_+^p \subset \gamma(F)$.

У випадку ж, коли F — не зводиться до експоненційного многочлена, з умови $\sigma \in \gamma_1(F)$ випливає $\sup\{\langle \sigma, \lambda_n\rangle : n \in \mathbb{Z}_+^p\} = +\infty$, тобто $\sigma \in \gamma(F)$, і отже, $\gamma_1(F) \subset \gamma(F)$.

Доведемо спочатку таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $F \in H^2(\lambda)$. Співвідношення (2) є правильним при $|\sigma| \to +\infty$ ($\sigma \in K_1 \setminus E$), де K_1 довільний конус (кут) з вершиною у початку координат такий, що $\overline{K_1} \setminus \{O\} \subset \gamma_1(F)$, а множина E така, що*

$$\iint\limits_{E \cap K_1} \frac{d\sigma_1 d\sigma_2}{|\sigma|} < +\infty.$$

Доведення. Без обмеження загальності вважаємо, що $F \in H_+^2(\lambda)$, $F(0) = 1$ і F не зводиться до експоненційного многочлена. При фіксованому σ, $e_0 = \sigma/|\sigma|$ розглянемо функцію $g(t) = g(t,e_0) = \ln F(te_0)$, $t \in \mathbb{R}_+$ і на ймовірнісному просторі $\mathbb{R}_+^2$ з мірою

$$P(dx) = \frac{1}{F(\sigma)} e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx), \quad x = (x_1, x_2),$$

де міра $\nu(G) = \sum\limits_{\|n\|=0}^{+\infty} \delta_n(G)$, $\delta_n(G) = \begin{cases} F_n, \ \lambda_n \in G, \\ 0, \ \lambda_n \notin G \end{cases}$ для $G \subset \mathbb{R}_+^2$, випадкову величину $\xi = \langle e_0, x\rangle$. Позаяк $F(\sigma) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx)$, то при $\sigma = te_0$ математичне сподівання ξ

$$M\xi = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \xi P(dx) = \frac{1}{F(\sigma)} \iint_{\mathbb{R}_+^2} \langle e_0, x\rangle e^{\langle \sigma, x\rangle} \nu(dx) = \frac{1}{F(\sigma)} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial e_0} = g'(t),$$

де $\frac{\partial u}{\partial e_0} = \langle \operatorname{grad} u, e_0\rangle$ — похідна від функції $u(\sigma)$ за напрямом $e_0 = \sigma/|\sigma|$. Подібно з $\sigma = te_0$ для дисперсії

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \xi^2 P(dx) - (M\xi)^2 =$$

$$= \frac{1}{F(\sigma)} \iint_{\mathbb{R}_+^2} (\langle e_0, x\rangle)^2 e^{t\langle e_0, x\rangle} \nu(dx) - (g'(t))^2 =$$

$$= \frac{1}{F(\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial e_0^2} F(\sigma) - (g'(t))^2 = \frac{\frac{d^2}{dt^2} F(te_0)}{F(te_0)} - \frac{(\frac{d}{dt} F(te_0))^2}{(F(te_0))^2} = g''(t).$$

Враховуючи, що $D\xi \geq 0$, звідси отримуємо $\frac{\partial^2 g(t,e_0)}{\partial t^2} = g''(t) \geq 0$ для кожного $t > 0$ фіксованого e_0. Тому для фіксованого e_0 функція $g(t)$ — опукла на $(0, +\infty)$ і, отже, для кожного $t > 0$ при фіксованому e_0 отримуємо

$$g'(t) \geq \frac{\ln F(te_0) - \ln F(0)}{t} = \frac{\ln F(te_0)}{t}. \qquad (5)$$

Застосовуючи нерівність Маркова $P\{\xi > a\} \leq \frac{M\xi}{a}$, $a > 0$, отримуємо з $a = 2g'(t)$, $\sigma = te_0$

$$F(\sigma) = \sum_{\langle\lambda_n, e_0\rangle \leq 2g'(t)} F_n e^{\langle\sigma,\lambda_n\rangle} + F(\sigma) \iint_{\langle x, e_0\rangle > 2g'(t)} e^{\langle\sigma,x\rangle > 2g'(t)} e^{\langle\sigma,x\rangle} \nu(dx) =$$
$$= \sum_{\langle\lambda_n, e_0\rangle \leq 2g'(t)} F_n e^{\langle\sigma,\lambda_n\rangle} + F(\sigma) P\{\xi > 2g'(t)\} \leq \sum_{\langle\lambda_n, e_0\rangle \leq 2g'(t)} F_n e^{\langle\sigma,\lambda_n\rangle} + \tfrac{1}{2} F(\sigma).$$

Звідси,

$$F(\sigma) \leq 2 \sum_{\langle\lambda_n, e_0\rangle \leq 2g'(t)} F_n e^{\langle\sigma,\lambda_n\rangle} \leq 2\mu(\sigma, F) n(2g'(t), \sigma, F). \qquad (6)$$

Зауважимо, що конус $\gamma_1(F) \subset \mathbb{R}^2$ є кутом з вершиною у початку координат. Справді, якщо $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \gamma_1(F)$ при $\sigma_2 \geq \sigma_1$, то $\sigma_2 > 0$ і $\langle\lambda_n, \sigma\rangle = \lambda_{n_1}^{(1)}\sigma_1 + \lambda_{n_2}^{(2)}\sigma_2 \leq \sigma_2\lambda_{n_1}^{(1)} + \sigma_2\lambda_{n_1}^{(1)}$, тобто $n(t, \sigma, F) \geq n(t, \overline{\sigma}, F)$ при $\overline{\sigma} = (\sigma_2, \sigma_2)$ і промінь $l_+ = \{x = (x_1, x_2) : x_1 = x_2 > 0\} \subset \gamma_1(F)$. Якщо ж $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \gamma_1(F)$ і $\sigma_1 \geq \sigma_2$, то також $l_+ \subset \gamma_1(F)$. Подібно встановлюємо, що з того, що $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \gamma_1(F)$ випливає, що кожен промінь, який виходить з початку координат і лежить між променями l_+ та променем $l_1 = \{x = (x_1, x_2) : \sigma_2 x_1 = \sigma_1 x_2,\, x_2 > 0\}$ у випадку $\sigma_2 > \sigma_1$ і променем $l_2 = \{x = (x_1, x_2) : \sigma_2 x_1 = \sigma_1 x_2,\, x_1 > 0\}$ у випадку $\sigma_1 < \sigma_2$ належить до $\gamma_1(F)$.

Крім цього, зрозуміло, що $l_{\sigma_1} = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_2 = 0,\, \sigma_1 < 0\}$ і $l_{\sigma_2} = \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_1 = 0,\, \sigma_2 < 0\}$, а разом з ними і квадрант $\{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_1 < 0,\, \sigma_2 < 0\}$ не належать до $\gamma_1(F)$.

Нехай тепер $e_0^{(1)} = (\Theta_1^{(1)}, \Theta_2^{(1)})$ і $e_0^{(2)} = (\Theta_1^{(2)}, \Theta_2^{(2)})$ — точки на різних сторонах кута K_1 такі, що $|e_0^{(j)}| = 1$ для $1 \leq j \leq 2$. Для визначеності вважаємо, що $e_0^{(1)}$ — перша точка, яка зустрічається при русі вздовж кола $|\sigma| = 1$ за годинниковою стрілкою.

Якщо $\Theta_1^{(1)} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (і відповідно $\Theta_2^{(1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$), то для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in K_1$, $|\sigma| = 1$, $\sigma_2 \geq \sigma_1$ маємо $\Theta_1^{(1)} \leq \sigma_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma_2 \geq \Theta_2^{(1)}$, тому $\langle\sigma, \lambda_n\rangle \geq \langle e_0^{(1)}, \lambda_n\rangle$, тобто $n(t, \sigma, F) \leq n(t, e_0^{(1)}, F)$. Якщо ж $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \Theta_1^{(1)} \leq 0$ (відповідно $\frac{1}{\sqrt{2}} < \Theta_2^{(1)} \leq 1$), то для $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in K_1$, $|\sigma| = 1$, $\sigma_2 \geq \sigma_1$, $\frac{\Theta_1^{(1)}}{\Theta_2^{(1)}\sqrt{2}} \leq \sigma_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ маємо $\sigma_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \alpha\Theta_2^{(1)}$, $\sigma_1 \geq \alpha\Theta_1^{(1)}$, де $\alpha = \frac{1}{\Theta_2^{(1)}\sqrt{2}}$, а для $\Theta_1^{(1)} \leq \sigma_1 \leq \frac{\Theta_1^{(1)}}{\Theta_2^{(1)}\sqrt{2}}$ маємо $\sigma_2 = \sqrt{1 - \sigma_1^2} \geq \sqrt{1 - (\Theta_1^{(1)})^2} = \Theta_2^{(1)}$. Тому в обидвох випадках $\langle\sigma, \lambda_n\rangle \geq \alpha\langle e_0^{(1)}, \lambda_n\rangle$, тобто

$$n(t, \sigma, F) = \sum_{\langle\sigma,\lambda_n\rangle \leq t} 1 \leq \sum_{\langle e_0^{(1)},\lambda_n\rangle \leq t/\alpha} 1 = n(t/\alpha, e_0^{(1)}, F),$$

де суми поширюються лише на ті індекси n, що $F_n \neq 0$. Отже, для $\sigma \in K_1$, $|\sigma| = 1$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$ у будь-якому випадку $n(t, \sigma, F) \leq n(t/\alpha, e_0^{(1)}, F)$, для всіх $t > 0$ де $\alpha \in (1/\sqrt{2}, 1)$ — деяка стала.

Подібно переконуємося, що $n(t,\sigma,F)\le n(t/\beta,e_0^{(2)},F)$, для $\sigma\in K_1$, $|\sigma|=1$, $\sigma_1\le\sigma_2$ і для всіх $t>0$ та для деякого $\beta\in(1/\sqrt{2},1)$.

Отже, з (6) отримуємо, що при $\sigma=te_0$

$$F(\sigma)\le 2\mu(\sigma,F)n_0(\delta g'(t),F), \tag{7}$$

де $\delta=2\max\{\frac{1}{\alpha};\frac{1}{\beta}\}$, $n_0(u,F)=\max\{n(u,e_0^{(1)},F)\,;\,n(u,e_0^{(2)},F)\}$. Позаяк $e_0^{(1)}\in\gamma_1(F)$, $e_0^{(2)}\in\gamma_1(F)$, то $\int_0^{+\infty}u^{-2}\ln n_0(u,F)du<+\infty$, а остання умова є рівносильна [4] до умови: існує додатна неперервна зростаюча функція $\varphi(u)$ така, що $\int_0^{+\infty}\frac{du}{\varphi(u)}<+\infty$ і

$$\ln n_0(u)=o(\varphi^{-1}(u))\quad(u\to+\infty), \tag{8}$$

де $\varphi^{-1}(u)$ — функція, обернена до $\varphi(u)$.

Залишається довести, що для кожного $\sigma\notin E$, $\sigma=te_0$, виконується

$$\delta g'(t)\le\varphi(g(t))=\varphi(\ln F(\sigma)), \tag{9}$$

де E — множина така, що $\iint_{E\cap K_1}\frac{d\sigma}{|\sigma|}<+\infty$.

Визначимо $E=\{\sigma\,:\,\delta g'(t)>\varphi(g(t)),\ \sigma=te_0\}$, $E(e_0)=\{t>0\,:\,\gamma g'(t)>\varphi(g(t))\}$ для фіксованого e_0. Переходячи до полярних координат $\sigma_1=t\cos\tau$, $\sigma_2=t\sin\tau$, отримуємо

$$\iint\limits_{E\cap K_1}\frac{d\sigma}{|\sigma|}=\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\Bigg(\int\limits_{E(e_0)}dt\Bigg)d\tau\le\delta\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\Bigg(\int\limits_{E(e_0)}\frac{g'(t)}{\varphi(g(t))}dt\Bigg)d\tau\le$$
$$\le\delta\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\Bigg(\int\limits_{g(E(\varphi_0))}\frac{du}{\varphi(u)}\Bigg)d\tau\le\delta\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\Bigg(\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{du}{\varphi(u)}\Bigg)d\tau\le\frac{3\pi}{2}\delta\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{du}{\varphi(u)}<+\infty,$$

при цьому τ_j такі, що $e_0^{(j)}=(\cos\tau_j,\sin\tau_j)$ і $-\frac{\pi}{2}<\tau_2<\tau_1<\pi$.

Позаяк F — не зводиться до експоненційного многочлена, то $\gamma_1(F)\subset\gamma(F)$, і тому ([5]) $|\sigma|=o(\ln F(\sigma))$ $(|\sigma|\to+\infty,\ \sigma\in\overline{K_1}\subset\gamma_1(F))$. Отже, з (5) отримуємо при $t\to+\infty$

$$\inf\Big\{g'(t)\,:\,e_0\in\overline{K_1}\}\ge\inf\{\frac{1}{t}\ln F(te_0)\,:\,e_0\in\overline{K_1}\Big\}\to+\infty.$$

Тому з (7)–(9) для $\sigma=te_0$, $|\sigma|\to+\infty$ $(\sigma\in\overline{K_1}\setminus E)$ маємо

$$\ln F(\sigma)\le\ln 2+\ln\mu(\sigma,F)+\ln n_0(\delta g'(t),F)=\ln\mu(\sigma,F)+o(\varphi^{-1}(\delta g'(t))\le$$
$$\le\ln\mu(\sigma,F)+o(\varphi^{-1}(\varphi(\ln F(\sigma))))=\ln\mu(\sigma,F)+o(\ln F(\sigma)).$$

□

У відповідності із зробленими вище зауваженнями, з теореми 1 і наслідку 1 [3] негайно випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. *Для того, щоб для кожної функції $F\in H^2(\lambda)$ співвідношення (2) виконувалось при $|\sigma|\to+\infty$ $(\sigma\in\mathbb{R}^2_+\setminus E,\iint_E\frac{d\sigma}{|\sigma|}<+\infty)$, необхідно і досить, щоб для $j=1$ і $j=2$ виконувалась умова (3).*

Доведення. Достатність отримуємо негайно з теореми 1, якщо пригадаємо, що (див. [2]) умова (3) є рівносильною до умови $\int^{+\infty} t^{-2}\ln n_j(t)\,dt < +\infty$.

Для доведення необхідності, припустимо для визначеності, що $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\lambda_k^{(1)}} = +\infty$, тоді $\int^{+\infty} t^{-2}\ln n_j(t)dt = +\infty$. Тому за наслідком 1 [3] існує $F \in H^2_+(\lambda)$ така, що для всіх $\sigma_1 \geq \sigma_1^0$, $\sigma_2 \leq \sigma_1$ і деякого $h > 0$

$$\ln F(\sigma_1;\sigma_2) \geq (1+h)\ln\mu(\sigma_1,\sigma_2). \tag{10}$$

Залишається зауважити, що для $E^+ = \{(\sigma_1,\sigma_2) \in \mathbb{R}^2 : \sigma_1 \geq a > 0,\ 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1\}$

$$\iint\limits_{E^+} \frac{d\sigma}{|\sigma|} \geq \int\limits_0^{\pi/4}\Big(\int\limits_a^{+\infty} dt\Big)d\tau = +\infty.$$

Наслідок 1 доведено. □

У наведеній нижче теоремі 2 стверджується, що знайдене описання виняткової множини E у співвідношенні (2) є у певному сенсі найкраще можливим. Зокрема, з нього випливатиме, що очікуване на перший погляд найкраще можливе описання виняткової множини, як множини скінченної плоскої міри Лебега $\mathrm{meas}_2 E < +\infty$ є неможливим.

Теорема 2. *Для кожного $\varepsilon > 0$ існує послідовність λ, для якої при $1 \leq j \leq 2$ виконується умова (3), існують функція $F \in H^2_+(\lambda)$, локально вимірна множина $E \subset \mathbb{R}^2_+$ і стала $h > 0$ такі, що нерівність (10) виконується для всіх $\sigma \in E$ та $\iint\limits_{E\cap\mathbb{R}^2_+} \frac{d\sigma}{|\sigma|^{1-\varepsilon}} = +\infty$.*

Доведення теореми 2 отримаємо з наступної теореми.

Теорема 3. *Для кожного $\varepsilon \in (0,1]$ існують додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність $\lambda^1 = (\lambda_k^{(1)})$, для якої виконується умова (3), цілий ряд Діріхле $f_1 \in H^1(\lambda)$, послідовності $c_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$ і $\sigma_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ та стала $h > 0$ такі, що для всіх $\sigma \in [\sigma_k, \sigma_k + \frac{c_k}{\sigma_k^{\varepsilon}}]$ і $k \geq 1$*

$$\ln f_1(\sigma) \geq (1+h)\ln\mu(\sigma, f_1).$$

Доведення. Доведення в цілому подібне на виправлене в [6] доведення леми 3 з [7]. Нехай $\alpha \in [1/(1+\varepsilon), 1)$, а послідовність $\lambda_k \equiv \lambda_k^{(1)} \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ така, що

$$\frac{\ln k}{(\lambda_k)^{\alpha}} \to +\infty, \quad \frac{\ln k}{(\lambda_k)^{1+\alpha}} = o(1) \quad (k \to +\infty).$$

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що

$$(\lambda_k)^{1+\alpha} \geq \ln k \geq (\lambda_k)^{\alpha} \geq 2 \quad (k \geq 1)$$

і виконується умова (3). Виберемо тепер дві зростаючі до $+\infty$ послідовності $\{n_k\} \subset \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $m_k = 0,5n_k$ так, щоб виконувались наступні умови

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{m_k}(\lambda_{n_k})^\alpha} \le \frac{4}{3}h, \tag{11}$$

$$(\lambda_{n_{k+1}})^\alpha \ge \left(2 + \frac{3}{8h}\right)(\lambda_{n_k})^\alpha, \tag{12}$$

$$\ln n_{k+1} \ge 2\ln n_k, \tag{13}$$

$$\frac{\ln n_{k+1}}{\lambda_{n_k}(\lambda_{n_{k+1}})^\alpha} \ge 4\left(1 + \frac{16h}{3}\right), \tag{14}$$

де $h > 0$. Умови (11)–(14) вибору послідовностей n_k,m_k є не суперечливими. Справді,

$$\ln 2k = \ln k + \ln 2 = o(\lambda_k^{1+\alpha}) = o(\lambda_k(\lambda_{2k})^\alpha) \quad (k \ge 1),$$

і тому, не зменшуючи загальності, вважаємо, що

$$\ln 2k \le \frac{4}{3}h\lambda_k(\lambda_{2k})^\alpha \quad (k \ge 1).$$

Залишається зауважити, що позаяк $\frac{\ln k}{(\lambda_k)^\alpha} \to +\infty$, то у випадку, коли n_k вже вибрано, досить вибрати

$$n_{k+1} = \min\left\{m > n_k \,:\, \frac{\ln m}{(\lambda_m)^\alpha} \ge 4\left(1 + \frac{16h}{3}\right)\lambda_{n_k},\ (\lambda_m)^\alpha \ge \left(2 + \frac{3}{8h}\right)(\lambda_{n_k})^\alpha,\ m \ge n_k^2\right\},$$

при цьому вважаємо, що $n_1 > 2$.

Для $r \ge 1$ виберемо тепер $c_k = \dfrac{1}{k}$,

$$\varkappa_k = \frac{1}{2h}\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k}} + \frac{8}{3}(\lambda_{n_k})^\alpha, \quad b_{n_k} = \exp\left(-\frac{8}{3}(\lambda_{n_k})^{1+\alpha}\right),$$

$$b_n = 0 \quad (n_k < n < m_{k+1}), \quad b_n = b_{n_k}\exp\{\varkappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)\} \quad (m_k \le n \le n_k).$$

Зауважимо, що для всіх $m_k \le n \le n_k$

$$b_n e^{\varkappa_k\lambda_n} = b_{n_k}e^{\varkappa_k\lambda_{n_k}} = (n_k)^{1/(2h)}.$$

Крім цього, враховуючи, що $\varkappa_k \ge \frac{3}{8}(\lambda_{n_k})^\alpha$, $\frac{1}{1+\varepsilon} \le \alpha < 1$, маємо

$$\ln b_{n_k} + \left(\varkappa_k + \frac{c_k}{\varkappa_k^\varepsilon}\right)\lambda_{n_k} \le \frac{1}{2h}\ln n_k + \frac{1}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^\varepsilon \lambda_{n_k}^{1-\alpha\varepsilon} \le \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^\varepsilon\right)\ln n_k. \tag{15}$$

Покажемо, що функція

$$f_1(\sigma) = \sum_{n=m_1}^{+\infty} b_n e^{\sigma\lambda_n}.$$

належить до класу $H_+^1(\lambda)$. Справді, для $m_k \le n \le n_k$ за умовою (11)

$$\ln b_n = \ln b_{n_k} + \varkappa_k\lambda_{n_k} - \varkappa_k\lambda_n = \frac{1}{2h}\ln n_k - \left(\frac{1}{2h}\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k}} + \frac{8}{3}(\lambda_{n_k})^\alpha\right)\lambda_n \le$$
$$\le \frac{2}{3}\lambda_{m_k}(\lambda_{n_k})^\alpha - \frac{8}{3}\lambda_n(\lambda_{n_k})^\alpha \le -2\lambda_n(\lambda_{n_k})^\alpha \le -2(\lambda_n)^{1+\alpha}.$$

Тому для $m_k \le n \le n_k$, для фіксованого σ при $n \to +\infty$

$$b_n e^{\sigma\lambda_n} \le \exp\{-2(2+o(1))\lambda_n^{1+\alpha}\} \le \exp\{-(2+o(1))\ln n\},$$

звідки отримуємо негайно, що $f_1 \in H_+^1(\lambda^1)$.

Доведемо тепер, що $\mu(\sigma, f_1) = b_{n_k} e^{\sigma\lambda_{n_k}}$ для всіх $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_k + c_k/\varkappa_k^\varepsilon]$. Справді, для $j \ge 1$, і $m_{k+j} \le n \le n_{k+j}$ маємо

$$\begin{gathered}\ln(b_{n_k} e^{\varkappa_k\lambda_{n_k}}/b_n e^{\varkappa_k\lambda_n}) = \frac{1}{2h}\ln n_k - (\ln b_{n_{k+j}} + \varkappa_{k+j}\lambda_{n_{k+j}}) + (\varkappa_{k+j} - \varkappa_k)\lambda_n = \\ = \frac{1}{2h}(\ln n_k - \ln n_{k+j}) + (\varkappa_{k+j} - \varkappa_k)\lambda_n \ge \\ \ge -\frac{1}{2h}\ln n_{k+j} + \left(\frac{8}{3}(\lambda_{n_{k+j}})^\alpha - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2h}\right)(\lambda_{n_k})^\alpha\right)\lambda_n \ge \\ \ge -\frac{1}{2h}\ln n_{k+j} + \frac{4}{3}(\lambda_{n_{k+j}})^\alpha\lambda_n \ge -\frac{1}{2h}\ln n_{k+j} + \frac{4}{3}(\lambda_{n_{k+j}})^\alpha\lambda_{m_{k+j}} \ge \frac{1}{2h}\ln n_{k+j} > 0,\end{gathered}$$

при цьому ми послідовно скористались рівністю $\ln b_{n_s} + \varkappa_s\lambda_{n_s} = \frac{1}{2h}\ln n_s$, нерівностями $\frac{8}{3}(\lambda_{n_s})^\alpha \le \varkappa_s \le \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2h}\right)(\lambda_{n_s})^\alpha$ та умовами (12) і (11). Звідси для всіх $j \ge 1$, $m_{k+j} \le n \le n_{k+j}$

$$b_n e^{\varkappa_k\lambda_n} < b_{n_k} e^{\varkappa_k\lambda_{n_k}}. \tag{16}$$

Подібно переконуємось, що для всіх $1 \le j < k$, $m_{k-j} \le n \le n_{k-j}$ виконується нерівність (16). Справді,

$$\begin{gathered}\ln(b_{n_k} e^{\varkappa_k\lambda_{n_k}}/(b_n e^{\varkappa_k\lambda_n})) = \frac{1}{2h}\ln n_k - (\ln b_{n_{k-j}} + \varkappa_{k-j}\lambda_{n_{k-j}}) + (\varkappa_{k-j} - \varkappa_k)\lambda_n = \\ = \frac{1}{2h}(\ln n_k - \ln n_{k-j}) - (\varkappa_k - \varkappa_{k-j})\lambda_{n_{k-j}} \ge \frac{1}{4h}\ln n_k - \varkappa_k\lambda_{n_{k-j}} \ge \\ \ge \frac{1}{4h}\ln n_k - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2h}\right)(\lambda_{n_k})^\alpha\lambda_{n_{k-j}} \ge \frac{1}{8h}\ln n_k > 0 \quad (k > 1).\end{gathered}$$

При цьому ми послідовно скористались рівністю $\ln b_{n_s} + \varkappa_s\lambda_{n_s} = \frac{1}{2h}\ln n_s$, нерівністю $\varkappa_k \le \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2h}\right)(\lambda_{n_k})^\alpha$ та умовами (13) і (14).

Отже, $\ln\mu(\varkappa_k, f_1) = \frac{1}{2h}\ln n_k$. Зауважимо тепер, що $b_n e^{\sigma\lambda_n} \le \mu(\sigma, f_1)$ для всіх $\sigma \ge \varkappa_k$ і $n < n_k$, $b_{m_{k+1}} e^{\sigma\lambda_{m_{k+1}}} \le b_n e^{\sigma\lambda_n}$ для $\sigma < \varkappa_{k+1}$ і $m_{k+1} \le n \le n_{k+1}$. Крім цього, як і вище, маємо

$$\varkappa_{k+1} - \varkappa_k \ge \frac{4}{3}(\lambda_{n_{k+1}})^\alpha > \frac{c_k}{\varkappa_k^\varepsilon}$$

і

$$\begin{gathered}\ln b_{m_{k+1}} + \left(\varkappa_k + \frac{c_k}{\varkappa_k^\varepsilon}\right)\lambda_{m_{k+1}} = \frac{1}{2h}\ln n_{k+1} - \left(\varkappa_{k+1} - \varkappa_k - \frac{c_k}{\varkappa_k^\varepsilon}\right)\lambda_{m_{k+1}} \le \\ \le \frac{1}{2h}\ln n_{k+1} - \left(\frac{4}{3}(\lambda_{n_{k+1}})^\alpha - \frac{c_k}{\varkappa_k^\varepsilon}\right)\lambda_{m_{k+1}} \le \frac{1}{2h}\ln n_{k+1} - \left(\frac{4}{3}(\lambda_{n_{k+1}})^\alpha - \frac{c_k}{\varkappa_k^\varepsilon}\right)\frac{3}{4h}\frac{\ln n_{k+1}}{(\lambda_{n_{k+1}})^\alpha} = \\ = \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4k\varkappa_k^\varepsilon(\lambda_{n_{k+1}})^\alpha}\right)\ln n_{k+1} \le \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2^{\alpha(1+\varepsilon)+2}}\right)\ln n_{k+1} = \\ = -\frac{1}{8h}\ln n_{k+1} < 0 \quad (k \ge 1).\end{gathered}$$

З викладеного випливає, що $\mu(\sigma, f_1) = b_{n_k} e^{\sigma\lambda_{n_k}}$ для $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_k + c_k/\varkappa_k^\varepsilon]$. Зауважимо тепер, що для $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_k + c_k/\varkappa_k^\varepsilon]$

$$f_1(\sigma) \geq \sum_{n=m_k}^{n_k} b_n e^{\sigma\lambda_n} \geq \sum_{n=m_k}^{n_k} b_n e^{\varkappa_k\lambda_n} = (n_k - m_k + 1)\mu(\varkappa_k, f_1) = 0,5(n_k)^{1+1/(2h)},$$

тобто, завдяки нерівності (15),

$$\ln f_1(\sigma) \geq (1+h)\ln\mu(\sigma, f_1) + \left(1 + \frac{1}{2h} - (1+h)\left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^\varepsilon\right)\right)\ln n_k - \ln 2 =$$
$$= (1+h)\ln\mu(\sigma, f_1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1+h}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^\varepsilon\right)\ln n_k - \ln 2.$$

Звідси для всіх $k \geq k_0$, де k_0 таке, що

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1+h}{k_0}\left(\frac{3}{8}\right)^\varepsilon\right)\ln n_k - \ln 2 > 0,$$

отримуємо, що $\ln f_1(\sigma) \geq (1+h)\ln\mu(\sigma, f_1)$ для всіх $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_k + c_k/\varkappa_k^\varepsilon]$. Залишається вибрати $\sigma_k = \varkappa_{k+k_0-1}$. Теорему 3 доведено. □

Доведення теореми 2. Нехай $f_1 \in H_+^1(\lambda^1)$ — функція з теореми 4, а функція $f_2 \in H_+^1(\lambda^2)$ така, що $\mu(t, f_2) \leq \mu(t, f_1)$ $(t > 0)$, де $\lambda^2 = (\lambda_k^{(2)})$ — довільна послідовність, зокрема така, що при $j = 2$ виконується умова (3). Легко бачити, що такий вибір функції f_2 — можливий. Тоді для всіх $x \in [\sigma_k, \sigma_k + c_k/\sigma_k^\varepsilon]$, $0 \leq y \leq x$, $k \geq 1$, для функції $F(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ маємо $F \in H_+^2(\lambda)$ і за нерівністю Коші

$$\ln F(x,y) \geq (1+h)\ln\mu(x, f_1) + \ln\mu(y, f_2) \geq$$
$$\geq (1 + h/2)(\ln\mu(x, f_1) + \ln\mu(y, f_2)) = (1 + h/2)\ln\mu(x, y, F).$$

Залишається зауважити, що для множини

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \,:\, \sigma_k \leq x \leq \sigma_k + c_k/\sigma_k^\varepsilon,\, 0 \leq y \leq x,\, k \geq 1\}$$

маємо

$$\iint\limits_E \frac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^{1-\varepsilon}} \geq \frac{1}{(\sqrt{2})^{1-\varepsilon}} \iint\limits_E \frac{dxdy}{x^{1-\varepsilon}} \geq \frac{1}{(\sqrt{2})^{1-\varepsilon}} \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_0^{\sigma_k} dy \int\limits_{\sigma_k}^{\sigma_k + c_k/\sigma_k^\varepsilon} \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} \geq$$
$$\geq \frac{1}{(\sqrt{2})^{1-\varepsilon}} \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k c_k \sigma_k^{-\varepsilon}(\sigma_k + c_k\sigma_k^{-\varepsilon})^{-1+\varepsilon},$$

а $\sigma_k^{1-\varepsilon}(\sigma_k + c_k\sigma_k^{-\varepsilon})^{-1+\varepsilon} \to 1$ $(k \to +\infty)$, і тому останній ряд розбіжний, а отже,

$$\iint\limits_E \frac{d\sigma}{|\sigma|^{1-\varepsilon}} = +\infty.$$

□

ЛІТЕРАТУРА

1. Скаскив О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, №1. – С.41–47.
2. Гречанюк Н.И. *О поведении максимального члена кратного ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №8. – С.1047–1053.
3. Скасків О.Б., Орищин О.Г. *Узагальнення теореми Бореля для кратних рядів Діріхле* // Матем. студії. – 1997. – Т. 8, №1. – С. 43–52.
4. Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, №2. – С. 282–292.
5. Скасків О.Б., Трусевич О.М. *Про повну еквівалентність логарифмів суми та максимального члена додатного ряду типу Тейлора-Діріхле* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 175–179.
6. Шеремета М.Н. *О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, №5. – С. 141–148.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 10.09.2000