УДК 519.4

І. Я. Тушницький

КІЛЬЦЯ З ЛОКАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИМИ ІДЕАЛАМИ

I. Ya. Tushnytskyi. *Rings with local definited ideals*, Matematychni Studii, **15** (2001) 127–134.

We introduce a notion of a ring with local definited ideals in the class of right duo rings and give a criterion of such rings. Rings with a property that each prime ideal belongs to the unique maximal ideal are also consudered. The relation between a quantity of all ideals and a quantity of all maximal ideals is established under the condition of a finiteness of the set of all ideals of such ring.

И. Я. Тушницкий. *Кольца с локально определенными идеалами* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №2. – С.127–134.

В классе правых дуо-колец введено понятие кольца с локально определенными идеалами и дан критерий таких колец. Также рассматриваются кольца обладающие тем свойством, что каждый первичный идеал содержится в единственном максимальном идеале. Для таких колец установлена зависимость между числом всех идеалов и числом максимальных идеалов при условии конечности множества всех идеалов такого кольца.

У статтях автора [6] і [7] досліджувались кільця з локально визначеними скрутами та напередскрутами над комутативними та дуо-кільцями відповідно. Там, зокрема, отримано відповіді на відкриті питання, поставлені В. Брендалом і Е. Барбу в [1]. У цій статті продовжуємо вивчення класів дуо-кілець, конкретні властивості яких цілком визначаються їх локалізаціями відносно максимальних ідеалів. Зокрема, вводимо поняття дуо-кільця з локально визначеними ідеалами та встановлюємо деякі властивості отриманого нового класу кілець. Доводимо, що клас дуо-кілець з локально визначеними ідеалами значно ширший за клас кілець з локально визначеними скрутами і це робить його цікавим для повнішого розуміння зв'язків між локальними і глобальними властивостями кілець. Зазначимо ще, що при дослідженні питань такого типу автор користується технікою локалізації дуо-кілець, розробленою в працях М. Латсіса і Р. Гарньє [2], Е. Пертла [3], [4] та інших авторів.

Нагадаємо деякі необхідні поняття. Кільце R називається правим дуо-кільцем, якщо кожний правий ідеал цього кільця є двостороннім. Через $\mathrm{mspec}(R)$ позначатимемо множину всіх правих (вони двосторонні) максимальних ідеалів кільця R. Деякі топологічні властивості $\mathrm{mspec}(R)$ описані в праці [5]. Надалі розглядатимемо тільки праві дуо-кільця з $1 \neq 0$, що задовольняють умову:

$$(\forall \mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R))\ (\forall r \in R)\ (\forall d \in R\backslash\mathfrak{M})\ (\exists c \in R)\ (\exists d' \in R\backslash\mathfrak{M}) : rd' = drc. \qquad (A)$$

Наступна лема показує, що умова (A) еквівалентна до аналогу умови Оре для кожного з правих ідеалів кільця R для всіх мультиплікативно замкнених множин $R \setminus \mathfrak{M}$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16P50.

Лема 1. *Праве дуо-кільце R задовольняє умову (A) тоді і тільки тоді, коли воно задовольняє умову:*

$$(\forall \mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R))\ (\forall I \text{ правого ідеалу кільця } R)$$
$$(\forall i \in I)\ (\forall d \in D = R \backslash \mathfrak{M})\ \ (\exists i' \in I)\ (\exists d' \in D):\ id' = di'.$$

Цю лему доведено у статті [7].

Через $\mathrm{Id}(R)$ позначатимемо сім'ю всіх правих ідеалів, а через $\mathcal{R}_{\prime}(\mathcal{R})$ — сім'ю всіх ненульових правих ідеалів кільця R і їх добутків. Зазначимо, що, якщо R — область цілісності, то $\mathcal{R}_{\prime}(\mathcal{R})$ — сім'я всіх ненульових правих ідеалів кільця R, а, якщо R кільце з дільниками нуля, то маємо рівність $\mathcal{R}_{\prime}(\mathcal{R}) = \mathrm{Id}(\mathcal{R})$. Якщо I — правий ідеал кільця R, то $V(I)$ позначає сім'ю правих ідеалів $\{\mathfrak{M} \in \mathrm{mspec}(R)/I \subset \mathfrak{M}\}$.

Нехай D — мультиплікативно замкнена множина кільця R; S, R — деякі кільця; f — гомоморфізм кільця R в кільце S. Нагадаємо, що пара (S, f) називається правим кільцем дробів кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини D, якщо виконуються умови:

1) $(\forall d \in D)$: $f(d)$ — оборотній елемент кільця S;
2) $(\forall s \in S)\ (\exists r \in R)\ (\exists d \in D) : s = f(r)f(d)^{-1}$;
3) $\mathrm{Ker}\, f = \{r \in R\ |\exists d \in D : rd = 0\}$.

Якщо $\mathfrak{M}$ — максимальний правий ідеал кільця R, то праве кільце дробів кільця R відносно мультиплікативно замкненої множини $R \backslash \mathfrak{M}$ називається локалізацією кільця R відносно максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ і позначається $(R_{\mathfrak{M}}, f_{\mathfrak{M}})$, або просто $R_{\mathfrak{M}}$.

Нехай I — правий ідеал кільця R, а $\mathfrak{M}$ — максимальний правий ідеал кільця R. Тоді локалізація правого ідеалу I відносно максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ визначається у наступний спосіб $I_{\mathfrak{M}} = \{f_{\mathfrak{M}}(i) f_{\mathfrak{M}}^{-1}(d)\ |i \in I, d \notin \mathfrak{M}\}$.

Наступна лема показує, що умова (A) достатня для того, щоб $I_{\mathfrak{M}}$ був двостороннім ідеалом кільця $R_{\mathfrak{M}}$.

Лема 2. *Нехай R — праве дуо-кільце, що задовольняє умову (A), I — довільний правий ідеал кільця R, а $\mathfrak{M}$ — довільний максимальний правий ідеал кільця R. Тоді множина $I_{\mathfrak{M}}$ є двостороннім ідеалом кільця R.*

Доведення. Через D позначатимемо множину $R \backslash \mathfrak{M}$. Нехай $x_1,\ x_2 \in I_{\mathfrak{M}}$. Доведемо, що $x_1 + x_2 \in I_{\mathfrak{M}}$. Позаяк $x_1, x_2 \in I_{\mathfrak{M}}$, то $x_1 = f(i_1)f(d_1)^{-1}$ і $x_2 = f(i_2)f(d_2)^{-1}$, де $i_1,\ i_2 \in I,\ d_1,\ d_2 \in D$. Оскільки $d_2 \in R,\ d_1 \in D$ і D — права множина Оре, то існують $d_1{}' \in D$ і $d_2{}' \in R$ такі, що $d_2 d_1{}' = d_1 d_2{}'$. Тоді $f(d_2)f(d_1{}') = f(d_1)f(d_2{}')$. Домножуючи дану рівність зліва на $f(d_1)^{-1}$ і справа на $f(d_1{}')^{-1}$, отримуємо $f(d_1)^{-1}f(d_2) = f(d_2{}')f(d_1{}')^{-1}$. Тепер $x_1 + x_2 = f(i_1)f(d_1)^{-1} + f(i_2)f(d_2)^{-1} = f(i_1)f(d_1)^{-1}f(d_2)f(d_2)^{-1} + f(i_2)f(d_2)^{-1} = f(i_1)f(d_2{}')f(d_1{}')^{-1}f(d_2)^{-1} + f(i_2)f(d_1{}')f(d_1{}')^{-1}f(d_2)^{-1} = f(i_1 d_2{}' + i_2 d_1{}')f(d_2 d_1{}')^{-1}$. Оскільки $i_1 d_2{}' + i_2 d_1{}' \in I$ і $d_2 d_1{}' \in D$, то $x_1 + x_2 \in I_{\mathfrak{M}}$.

Тепер перевіримо, що коли $x \in I_{\mathfrak{M}}$ і $\lambda \in R_{\mathfrak{M}}$, то $x\lambda \in I_{\mathfrak{M}}$. Нехай $x = f(i)f(d_1)^{-1}$ і $\lambda = f(r)f(d_2)^{-1}$, де $i \in I,\ r \in R,\ d_1,\ d_2 \in D$. Оскільки D — права множина Оре, то існують $r' \in R,\ d_1{}' \in D$ такі, що $f(d_1)^{-1}f(r) = f(r')f(d_1{}')^{-1}$. Враховуючи це, отримаємо $x\lambda = f(i)f(d_1)^{-1}f(r)f(d_2)^{-1} = f(i)f(r')f(d_1{}')^{-1}f(d_2)^{-1} = f(ir')f(d_2 d_1{}')^{-1}$. Проте $ir' \in I$ і $d_2 d_1{}' \in D$, тому $x\lambda \in I_{\mathfrak{M}}$.

Залишилось довести, що коли $x \in I_{\mathfrak{M}}$ і $\lambda \in R_{\mathfrak{M}}$, то $\lambda x \in I_{\mathfrak{M}}$. Нехай $x = f(i)f(d_1)^{-1}$ і $\lambda = f(r)f(d_2)^{-1}$, де $i \in I,\ r \in R,\ d_1, d_2 \in D$. Тепер $\lambda x = f(r)f(d_2)^{-1}f(i)f(d_1)^{-1}$.

Кільце R задовольняє умову (A), тому, за лемою 1, існують $i' \in I$ і $d_2{}' \in D$ такі, що $f(d_2)^{-1}f(i) = f(i')f(d_2{}')^{-1}$. Отже, $\lambda x = f(r)f(i')f(d_2{}')^{-1}f(d_1)^{-1} = f(ri')f(d_1 d_2{}')^{-1}$. Оскільки $ri' \in I$ і $d_1 d_2{}' \in D$, то $\lambda x \in I_{\mathfrak{M}}$. □

Наступна лема показує, що умова (A) забезпечує те, що локалізація правого дуо-кільця відносно будь-якого його максимального ідеалу є правим дуо-кільцем.

Лема 3. *Нехай R — праве дуо-кільце, що задовольняє умову (A) і $\mathfrak{M}$ — довільний максимальний ідеал кільця R. Тоді $R_{\mathfrak{M}}$ — праве дуо-кільце.*

Доведення. Нехай J — довільний правий ідеал кільця $R_{\mathfrak{M}}$. Покажемо, що множина $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$ є двостороннім ідеалом кільця R. Нехай $t_1, t_2 \in f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$. Тоді $f_{\mathfrak{M}}(t_1) \in J$ і $f_{\mathfrak{M}}(t_2) \in J$. Оскільки J — правий ідеал, то $f_{\mathfrak{M}}(t_1) + f_{\mathfrak{M}}(t_2) \in J$, тобто $f_{\mathfrak{M}}(t_1 + t_2) \in J$. Звідси, отримуємо, що $t_1 + t_2 \in f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$. Переконаємось, що множина $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$ є замкненою відносно множення на елементи кільця R справа. Нехай $t \in f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$ і $r \in R$. Тоді $f_{\mathfrak{M}}(t) \in J$. J — правий ідеал кільця $R_{\mathfrak{M}}$, тому $f_{\mathfrak{M}}(t)f_{\mathfrak{M}}(r) \in J$. Звідси, отримуємо, що $f_{\mathfrak{M}}(tr) \in J$. Це означає, що $tr \in f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$. Отже, $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$ — правий ідеал кільця R. Оскільки R — праве дуо-кільце, то множина $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)$ є двостороннім ідеалом кільця R. За лемою 2, правий ідеал $\left(f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)\right)_{\mathfrak{M}}$ є двостороннім ідеалом кільця $R_{\mathfrak{M}}$. За лемою 3(1) з [7] $\left(f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J)\right)_{\mathfrak{M}} = J$. Отже, правий ідеал J — двосторонній. Тому, кільце $R_{\mathfrak{M}}$ є правим дуо-кільцем. □

Наведемо деякі приклади правих дуокілець, що задовольняють умову (A).

Приклад 1. Нехай R — комутативне кільце. Тоді очевидно, що воно є дуо-кільцем. Покажемо, що R задовольняє умову (A). Нехай $\mathfrak{M}$ — довільний максимальний ідеал, r — довільний елемент кільця R, а d — довільний елемент множини $R \setminus \mathfrak{M}$. Нехай $d' = d$ і $c = 1$. Оскільки в кільці R правильна рівність $rd = dr$, то $rd' = drc$, що і треба було довести.

Приклад 2. Нехай $R = \prod_{i \in I} D_i$, де I — довільна множина, а D_i є тілом для кожного $i \in I$. Перевіримо спочатку, що кільце R є дуо-кільцем. Максимальними ідеалами в кільці R є ідеали $\mathfrak{M}_k$, де $\mathfrak{M}_k = \{\langle r_i \rangle_{i \in I} \mid r_k = 0\}$. Кожний лівий і кожний правий ідеал є перетином максимальних ідеалів, а, отже, є двостороннім.

Тепер покажемо, що кільце R задовольняє умову (A). Нехай $\mathfrak{M}$ — довільний максимальний ідеал кільця R, r — довільний елемент кільця R, а d — довільний елемент множини R. Оскільки R — дуо-кільце, то правильна рівність $rdR = rRdR$. За попереднім зауваженням $rR = \bigcap_{i \in K_1} \mathfrak{M}_i$ і $dR = \bigcap_{i \in K_2} \mathfrak{M}_i$, де K_1 і K_2 — деякі підмножини множини I. Звідси, $rdR = \bigcap_{i \in K_1 \cup K_2} \mathfrak{M}_i$. Подібно, $drR = \bigcap_{i \in K_1 \cup K_2} \mathfrak{M}_i$. Звідси отримуємо рівність $rdR = drR$. Це означає, що існує такий елемент $c \in R$, що виконується рівність $rd = drc$. Якщо покласти $d' = d$, то отримуємо $rd' = drc$, що і потрібно було довести.

Приклад 3. Нехай $R = D\big[[x]\big]$ — кільце формальних степеневих рядів над тілом D. При цьому вважаємо, що змінна x комутує з коефіцієнтами.

Перевіримо спочатку, що кільце R є дуо-кільцем. В кільці R немає інших власних ненульових правих ідеалів, крім ідеалів вигляду $x^n R$, де n — довільне натуральне число. У кільці R немає інших власних лівих ідеалів, крім ідеалів вигляду Rx^n, де n — довільне натуральне число. Оскільки змінна x комутує з коефіцієнтами, то маємо рівність $x^n R = Rx^n$. Це означає, що кожний лівий і кожний правий ідеал в кільці R є двостороннім.

Тепер покажемо, що кільце R задовольняє умову (A). Зауважимо, що $\mathfrak{M} = xR$ — єдиний максимальний ідеал кільця R. Всі елементи кільця R, що не входять в цей ідеал, є оборотними. Нехай r — довільний елемент кільця R, а d — довільний елемент кільця R. Тоді елемент r можна подати у вигляді $x^n t$, де n — деяке число з множини $\mathbb{N} \cup \{0\}$, а t — ряд з вільним членом, що не дорівнює нулю. Згідно із зробленим вище зауваженням, елемент t є оборотним. Нехай $d' = 1$, а елемент $c = t^{-1}d^{-1}t$. Позаяк x комутує з елементами кільця R, отримаємо рівність $rd' = drc$, що і треба було довести.

Приклад 4. Будь-яке регулярне за Нейманом дуокільце задовольняє умову (A). Доведення дивіться в [8, лема 4].

Для будь-якого кільця R визначимо відображення

$$f_R\colon \mathcal{R}_r(\mathcal{R}) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{M}\in \operatorname{mspec}(\mathcal{R})} \mathcal{R}_r(\mathcal{R}_{\mathfrak{M}})$$

у наступний спосіб: $f_R(I) = \langle I_{\mathfrak{M}}\rangle_{\mathfrak{M}\in \operatorname{mspec}(R)}$ для будь-якого правого ідеалу I кільця R. Зазначимо, що за лемою 2 дане відображення визначене коректно.

Означення. Кільце R називається кільцем з локально визначеними ідеалами, якщо відображення f_R бієктивне.

Доведемо, що в означенні кільця з локально визначеними ідеалами досить вимагати сюр'єктивності відображення f_R.

Лема 4. *Нехай R — будь-яке праве дуо-кільце, що задовольняє умову (A). Тоді відображення f_R є ін'єктивним.*

Доведення. Нехай I і J — будь-які два праві ідеали кільця R. Нехай $f_R(I) = f_R(J)$. Перевіримо, що є правильною рівність $I = J$. З рівності $f_R(I) = f_R(J)$ отримуємо, що для будь-якого максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R правильна рівність $I_{\mathfrak{M}} = J_{\mathfrak{M}}$. За лемою 3(6) з [7] маємо рівності $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(I_{\mathfrak{M}}) = f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J_{\mathfrak{M}})$ для будь-якого максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R. Оскільки для будь-якого правого ідеалу K кільця R справедлива рівність $K = \bigcap\limits_{\mathfrak{M}\in \operatorname{mspec}(R)} f_{\mathfrak{M}}^{-1}(K_{\mathfrak{M}})$, то маємо рівності: $I = \bigcap\limits_{\mathfrak{M}\in \operatorname{mspec}(R)} f_{\mathfrak{M}}^{-1}(I_{\mathfrak{M}})$ і $J = \bigcap\limits_{\mathfrak{M}\in \operatorname{mspec}(R)} f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J_{\mathfrak{M}})$. Оскільки, $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(I_{\mathfrak{M}}) = f_{\mathfrak{M}}^{-1}(J_{\mathfrak{M}})$ для будь-якого максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R, то $I = J$. □

Лема 5. *Нехай I — будь-який правий ідеал кільця R, $\mathfrak{P}$ — будь-який первинний ідеал кільця R і $\mathfrak{M}$ — будь-який максимальний правий ідеал кільця R, що містить правий ідеал $\mathfrak{P}$, при цьому $I_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}$. Тоді правильне включення $I \subseteq \mathfrak{P}$.*

Доведення. Нехай для максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ виконується рівність $I_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}$. Тоді за лемою 3(6) з [7] для максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ виконується рівність $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(I_{\mathfrak{M}}) = f_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}})$. Оскільки правий ідеал $\mathfrak{P}$ — первинний, то маємо рівність $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{P}$. Звідси $f_{\mathfrak{M}}^{-1}(I_{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{P}$. За лемою 3(2) з [7] отримуємо, що $I \subseteq f_{\mathfrak{M}}^{-1}(I_{\mathfrak{M}})$. З цього включення і з попередньої рівності маємо потрібне включення $I \subseteq \mathfrak{P}$. □

Сформулюємо без доведення наступне елементарне твердження.

Лема 6. *Нехай I, J — праві ідеали кільця R такі, що $I \subseteq J$ і $\mathfrak{M}$ — довільний максимальний правий ідеал кільця R. Тоді правильне включення $I_{\mathfrak{M}} \subseteq J_{\mathfrak{M}}$.*

Лема 7. *Нехай I, J — праві ідеали кільця R, такі що $I \subseteq J$, а $\mathfrak{M}$ — максимальний правий ідеал кільця R. Тоді, якщо $I_{\mathfrak{M}} = R_{\mathfrak{M}}$, то $J_{\mathfrak{M}} = R_{\mathfrak{M}}$.*

Доведення. Оскільки $I \subseteq J$, то за лемою 6 отримуємо $I_{\mathfrak{M}} \subseteq J_{\mathfrak{M}}$. Звідси і з рівності $I_{\mathfrak{M}} = R_{\mathfrak{M}}$ випливає включення $R_{\mathfrak{M}} \subseteq J_{\mathfrak{M}}$. Оскільки $J \subseteq R$, то за лемою 6 отримуємо $J_{\mathfrak{M}} \subseteq R_{\mathfrak{M}}$. З включень $R_{\mathfrak{M}} \subseteq J_{\mathfrak{M}}$ і $J_{\mathfrak{M}} \subseteq R_{\mathfrak{M}}$ випливає рівність $J_{\mathfrak{M}} = R_{\mathfrak{M}}$. □

Лема 8. *Нехай T — деяка сім'я елементів, $\{I_k\}_{k\in T}$ — будь-яка сім'я правих ідеалів кільця R і $\mathfrak{M}$ — довільний максимальний правий ідеал кільця R. Тоді правильна рівність*

$$\Big(\bigcap_{k\in T} I_k\Big)_{\mathfrak{M}} = \bigcap_{k\in T} (I_k)_{\mathfrak{M}}.$$

Доведення. Доведемо спочатку включення $\big(\bigcap_{k\in T} I_k\big)_{\mathfrak{M}} \subseteq \bigcap_{k\in T}(I_k)_{\mathfrak{M}}$. Нехай $x \in \big(\bigcap_{k\in T} I_k\big)_{\mathfrak{M}}$. Тоді існують елементи $t \in \bigcap_{k\in T} I_k$ і $d \notin \mathfrak{M}$ такі, що $x = f_{\mathfrak{M}}(t)f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1}$. Нехай l — довільний елемент з сім'ї T. Тоді, оскільки $t \in \bigcap_{k\in T} I_k$, то $t \in I_l$. Це означає, що елемент $f_{\mathfrak{M}}(t)f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1}$ належить до правого ідеалу $\big(I_l\big)_{\mathfrak{M}}$. З довільності елементу $l \in T$ маємо, що $x \in \bigcap_{k\in T}\big(I_k\big)_{\mathfrak{M}}$.

Тепер перевіримо правильність включення $\bigcap_{k\in T}\big(I_k\big)_{\mathfrak{M}} \subseteq \big(\bigcap_{k\in T} I_k\big)_{\mathfrak{M}}$. Нехай $x \in \bigcap_{k\in T}\big(I_k\big)_{\mathfrak{M}}$. Тоді $x \in \big(I_k\big)_{\mathfrak{M}}$ для будь-якого елементу $k \in T$. Нехай l — довільний елемент сім'ї T. Тоді $x \in \big(I_l\big)_{\mathfrak{M}}$. Це означає, що існують елементи $t \in I_l$ і $d \notin \mathfrak{M}$ такі, що $x = f_{\mathfrak{M}}(t)f_{\mathfrak{M}}(d)^{-1}$. Оскільки елемент l довільний, то $t \in \bigcap_{k\in T} I_k$. Це і означає, що $x \in \big(\bigcap_{k\in T} I_k\big)_{\mathfrak{M}}$. □

Тепер сформулюємо основне твердження цієї статті.

Теорема 1. *Нехай R — праве дуо-кільце, що задовольняє умову (A). Кільце R є кільцем з локально визначеними ідеалами, тоді і тільки тоді, коли кожний ненульовий первинннний ідеал цього кільця міститься в єдиному максимальному правому ідеалі.*

Доведення. Доведення необхідності проводитимемо від супротивного. Нехай R є кільцем з локально визначеними ідеалами і в ньому існує ненульовий первинний ідеал $\mathfrak{P}$, який міститься принаймні у двох різних максимальних правих ідеалах. Припустимо, що

$$V(\mathfrak{P}) \supseteq \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\},$$

де $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ — деякі максимальні праві ідеали кільця R. Для кожного максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R, відмінного від правого ідеалу $\mathfrak{M}_2$, розглянемо правий ідеал $I[\mathfrak{M}] = R_{\mathfrak{M}}$ кільця $R_{\mathfrak{M}}$, а для максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}_2$ правий ідеал $I[\mathfrak{M}_2] = \mathfrak{P}_{\mathfrak{M}_2}$ кільця $R_{\mathfrak{M}_2}$. Оскільки кільце R є кільцем з локально визначеними ідеалами, то відображення f_R є сюр'єктивним. Це означає, що для набору $\langle I[\mathfrak{M}]\rangle_{\mathfrak{M}\in \mathrm{mspec}(R)}$ існує правий ідеал J кільця R такий, що виконуються рівності $J_{\mathfrak{M}} = I[\mathfrak{M}]$ для будь-якого максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R. Звідси, виконується рівність

$$J_{\mathfrak{M}_2} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{M}_2}.$$

За лемою 5 справедливе включення $J \subseteq \mathfrak{P}$. Звідси маємо включення $J_{\mathfrak{M}_1} \subseteq \mathfrak{P}_{\mathfrak{M}_1}$. Оскільки $J_{\mathfrak{M}_1} = R_{\mathfrak{M}_1}$ і $J \subseteq \mathfrak{P}$, то за лемою 7 маємо рівність $\mathfrak{P}_{\mathfrak{M}_1} = R_{\mathfrak{M}_1}$. Тоді за лемою 5 $R \subseteq \mathfrak{P}$, а, отже, і рівність $\mathfrak{P} = R$. Це суперечить первинності ідеалу $\mathfrak{P}$, позаяк первинний ідеал є власним ідеалом.

Достатність. Нехай в кільці R кожний ненульовий первинний ідеал міститься в єдиному максимальному правому ідеалі. Доведемо, що R є кільцем з локально визначеними ідеалами, тобто, що відображення f_R є сюр'єктивним. Нехай $I[\mathfrak{M}]$ — правий ідеал в кільці $R_{\mathfrak{M}}$ для кожного максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R. Досить довести, що існує такий правий ідеал J кільця R, що рівності $J_{\mathfrak{M}} = I[\mathfrak{M}]$ виконуються для кожного максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R. Приймемо за J правий ідеал $\bigcap\limits_{\mathfrak{M} \in \operatorname{mspec}(R)} f_{\mathfrak{M}}^{-1}\big(I[\mathfrak{M}]\big)$. Нехай $\mathfrak{M}_1$ — довільний максимальний правий ідеал кільця R. Тоді отримуємо рівність $J_{\mathfrak{M}_1} = \big(\bigcap\limits_{\mathfrak{M} \in \operatorname{mspec}(R)} f_{\mathfrak{M}}^{-1}\big(I[\mathfrak{M}]\big)\big)_{\mathfrak{M}_1}$. За лемою 8 маємо рівність

$$J_{\mathfrak{M}_1} = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \operatorname{mspec}(R)} \big(f_{\mathfrak{M}}^{-1}\big(I[\mathfrak{M}]\big)\big)_{\mathfrak{M}_1}. \tag{1}$$

За наслідком з леми 8 [7] для кожного власного правого ідеалу $I[\mathfrak{M}]$ правий ідеал $f_{\mathfrak{M}}^{-1}\big(I[\mathfrak{M}]\big)$ міститься лише в одному максимальному правому ідеалі $\mathfrak{M}$. Це означає, що справедлива рівність $\big(f_{\mathfrak{M}}^{-1}\big(I[\mathfrak{M}]\big)\big)_{\mathfrak{M}_1} = R_{\mathfrak{M}_1}$ для будь-якого максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R, відмінного від правого ідеалу $\mathfrak{M}_1$. Звідси і з рівності (1), маємо, що $J_{\mathfrak{M}_1} = \big(f_{\mathfrak{M}_1}^{-1}\big(I[\mathfrak{M}_1]\big)\big)_{\mathfrak{M}_1}$. За лемою 3(1) з [7] маємо $\big(f_{\mathfrak{M}_1}^{-1}\big(I[\mathfrak{M}_1]\big)\big)_{\mathfrak{M}_1} = I[\mathfrak{M}_1]$. Отже, справедлива рівність $J_{\mathfrak{M}_1} = I[\mathfrak{M}_1]$. З довільності максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}_1$ отримуємо рівності $J_{\mathfrak{M}} = I[\mathfrak{M}]$ для кожного максимального правого ідеалу $\mathfrak{M}$ кільця R, що і треба було довести. □

Лема 9. *Нехай R — кільце з скінченною кількістю ідеалів. Тоді R є тілом або має дільники нуля.*

Доведення. Нехай $\operatorname{Id}(R) = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$. Розглянемо два випадки:

1) існують такі $k_1, k_2, \ldots k_l$, що $I_{k_1} I_{k_2} \cdots I_{k_l} = 0$, але не дорівнює нулеві добуток будь-якої меншої кількості ідеалів з множини ідеалів $\{I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_l}\}$;
2) $I_1 I_2 \cdots I_n \neq 0$.

У першому випадку кільце R є кільцем з дільниками нуля. Справді, досить взяти ідеали $I = I_{k_1}$ і $J = I_{k_2} I_{k_3} \cdots I_{k_l}$. Бачимо, що $I \neq 0$, $J \neq 0$, але $IJ = 0$.

У другому випадку розглянемо ідеал $I = I_1 I_2 \cdots I_n$. Тоді ідеал I є мінімальним серед ідеалів $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Оскільки ідеал I є мінімальним, то він є головним, тобто існує елемент $a \in R$ такий, що $I = aR$. Маємо включення $a^2 R \subseteq aR$. Проте ідеал aR мінімальний, тому $a^2 R = aR$. Отже, існує елемент $t \in R$ такий, що $a = a^2 t$. Звідси, $a - a^2 t = 0$, або $a(1 - at) = 0$. Оскільки ідеал I ненульовий, то $a \neq 0$. Розглянемо два випадки: a) $1 - at = 0$; b) $1 - at \neq 0$.

У випадку a) маємо, що $at = 1$, тобто елемент a є оборотним. Тоді $aR = R$. Оскільки ідеал aR мінімальний, то в кільці R немає інших ідеалів крім 0 і R. Це означає, що кільце R є тілом.

У випадку b) маємо, що існують елементи $a \neq 0$ і $1 - at \neq 0$ такі, що $a(1 - at) = 0$. Це означає, що в кільці R є дільники нуля. □

Сформулюємо тепер інший результат, який стосується кілець з скінченною кількістю правих ідеалів. Якщо кожний первинний ідеал такого кільця міститься в єдиному максимальному правому ідеалі, то можна встановити зв'язок між числом максимальних правих ідеалів і числом всіх його правих ідеалів. Відзначимо, що цей результат є наслідком з теореми 1.

Теорема 2. *Нехай R — праве дуо-кільце з скінченною кількістю правих ідеалів, що задовольняє умову (A). Припустимо, що кожний первинний ідеал міститься в єдиному максимальному правому ідеалі. Нехай $|\operatorname{Id}(R)| = n$ і $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}$ — розклад числа n на прості множники. Тоді $|\operatorname{mspec}(R)| \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_l$.*

Доведення. Оскільки кільце R має скінченну кількість ідеалів, то за лемою 9 воно є тілом або кільцем з дільниками нуля. Розглянемо випадок, коли кільце R є тілом. Тоді $|\operatorname{Id}(R)| = 2 = 2^1$. За твердженням теореми в даному кільці має бути щонайбільше один максимальний ідеал. Але в тілі насправді лише один максимальний ідеал (нульовий ідеал). Отже, в цьому випадку теорему доведено. Тепер розглянемо випадок, коли кільце R має дільники нуля. Оскільки кільце R задовольняє умову, що кожний первинний ідеал кільця R міститься в єдиному максимальному правому ідеалі і нульовий ідеал не є первинним, то кільце R задовольняє умову, що кожний ненульовий первинний ідеал міститься в єдиному максимальному правому ідеалі. Тоді за теоремою 1 кільце R є кільцем з локально визначеними ідеалами. Нехай $\operatorname{mspec}(R) = \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_k\}$. Тоді маємо, що відображення

$$f_R \colon \mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}_{\mathfrak{M}_\infty}) \times \mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}_{\mathfrak{M}_\in}) \times \cdots \times \mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}_{\mathfrak{M}_\|}),$$

яке для будь-якого правого ідеалу $I \in \mathcal{R}_\prime(\mathcal{R})$ діє за правилом: $f_R(I) = \langle I_\mathfrak{M} \rangle_{\mathfrak{M} \in \operatorname{mspec}(R)}$, — є бієктивним. Звідси маємо, що множини $\mathcal{R}_\prime(\mathcal{R})$ і $\mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}_{\mathfrak{M}_\infty}) \times \mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}_{\mathfrak{M}_\in}) \times \cdots \times \mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}_{\mathfrak{M}_\|})$ є рівнопотужні, тобто мають однакову кількість елементів. Оскільки R — кільце з дільниками нуля, то $\mathcal{R}_\prime(\mathcal{R}) = \operatorname{Id}(\mathcal{R})$. Отже, множини $\operatorname{Id}(R)$ і $\operatorname{Id}(R_{\mathfrak{M}_1}) \times \operatorname{Id}(R_{\mathfrak{M}_2}) \times \cdots \times \operatorname{Id}(R_{\mathfrak{M}_k})$ є рівнопотужні. Нехай $|\operatorname{Id}(R)| = n$. Тоді з рівнопотужності множин $\operatorname{Id}(R)$ і $\operatorname{Id}(R_{\mathfrak{M}_1}) \times \operatorname{Id}(R_{\mathfrak{M}_2}) \times \cdots \times \operatorname{Id}(R_{\mathfrak{M}_k})$ маємо, що $n = n_1 n_2 \cdots n_k$, де $n_i = |\operatorname{Id}(R_{\mathfrak{M}_i})|$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. Зауважимо, що кількість множників на які розкладається число n відповідає кількості максимальних правих ідеалів кільця R. Для того, щоб ця кількість була максимальною треба число n розкладати на прості множники. Оскільки $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_l^{k_l}$, то максимальна кількість максимальних правих ідеалів k дорівнює $k_1 + k_2 + \cdots + k_l$. □

Наслідок. *Нехай R — праве дуо-кільце, що задовольняє умову (A) і умову, що кожний первинний ідеал міститься в єдиному максимальному правому ідеалі, і $|\operatorname{Id}(R)| = p$, де p — просте число. Тоді кільце R — локальне.*

Доведення. Оскільки максимальна кількість максимальних правих ідеалів є сумою степенів простих чисел на які розкладається число правих ідеалів кільця R, то максимальна кількість максимальних правих ідеалів дорівнює одиниці. Це означає, що кільце R є локальним. □

Приклад 5. Нехай праве дуо-кільце, що задовольняє умову (A) й умову, що кожний первинний ідеал міститься в єдиному максимальному правому ідеалі, має 12 ідеалів. Визначимо максимальну кількість можливих максимальних правих ідеалів. Для цього розкладемо число 12 на прості множники: $12 = 2^2 \times 3^1$. Сума показників степенів при простих числах: $2 + 1 = 3$. Отже, за теоремою 2 кільце має не більше, ніж 3 максимальних правих ідеали. Якщо ж кільце з даною умовою має 19 правих ідеалів, то за наслідком з теореми воно має лише один максимальний правий ідеал.

ЛІТЕРАТУРА

1. Brandal W., Barbut E. *Localizations of torsion theories* // Pacific J. Math. – 1983. – V.107, №1. – P.27–37.
2. Latsis D., Garnier R. *Localisation dans les anneaux duos* // C. R. Acad. Sc., Ser. A. – 1976. – V.282, №24. – P.1403–1406.
3. Pirtle E. M. *Localization in duo rings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – V.25. – P.452–461.
4. Pirtle E. M. *Localization in duo rings* // Publ. Math. – 1984. – V.31, №1. – P.47–52.
5. Thakare N. K., Nimbhorkar S. K. *Space of minimal prime ideals of a ring without nilpotent elements* // J. Pure and Appl. Algebra. – 1983. – V.27, №1. – P.75–85.
6. Тушницкий И. Я. *Кольца с локально определенными кручениями* // Алгебра и логика (Новосибирск). – 1991. – Т.30, №3. – С.369–377.
7. Тушницький І. Я. *Кільця з локально визначеними крученнями* // Тематичний збірник наукових праць "Алгебра і топологія": Київ, 1993. – С.88–109.
8. Тушницький І. Я. *Структура дуо-кілець з локально визначенимискрутами та регулярні кільця зі скінченною множиною максимальних ідеалів* // Вісник Львів. ун–ту. Серія мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С.5–11.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 11.04.1998
Після переробки 31.03.1999
Після переробки 10.09.2000