УДК 512.552.12

Б. В. Забавський, О. М. Романів

КОМУТАТИВНІ 2-ЕВКЛІДОВІ КІЛЬЦЯ

B. V. Zabavskyi, O. M. Romaniv, *Commutative 2-Euclidean rings*, Matematychni Studii, **15** (2001) 140–144.

In the given paper the concept a commutative 2-Euclidean ring is introduced. We proved that the commutative 2-Euclidean ring is a ring with an elementary reduction of matrixes.

Б. В. Забавский, О. Н. Романив, *Коммутативные 2-евклидовые кольца* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.140–144.

В данной работе введено понятие коммутативного 2-евлидового кольца. Доказано, что коммутативное 2-евклидовое кольцо является кольцом с элементарной редукцией матриц.

У статті [1] доведено, що комутативна 2-евклідова область є областю з елементарною редукцією матриць і зроблено зауваження, що обмеження на відсутність дільників нуля не є істотним. Проте виявилось, що наявність дільників нуля в кільці значно ускладнює їх дослідження. Зокрема, класичне означення норми є лише у випадку області. Проблема перенесення цього поняття на випадок кільця полягає в тому, що третя властивість норми ($\mathcal{N}(ab) \geq \mathcal{N}(a)$) у випадку дільників нуля не завжди справджується. У даній статті цю задачу розв'язано. Для цього, ми вводимо поняття *норми над кільцем* подібно, як у статті [2], і відносно цієї норми розглядаємо поняття *2-евклідового кільця.*

Нормою над кільцем R назвемо таку функцію $\mathcal{N}\colon R \to \mathbb{Z}$, яка задовольняє наступні умови:

1) $\mathcal{N}(0) = 0$,
2) $\mathcal{N}(a) > 0$ для будь-якого ненульового елементу $a \in R$,
3) $\mathcal{N}(ab) \geq \mathcal{N}(a)$ для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $ab \neq 0$.

Комутативне кільце R назвемо 2-*евклідовим кільцем* відносно норми $\mathcal{N}$, якщо для довільних елементів $a \in R \setminus 0$, $b \in R$ виконується одна з двох умов:
— існують $q, r \in R$ такі, що $b = aq + r$ і $\mathcal{N}(r) < \mathcal{N}(a)$,
— існують $q_1, q_2, r_1, r_2 \in R$ такі, що $b = aq_1 + r_1$, $a = r_1q_2 + r_2$ і $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(a)$.

Прикладами 2-евклідових кілець можуть послужити ланцюгові кільця (тобто кільця, в яких ідеали лінійно впорядковані відносно включення), комутативні регулярні кільця.

Нагадаємо решту необхідних означень і фактів.

Комутативне кільце називається *кільцем Безу*, якщо будь-який скінченнопороджений ідеал є головним.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16S10.

Кільцем Ерміта називається кільце, над яким довільна матриця домноженням на зворотні матриці приводиться до трикутного вигляду.

Комутативне кільце R називається *кільцем стабільного рангу один*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існує елемент $t \in R$ такий, що елемент $a + bt$ є зворотнім елементом кільця R.

Під *елементарними матрицями* з елементами кільця R розумітимемо діагональні матриці зі зворотніми елементами на головній діагоналі і матриці, відмінні від одиничної наявністю деякого одного ненульового елемента поза головною діагоналлю. Матриці A і B з елементами із комутативного кільця R є *елементарно еквівалентними* [3] (в позначеннях $A \overset{e}{\sim} B$), якщо існують такі елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k$, $Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів, що справджується рівність $P_1 \cdot \cdots \cdot P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot \cdots \cdot Q_s = B$. Матриця A з елементами кільця R *володіє елементарною редукцією* [3], якщо вона елементарно еквівалентна діагональній матриці $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де елементи ε_i $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ задовольняють співвідношення $\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R$ (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі). Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [3], якщо довільна матриця A з елементами кільця R володіє елементарною редукцією.

Твердження 1. *Якщо для довільних елементів a, b з комутативного кільця R існує скінченний 2-членний ланцюг подільності, то кільце R є 2-евклідовим кільцем.*

Доведення очевидне і тому опускається.

Твердження 2. *Якщо R — комутативне 2-евклідове кільце, то для довільних елементів $a, b \in R$, $a \neq 0$, існує скінченний k-членний ланцюг подільності.*

Доведення. Оскільки R — 2-евклідове кільце, то для довільних елементів $a, b \in R$, $a \neq 0$, існує 2-членний ланцюг подільності

$$b = aq_1 + r_1, \quad a = r_1 q_2 + r_2, \tag{1}$$

такий, що $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(a)$. Якщо $r_2 = 0$, то доведення завершується. В іншому випадку, розглянемо елементи r_1 і r_2. Для них також існує 2-членний ланцюг подільності

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad r_2 = r_3 q_4 + r_4, \tag{2}$$

такий, що $\mathcal{N}(r_4) < \mathcal{N}(r_2)$. Об'єднавши (1) і (2), отримаємо ланцюг подільності для елементів a і b, при цьому $\mathcal{N}(r_4) < \mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(a)$. Якщо $r_4 = 0$, то доведення завершується. В протилежному випадку розглянемо елементи r_3 і r_4 і продовжимо описані вище перетворення. Зрозуміло, що даний процес є скінченний ($r_k = 0$ для деякого $k \in \mathbb{N}$). Отже, умова 2-евклідовості кільця є умовою існування скінченного k-членного ланцюга подільності для елементів $a, b \in R$, $a \neq 0$. □

Теорема 1. *Комутативне 2-евклідове кільце є кільцем Безу.*

Доведення даної теореми повністю повторює доведення, проведене в [4] для випадку області, тому ми його не наводимо.

Твердження 3. *Довільна зворотня матриця над комутативним 2-евклідовим кільцем є скінченним добутком елементарних матриць.*

Доведення. Нехай R — комутативне 2-евклідове кільце. Розглянемо зворотню матрицю вигляду $A = (a_{ij}) \in GL_n(R)$. Оскільки R — 2-евклідове кільце, то за твердженням 2 для елементів a_{11} і a_{12} існує скінченний ланцюг подільності. Тому за допомогою елементарних перетворень стовпчиків перший рядок матриці A набуде вигляду $(d_1, 0, a_{13}, \dots, a_{1n})$, де елемент d_1 — остання ненульова остача в ланцюзі подільності елементів a_{11}, a_{12}.

Тепер розглянемо елементи d_1, a_{13} і для них виконаємо аналогічні перетворення і т. д. Оскільки $a_{11}R + a_{12}R + \dots + a_{1n}R = R$, то в підсумку отримаємо, що перший рядок матриці A набере вигляду $(1, 0, \dots, 0)$. Тому матриця A за допомогою елементарних перетворень стовпчиків зведеться до вигляду

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тепер за допомогою елементарних перетворень рядків матрицю B зведемо до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Над матрицею C виконаємо перетворення, аналогічні до описаних вище перетворень над матрицею A.

У підсумку отримаємо, що матриця A домноженням на елементарні матриці зводиться до одиничної, що й доводить твердження теореми. □

Твердження 4. *Комутативне кільце Ерміта стабільного рангу один є 2-евклідовим кільцем.*

Доведення. Нехай R — комутативне кільце Ерміта стабільного рангу один. Розглянемо елементи $a, b \in R$ і нехай $aR + bR = dR$. Тоді існують елементи $a_0, b_0 \in R$ такі, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $a_0 R + b_0 R = R$. Оскільки R — кільце стабільного рангу один, то для елементів a_0, b_0 існує такий елемент $t \in R$, що $a_0 - b_0 t = u$, де u — зворотній елемент. Тоді

$$a_0 = b_0 t + u, \quad b_0 = u^{-1} u b_0 + 0,$$

або домноживши на d, отримуємо

$$a = bt + c, \quad b = cu^{-1} b_0 + 0,$$

де $c = ud$ ($ud \neq 0$, оскільки u — зворотній). Ми отримали скінченний 2-членний ланцюг подільності для довільних елементів $a, b \in R$. Тому за твердженням 1 кільце R є 2-евклідовим кільцем. □

Твердження 5. *Комутативне 2-евклідове кільце є кільцем Ерміта.*

Доведення. Нехай R — комутативне 2-евклідове кільце. За твердженням 2 для довільних елементів $a, b \in R$, $a \neq 0$, існує скінченний ланцюг подільності, тобто

$$b = aq_1 + r_1,\ a = r_1q_2 + r_2,\ \dots,\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,\ r_{n-1} = r_nq_{n+1}.$$

Тоді

$$(a, b)\begin{pmatrix}1 & -q_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -q_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -q_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}1 & -q_{n+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (r_n, 0),$$

тобто для довільних елементів a, b із кільця R існує зворотня матриця P така, що $(a, b)P = (r_n, 0)$. Отже, кільце R є кільцем Ерміта. $\square$

Теорема 2. *Комутативне 2-евклідове кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай R — комутативне 2-евклідове кільце. Розглянемо матрицю вигляду

$$X = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \in M_2(R),$$

де x — елемент найменшої ненульової норми серед усіх елементів матриць, які елементарно еквівалентні до матриці X.

Нехай $y \neq 0$. За означенням кільця R існують елементи $p_1, p_2, g_1, g_2 \in R$ такі, що $y = xg_1 + p_1$, $x = p_1g_2 + p_2$, де $\mathcal{N}(p_2) < \mathcal{N}(x)$. Тоді

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -g_1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & p_1\\ * & *\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}x & p_1\\ * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -g_2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_2 & p_1\\ * & *\end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix}p_2 & p_1\\ * & *\end{pmatrix}.$$

Але $\mathcal{N}(p_2) < \mathcal{N}(x)$, тобто ми отримали матрицю, яка є елементарно еквівалентна до матриці X і в якої на перетині першого рядка і першого стовпчика знаходиться елемент, норма якого строго менша, ніж норма елемента x. А це можливо лише в тому випадку, коли $p_2 = 0$. Звідси $x = p_1g_2$. Далі: $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(p_1g_2) \geq \mathcal{N}(p_1)$. Якщо $\mathcal{N}(p_1) < \mathcal{N}(x)$, то, як вище, $p_1 = 0$ і $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix}x & 0\\ * & *\end{pmatrix}$. Якщо ж $\mathcal{N}(p_1) = \mathcal{N}(x)$, то легко бачити, що $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix}p_1 & 0\\ * & *\end{pmatrix}$, де на перетині першого рядка і першого стовпчика знову розташований елемент найменшої ненульової норми серед усіх елементів матриць, елементарно еквівалентних до матриці X.

Отже, підсумовуючи вище сказане, бачимо, що для доведення теореми достатньо розглянути матрицю вигляду

$$A = \begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix} \in M_2(R),$$

де a — елемент найменшої ненульової норми серед усіх елементів матриць, елементарно еквівалентних до матриці A.

За означенням кільця R для елементів a, b існує ланцюг подільності $b = aq_1 + r_1$, $a = r_1q_2 + r_2$, де $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(a)$. Міркуючи подібно, як і вище, легко бачити, що $r_2 = 0$, тобто

$$b = aq + r, \quad a = rs, \quad q, r, s \in R.$$

Тоді отримуємо

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs & 0 \\ aq + r & c \end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix} rs & 0 \\ r & c \end{pmatrix}.$$

Нехай $aR + bR + cR = dR$. Тоді

$$dR = aR + bR + cR = rsR + rR + cR = rR + cR.$$

Звідси $r = r_0d$, $c = c_0d$ і оскільки за твердженням 5 кільце R є кільцем Ерміта, то $r_0R + c_0R = R$. За теоремою 1 і твердженням 3 існують елементарні матриці $P_1, \dots, P_k$ такі, що

$$(r_0, c_0)P_1 \dots P_k = (1, 0).$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} r_0s & 0 \\ r_0 & c_0 \end{pmatrix} P_1 \dots P_k = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} rs & 0 \\ r & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0s & 0 \\ r_0 & c_0 \end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & dy \\ d & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Зрозуміло, що матриця B, а отже, й матриця A, володіють елементарною редукцією. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Забавський Б. В. *Кільця, над якими довільна матриця допускає діагональну редукцію елементарними перетвореннями* // Матем. студії. – 1997. – Т.8, №2. – С.136–139.
2. Brungs H. H. *Left Euclidean rings* // Pac. J. Math. – 1973. – V.45. – P.27–33.
3. Zabavsky B. V. *Ring with elementary reduction matrix* // Ring Theory Conference. – Miskols, Hungary, July 15–20, 1996. – P.14.
4. Забавський Б. В., Романів О. М. *Некомутативні кільця з елементарною редукцією матриць* // Вісник Львівського університету, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С.16–20.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Надійшло 23.05.2000
Після переробки 30.12.2000