УДК 517.9

В. Ю. Слюсарчук

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ЛІПШИЦЕВОЇ ОБОРОТНОСТІ НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА $\frac{d}{dt} - f$ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ НА ОСІ ФУНКЦІЙ

V. Yu. Slyusarchuk. *Necessary and sufficient conditions of Lipschitz's reversibility of nonlinear differential operator $d/dt - f$ in the space of bounded functions on axis*, Matematychni Studii, **15** (2001) 77–86.

Necessary and sufficient conditions of Lipschitz's reversibility of the nonlinear differential operator $d/dt - f$ ($f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function) in the space of bounded functions on $\mathbb{R}$ are obtained.

В. Ю. Слюсарчук. *Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейного дифференциального оператора $d/dt - f$ в пространстве ограниченных на оси функций* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №1. – С.77–86.

Получены необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейного дифференциального отображения $d/dt - f$ ($f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывное отображение) в пространстве ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

1. Постановка задачі. Позначимо через C^0 банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} | x(t) |$, а через C^1 — банахів простір функцій $x = x(t) \in C^0$, для кожної з яких $\frac{dx}{dt} \in C^0$, з нормою $\|x\|_{C^1} = \|x\|_{C^0} + \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}$.

Відображення $\mathcal{A}\colon X \to Y$ $(X, Y \in \{C^0, C^1\})$ називається *ліпшицевим*, якщо

$$\sup_{u,v\in X,\ u\neq v} \frac{\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\|_Y}{\|u - v\|_X} < +\infty.$$

Розглянемо неперервне відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нехай

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{u,v\in\mathbb{R},\ u\neq v} \left|\frac{f(u) - f(v)}{u - v}\right| \quad \text{і} \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{u,v\in\mathbb{R},\ u\neq v} \left|\frac{f(u) - f(v)}{u - v}\right|.$$

Вважатимемо, що

$$M < +\infty. \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 57N20.

Прикладом ліпшицевого диференціального відображення, яке діє із C^1 в C^0, є відображення $\mathcal{L}$, визначене рівністю

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $x \in C^1$.

З'ясуємо, коли це відображення має обернене ліпшицеве відображення.

Зауважимо, що в класі нелінійних диференціальних відображень відображення $\mathcal{L}$ є найпростішим. Проте розв'язання задачі про ліпшицеву оборотність цього відображення є нетривіальним. Це в першу чергу обумовлено нелінійністю відображення $\mathcal{L}$ (запропоновані, наприклад, в [1]–[11] методи дослідження оборотності лінійних і слабо нелінійних відображень незастосовні до $\mathcal{L}$). Розглядуваний тут метод дослідження відображення $\mathcal{L}$ базується на різницевій апроксимації цього відображення та істотно використовує локально збіжні послідовності елементів простору L_∞ (L_∞ — банахів простір вимірних та істотно обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ із значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{L_\infty} = \text{vrai } \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$).

2. Формулювання основних результатів.

Теорема 1. *Нехай виконується співвідношення (1). Для того, щоб відображення $\mathcal{L}\colon C^1 \to C^0$ мало обернене ліпшицеве відображення $\mathcal{L}^{-1}$, необхідно і досить, щоб*

$$m > 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються співвідношення (1) і (2). Тоді для всіх $h_1, h_2 \in C^0$*

$$\|\mathcal{L}^{-1}h_1 - \mathcal{L}^{-1}h_2\|_{C^0} \le \frac{1}{m}\|h_1 - h_2\|_{C^0}, \tag{3}$$

$$\|\mathcal{L}^{-1}h_1 - \mathcal{L}^{-1}h_2\|_{C^1} \le \frac{M+m+1}{m}\|h_1 - h_2\|_{C^0} \tag{4}$$

і для всіх $h \in C^0$

$$\|\mathcal{L}^{-1}h\|_{C^0} \le \frac{1}{m}\|h + f(0)\|_{C^0}, \tag{5}$$

$$\|\mathcal{L}^{-1}h\|_{C^1} \le \frac{M+m+1}{m}\|h + f(0)\|_{C^0}. \tag{6}$$

3. Банахів простір $L_{\infty,\varepsilon}$ та відображення S_ε. Розглянемо довільне число $\varepsilon > 0$. Позначимо через $L_{\infty,\varepsilon}$ підпростір з нормою $\|y\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \overset{\text{def}}{=} \|y\|_{L_\infty}$ простору L_∞, для кожного із елементів y якого виконується співвідношення

$$y(t) = y\left(\varepsilon[t/\varepsilon]\right) \tag{7}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, де $[t/\varepsilon]$ — ціла частина числа t/ε. Внаслідок (7) та повноти простору L_∞ простір $L_{\infty,\varepsilon}$ також є повним.

Лінійне відображення $S_\varepsilon\colon C^0 \to L_{\infty,\varepsilon}$ визначимо за допомогою рівності

$$(S_\varepsilon y)(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon[t/\varepsilon]-\varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} y(s)ds, \quad y \in C^0, t \in \mathbb{R}.$$

Лема 1. *Для кожного $\varepsilon \in (0, \infty)$ норма відображення $S_\varepsilon \colon C^0 \to L_{\infty,\varepsilon}$ дорівнює 1.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0, \infty)$. Очевидно, що для всіх $x \in C^0$

$$\|S_\varepsilon x\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon[t/\varepsilon]-\varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} \|x\|_{C^0} ds = \|x\|_{C^0},$$

тобто $\|S_\varepsilon\|_{L(C^0, L_{\infty,\varepsilon})} \leq 1$. Оскільки $S_\varepsilon z = z$ для функції $z(t) \equiv 1$, то виконується $\|S_\varepsilon\|_{L(C^0, L_{\infty,\varepsilon})} = 1$. □

4. Різницеве відображення $\mathcal{D}_\varepsilon \colon L_{\infty,\varepsilon} \to L_{\infty,\varepsilon}$.

Розглянемо різницеве відображення $\mathcal{D}_\varepsilon \colon L_{\infty,\varepsilon} \to L_{\infty,\varepsilon}$ та відображення зсуву $T_\tau \colon L_\infty \to L_\infty$, $\tau \in \mathbb{R}$, визначені рівностями

$$(\mathcal{D}_\varepsilon x)(t) = x(t) - x(t-\varepsilon) - \varepsilon f(x(t-\varepsilon)), \quad (T_\tau y)(t) = y(t+\tau),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$, $x \in L_{\infty,\varepsilon}$ і $y \in L_\infty$.

Лема 2. *Нехай виконуються співвідношення (1), (2) і $\varepsilon \in (0, 1/M)$. Тоді:*

а) для кожного $h \in C^0$ рівняння

$$\mathcal{D}_\varepsilon z_\varepsilon = \varepsilon S_\varepsilon h \tag{8}$$

має єдиний розв'язок $z_\varepsilon \in L_{\infty,\varepsilon}$, для якого

$$\|z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \leq \frac{1}{m} \|h + f(0)\|_{C^0} \tag{9}$$

і для всіх $\tau \in [0, \varepsilon]$

$$\|z_\varepsilon - T_\tau z_\varepsilon\|_{L_\infty} \leq \varepsilon \left(1 + \frac{M}{m}\right) \|h + f(0)\|_{C^0}; \tag{10}$$

б) для розв'язків $z_{\varepsilon,1}$ і $z_{\varepsilon,2}$ рівняння (8), відповідно при $h = h_1$ і $h = h_2$ ($h_1, h_2 \in C^0$), виконується співвідношення

$$\|z_{\varepsilon,1} - z_{\varepsilon,2}\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \leq \frac{1}{m} \|h_1 - h_2\|_{C^0}. \tag{11}$$

Доведення. Спочатку доведемо твердження а). Розглянемо випадок, коли функція $f(t)$ є спадною на $\mathbb{R}$. Згідно з (1) і (2)

$$1 - \varepsilon M \leq \frac{u + \varepsilon f(u) - v - \varepsilon f(v)}{u - v} \leq 1 - \varepsilon m, \tag{12}$$

при $u \neq v$. Тому визначене рівністю $(A_\varepsilon z)(t) = z(t-\varepsilon) + \varepsilon(f(z(t-\varepsilon)) - f(0))$ відображення $A_\varepsilon \colon L_{\infty,\varepsilon} \to L_{\infty,\varepsilon}$ є стискаючим відображенням [12] при $\varepsilon \in (0, 1/M)$, оскільки $0 < 1 - \varepsilon m < 1$ і на підставі (12) для всіх $x, y \in L_{\infty,\varepsilon}$

$$\|A_\varepsilon x - A_\varepsilon y\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \leq (1 - \varepsilon m) \|x - y\|_{L_{\infty,\varepsilon}}. \tag{13}$$

Отже, при $\varepsilon \in (0, 1/M)$ рівняння (8), яке можна подати у вигляді

$$z_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t-\varepsilon) + \varepsilon(f(z_\varepsilon(t-\varepsilon)) - f(0)) + \varepsilon(S_\varepsilon(h + f(0)))(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

для кожного $h \in C^0$ має єдиний розв'язок $z_\varepsilon \in L_{\infty,\varepsilon}$ (зауважимо, що $\varepsilon S_\varepsilon(h+f(0)) \in L_{\infty,\varepsilon}$ згідно з визначенням відображення S_ε).

Оцінимо норму $\|z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}}$ при $\varepsilon \in (0, 1/M)$. Із (12) і (14) випливає, що

$$|z_\varepsilon(t)| \le (1 - \varepsilon m)|z_\varepsilon(t-\varepsilon)| + \varepsilon|(S_\varepsilon(h + f(0)))(t)|$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тому з урахуванням леми 1 $\|z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \le (1-\varepsilon m)\|z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} + \varepsilon\|h + f(0)\|_{C^0}$ і, отже, для всіх $\varepsilon \in (0, 1/M)$ виконується співвідношення (9).

Тепер розглянемо випадок, коли функція $f(t)$ є зростаючою на $\mathbb{R}$. Тоді згідно з (1) і (2) при $u \ne v$ виконується нерівність

$$1 + \varepsilon m \le \frac{u + \varepsilon f(u) - v - \varepsilon f(v)}{u - v} \le 1 + \varepsilon M, \tag{15}$$

і для відображення A_ε для всіх $x, y \in L_{p,\varepsilon}$ і $\varepsilon \in (0, \infty)$ правильна нерівність

$$\|A_\varepsilon x - A_\varepsilon y\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \ge (1 + \varepsilon m)\|x - y\|_{L_{\infty,\varepsilon}}. \tag{16}$$

Тому, якщо рівняння (8), а, отже, і рівняння (14), має розв'язок $z_\varepsilon \in L_{\infty,\varepsilon}$, то $\|z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \ge (1+\varepsilon m)\|z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} - \varepsilon\|h + f(0)\|_{C^0}$, звідки випливає нерівність (9).

Покажемо, що рівняння (14) в просторі $L_{\infty,\varepsilon}$ має єдиний розв'язок.

Із (15) випливає, що функція $g(t) \overset{\text{def}}{=} t + \varepsilon(f(t) - f(0))$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$. Тому вона має обернену функцію і, отже, відображення $A_\varepsilon \colon L_{\infty,\varepsilon} \to L_{\infty,\varepsilon}$ також має обернене відображення

$$(A_\varepsilon^{-1}x)(t) = g^{-1}(x(t+\varepsilon)),\ t \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \infty), \tag{17}$$

для якого згідно з (16) для всіх $x, y \in L_{\infty,\varepsilon}$

$$\|A_\varepsilon^{-1}x - A_\varepsilon^{-1}y\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \le (1 + \varepsilon m)^{-1}\|x - y\|_{L_{\infty,\varepsilon}}. \tag{18}$$

Очевидно, що рівняння (14) є еквівалентне до рівняння

$$z_\varepsilon(t) = g^{-1}(z_\varepsilon(t+\varepsilon) - \varepsilon(S_\varepsilon(h + f(0)))(t+\varepsilon)), \quad t \in \mathbb{R},$$

до якого на підставі (17) і (18) можна застосувати принцип стискаючих відображень. Згідно з цим принципом рівняння (14) в просторі $L_{\infty,\varepsilon}$ має єдиний розв'язок для кожних $h \in L_\infty$ і $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Тепер доведемо, що виконується нерівність (10).

Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0, 1/M)$. Нехай z_ε — єдиний розв'язок рівняння (14). Згідно з включенням $z_\varepsilon \in L_{\infty,\varepsilon}$ для функції $w \overset{\text{def}}{=} f(z_\varepsilon(t-\varepsilon)) - f(0)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ правильна рівність

$$f(z_\varepsilon(t-\varepsilon)) - f(0) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon[t/\varepsilon]-\varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} (f(z_\varepsilon(s)) - f(0))ds,$$

при цьому на підставі (1), леми 1 і (9)

$$\|w\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \le M\|T_{-\varepsilon}z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} = M\|z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \le \frac{M}{m}\|h+f(0)\|_{C^0}.$$

Звідси та з нерівності

$$|z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t-\varepsilon)| \le \varepsilon|f(z_\varepsilon(t-\varepsilon)) - f(0)| + \varepsilon|(S_\varepsilon(h+f(0)))(t)|, \quad t\in\mathbb{R},$$

яка випливає з (14), застосовуючи лему 1, отримуємо, що

$$\|z_\varepsilon - T_{-\varepsilon}z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \le \varepsilon\left(1+\frac{M}{m}\right)\|h+f(0)\|_{C^0}.$$

З цієї нерівності та з того, що при $\tau\in(0,\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\|z_\varepsilon - T_{-\tau}z_\varepsilon\|_{L_\infty} &= \sup_{t\in\mathbb{R}}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\tau)| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{k\varepsilon\le t<(k+1)\varepsilon}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\tau)| = \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\max\Big\{\sup_{k\varepsilon\le t<k\varepsilon+\tau}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\tau)|, \sup_{k\varepsilon+\tau\le t<(k+1)\varepsilon}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\tau)|\Big\} = \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{k\varepsilon\le t<k\varepsilon+\tau}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\tau)| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{k\varepsilon\le t<k\varepsilon+\tau}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\varepsilon)| = \\
&= \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{k\varepsilon\le t<(k+1)\varepsilon}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\varepsilon)| = \|z_\varepsilon - T_{-\varepsilon}z_\varepsilon\|_{L_{\infty,\varepsilon}}
\end{aligned}$$

(тут враховано те, що $\sup\limits_{k\varepsilon+\tau\le t<(k+1)\varepsilon}|z_\varepsilon(t)-z_\varepsilon(t-\tau)|=0$), отримуємо (10).

Отже, твердження а) доведено.

Доведемо твердження б). На підставі (12) та (15) відповідно отримуємо, що для всіх $t\in\mathbb{R}$

$$|z_{\varepsilon,1}(t)-z_{\varepsilon,2}(t)| \le (1-\varepsilon m)|z_{\varepsilon,1}(t-\varepsilon)-z_{\varepsilon,2}(t-\varepsilon)| + \varepsilon|(S_\varepsilon(h_1-h_2))(t)|,$$

якщо функція $f(t)$ є спадною на $\mathbb{R}$, і

$$|z_{\varepsilon,1}(t)-z_{\varepsilon,2}(t)| \ge (1+\varepsilon m)|z_{\varepsilon,1}(t-\varepsilon)-z_{\varepsilon,2}(t-\varepsilon)| - \varepsilon|(S_\varepsilon(h_1-h_2))(t)|,$$

якщо функція $f(t)$ є зростаючою на $\mathbb{R}$. Тому застосування леми 1 дає

$$\|z_{\varepsilon,1}-z_{\varepsilon,2}\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \le (1-\varepsilon m)\|z_{\varepsilon,1}-z_{\varepsilon,2}\|_{L_{\infty,\varepsilon}} + \varepsilon\|h_1-h_2\|_{C^0}$$

або

$$\|z_{\varepsilon,1}-z_{\varepsilon,2}\|_{L_{\infty,\varepsilon}} \ge (1+\varepsilon m)\|z_{\varepsilon,1}-z_{\varepsilon,2}\|_{L_{\infty,\varepsilon}} - \varepsilon\|h_1-h_2\|_{C^0}.$$

Звідси випливає нерівність (11). □

5. Локально збіжні послідовності та локальна передкомпактність множини $\{z_{1/k} : k\in\mathbb{N}\cap(M,\infty)\}$.

Позначимо через $P_{[-a,a]}$, де $a\in(0,\infty)$, відображення, яке діє в просторі L_∞ і визначається рівністю

$$(P_{[-a,a]}y)(t) = \begin{cases} y(t), & \text{якщо } t\in[-a,a], \\ 0, & \text{якщо } t\notin[-a,a]. \end{cases}$$

Говоритимемо, що обмежена послідовність x_k, $k\ge1$, елементів простору L_∞ *локально збігається* до $x\in L_\infty$ при $k\to\infty$ і позначатимемо $x_k \overset{\text{лок.},\, L_\infty}{\longrightarrow} x$ при $k\to\infty$, якщо $\lim_{k\to\infty}\|P_{[-a,a]}(x_k-x)\|_{L_\infty}=0$ для кожного $a>0$.

Лема 3. *Нехай:*
1) $\mathcal{M}$ — обмежена підмножина простору L_∞;
2) множина $P_{[-a,a]}\mathcal{M}$ передкомпактна в L_∞ для кожного $a > 0$.
Тоді існують послідовність $x_k \in \mathcal{M}$, $k \geq 1$, та елемент $x \in L_\infty$ такі, що

$$x_k \overset{\text{лок.},\ L_\infty}{\longrightarrow} x(k \to \infty) \quad i \quad \|x\|_{L_\infty} \leq \sup\{\|z\|_{L_\infty} : z \in \mathcal{M}\}.$$

Доведення. На підставі умов леми можна побудувати послідовності

$$x_{l1}, x_{l2}, \ldots, x_{ln}, \ldots, \quad l \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

для яких: 1) $x_{ij} \in \mathcal{M}$ для всіх $i, j \in \mathbb{N}$; 2) $\{x_{1l} : l \in \mathbb{N}\} \supset \{x_{2l} : l \in \mathbb{N}\} \supset \ldots \{x_{kl} : l \in \mathbb{N}\} \supset \ldots$; 3) послідовності $P_{[-l,l]}x_{l1}, P_{[-l,l]}x_{l2}, \ldots, P_{[-l,l]}x_{ln}, \ldots$ $(l \in \mathbb{N})$ є збіжними.

Ці властивості послідовностей (19) дають змогу розглянути елементи

$$y_l = \lim_{n\to\infty} P_{[-l,l]}x_{ln} \in L_\infty, \quad l \in \mathbb{N},$$

для яких, очевидно, $y_l(t) = y_{l-1}(t)$ для всіх $t \in [-l+1, l-1]$ и $l \geq 2$. Також, очевидно, що

$$(\forall l \geq 1) : \|y_l\|_{L_p} \leq \mu, \tag{20}$$

де $\mu = \sup\{\|z\|_{L_p} : z \in \mathcal{M}\}$.

Нехай $x = x(t)$ — така визначена на $\mathbb{R}$ функція, що для всіх $l \in \mathbb{N}$

$$x|_{[-l,l]} = y_l|_{[-l,l]}. \tag{21}$$

Тоді на підставі (14) $x \in L_\infty$ і $\|x\|_{L_\infty} \leq \mu$. Розглянемо діагональну послідовність $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{ll}, \ldots$. Враховуючи (21) і властивості послідовностей (19), отримаємо $x_{ll} \overset{\text{лок.},\ L_\infty}{\longrightarrow} x$ при $l \to \infty$. □

Обмежену підмножину $\mathcal{P}$ простору L_∞ називатимемо *локально передкомпактною*, якщо множина $P_{[-a,a]}\mathcal{P}$ є передкомпактною в L_∞ для кожного $a > 0$.

Розглянемо множину $\Gamma = \{z_{1/k} : k \in \mathbb{N} \cap (M, \infty)\}$, де $z_{1/k}$ — розв'язок рівняння (8) при $\varepsilon = 1/k$.

Лема 4. *Множина Γ передкомпактна в L_∞.*

Доведення. Зауважимо, що множина Γ обмежена (на підставі нерівності (9)), а множина $P_{[-a,a]}\Gamma$ передкомпактна для кожного $a > 0$. Справді, розглянемо лінійне відображення $\Lambda_\varepsilon \colon L_{\infty,\varepsilon} \to L_\infty$, визначене рівністю

$$(\Lambda_\varepsilon x)(t) = \frac{\varepsilon + \varepsilon[t/\varepsilon] - t}{\varepsilon}x(t) + \frac{t - \varepsilon[t/\varepsilon]}{\varepsilon}x(t+\varepsilon),$$

де $x \in L_{\infty,\varepsilon}$ і $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, що для кожної функції $x \in L_{\infty,\varepsilon}$: 1) $(\Lambda_\varepsilon x)(t)$ — неперервна на $\mathbb{R}$ функція; 2) $(\Lambda_\varepsilon x)(k\varepsilon) = x(k\varepsilon)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$; 3) $(\Lambda_\varepsilon x)(t)$ — лінійна функція на кожному відрізку $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left|\frac{d(\Lambda_\varepsilon x)(t)}{dt}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x - T_\varepsilon x\|_{L_{\infty,\varepsilon}}$ для всіх $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\varepsilon : k \in \mathbb{Z}\}$; 5) $\|x - \Lambda_\varepsilon x\|_{L_\infty} \leq \|x - T_\varepsilon x\|_{L_{\infty,\varepsilon}}$.

Далі розглянемо множину $\Gamma_\Lambda = \{\Lambda_\varepsilon z_\varepsilon : \varepsilon = 1/n, n \in (M, \infty) \cap \mathbb{N}\}$. Ця множина обмежена на підставі обмеженості множини Γ, властивості 5) і нерівності (10). Елементи цієї множини також рівностепенево неперервні на $\mathbb{R}$ завдяки властивостям відображення Λ_ε та нерівності (10). Тому за теоремою Арцела-Асколі [12, с. 131] множина $P_{[-a,a]}\Gamma_\Lambda$ передкомпактна в L_∞ для кожного $a > 0$. Тоді згідно із властивістю 5) та нерівністю (10) множина $P_{[-a,a]}\Gamma$ також передкомпактна в L_∞ для кожного $a > 0$. $\square$

6. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Необхідність. Нехай відображення $\mathcal{L}\colon C^1 \to C^0$ має обернене ліпшицеве відображення.

Припустимо, що співвідношення (2) не виконується. Існують такі числа $u_k, v_k \in \mathbb{R}$, $u_k \neq v_k$, $k \in \mathbb{N}$, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(u_k) - f(v_k)}{u_k - v_k} = 0. \tag{22}$$

Розглянемо елементи $x_k, y_k \in C^1$, для яких $x_k(t) = u_k$ і $y_k(t) = v_k$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Тоді $(\mathcal{L}x_k)(t) = -f(u_k)$, $(\mathcal{L}y_k)(t) = -f(v_k)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ і

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathcal{L}x_k - \mathcal{L}y_k\|_{C^0}}{\|x_k - y_k\|_{C^1}} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{f(u_k) - f(v_k)}{u_k - v_k}\right|,$$

що згідно з (22) суперечить ліпшицевості відображення $\mathcal{L}^{-1}$.

Отже, співвідношення (2) виконується.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай виконуються співвідношення (1) і (2). Доведемо, що цих умов достатньо для ліпшицевої оборотності відображення $\mathcal{L}\colon C^1 \to C^0$.

Розглянемо довільну функцію $h \in C^0$. Перевіримо спочатку, що рівняння

$$\mathcal{L}x = h \tag{23}$$

має єдиний розв'язок $x \in C^1$.

За лемою 2 для кожного $\varepsilon \in (0, 1/M)$ існує функція $z_\varepsilon \in L_{\infty,\varepsilon}$, для якої виконується нерівність (9) і така, що для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t-\varepsilon) - \varepsilon f(z_\varepsilon(t-\varepsilon)) = \int_{\varepsilon[t/\varepsilon]-\varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} h(s)ds.$$

Цю рівність, очевидно, можна подати у вигляді

$$z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(t-\varepsilon) - \int_{\varepsilon[t/\varepsilon]-\varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} f(z_\varepsilon(s))ds = \int_{\varepsilon[t/\varepsilon]-\varepsilon}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} h(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що для всіх $\mu, t \in \mathbb{R}$

$$z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(\mu) - \int_{\varepsilon[\mu/\varepsilon]}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} f(z_\varepsilon(s))ds = \int_{\varepsilon[\mu/\varepsilon]}^{\varepsilon[t/\varepsilon]} h(s)ds. \tag{24}$$

На підставі лем 3 та 4 існують послідовності $\varepsilon_l \in \{1/k : k \in \mathbb{N} \cap (M, \infty)\}$, $x_l \stackrel{\text{def}}{=} z_{\varepsilon_l}$, $l \in \mathbb{N}$ і функція $x \in L_\infty$, для яких $\lim\limits_{l\to\infty} \varepsilon_l = 0$,

$$x_l \overset{\text{лок., } L_\infty}{\longrightarrow} x, \quad l \to \infty, \tag{25}$$

і

$$\|x\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{m} \|h + f(0)\|_{C^0}. \tag{26}$$

Оскільки $\lim_{l\to\infty} \varepsilon_l [t/\varepsilon_l] = t$ для кожного $t \in \mathbb{R}$, і функції $f(x_1(t))$,$f(x_2(t))$,$f(x_3(t)), \ldots$, на підставі (9), (10) та ліпшицевості відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, мають рівностепенево абсолютно неперервні інтеграли Лебега на кожній множині скінченної міри (функції $f(x(t))$ і $h(t)$ також мають цю властивість, як елементи простору L_∞), то за (24), (25) та теоремою Д. Віталі [13, с. 144] про граничний перехід під знаком інтегралу отримуємо, що для всіх $\mu, t \in \mathbb{R}$

$$x(t) - x(\mu) - \int_\mu^t f(x(s))ds = \int_\mu^t h(s)ds. \tag{27}$$

Із цієї рівності і абсолютної неперервності інтегралів $\int_\mu^t f(x(s))ds$, $\int_\mu^t h(s)ds$ випливає, що абсолютно неперервною, а, отже, неперервною на $\mathbb{R}$ є і функція $x(t)$. Тоді на підставі (27) для всіх $t \in \mathbb{R}$ існує похідна $dx(t)/dt$ і є правильною рівність

$$\frac{dx(t)}{dt} - f(x(t)) = h(t).$$

Звідси, з (1), (26), неперервності $x(t)$ на $\mathbb{R}$ та включення $h \in C^0$ випливає, що $x \in C^1$.

Доведемо, що x — єдиний розв'язок рівняння (23).

Припустимо, що рівняння (23) також має розв'язок $y \in C^1$ і нехай для деякого $\tau \in \mathbb{R}$

$$x(\tau) \neq y(\tau). \tag{28}$$

Якщо $f(t)$ — зростаюча на $\mathbb{R}$ функція, то $x(t) \neq y(t)$ для всіх $t \geq \tau$. Справді, якщо для деякого $\mu > \tau$

$$x(\mu) = y(\mu) \tag{29}$$

і $x(t) \neq y(\tau)$ для всіх $t \in [\tau, \mu)$, то згідно з (23) для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d(x(t) - y(t))}{dt} = f(x(t)) - f(y(t))$$

і тому, через належність $x - y$ до простору C^1 для всіх $t \in [\tau, \mu)$

$$|x(t) - y(t)| \geq \exp\{m(t - \tau)\}|x(\tau) - y(\tau)|,$$

що на підставі (2), (28) та неперервності функції $x(t) - y(t)$ в точці μ суперечить (29).

Отже, для всіх $t \geq \tau$

$$|x(t) - y(t)| \geq \exp\{m(t - \tau)\}|x(\tau) - y(\tau)|. \tag{30}$$

Якщо $f(t)$ — спадна на $\mathbb{R}$ функція, то для всіх $t \leq \tau$

$$|x(t) - y(t)| \geq \exp\{m(\tau - t)\}|x(\tau) - y(\tau)| \tag{31}$$

(цей випадок зводиться до розглянутого випадку заміною t на $-t$).

На підставі (2) кожне із співвідношень (30) і (31) суперечить включенню $x - y \in C^1$.

Отже, припущення про виконання співвідношення (28) є хибним, тобто $x = y$. Звідси та з довільності вибору $h \in C^0$ випливає, що відображення $\mathcal{L}\colon C^1 \to C^0$ має обернене відображення $\mathcal{L}^{-1}$.

Покажемо, що відображення $\mathcal{L}^{-1}\colon C^0 \to C^1$ є ліпшицевим. Зафіксуємо довільні $h_1, h_2 \in C^0$. Згідно з лемою 2 для кожного $\varepsilon \in (0, 1/M)$ розв'язки $z_{\varepsilon,1}$ і $z_{\varepsilon,2}$ рівняння (8), відповідно при $h = h_1$ і $h = h_2$, задовольняють співвідношення (11), а згідно з лемами 3, 4 та доведенням оборотності відображення $\mathcal{L}\colon C^1 \to C^0$ існує послідовність $\varepsilon_l \in (0, 1/M)$, $l \in \mathbb{N}$, для якої

$$z_{\varepsilon_l,1} \overset{\text{лок.},\, L_\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}^{-1}h_1 \quad \text{і} \quad z_{\varepsilon_l,2} \overset{\text{лок.},\, L_\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}^{-1}h_2, \quad l \to \infty.$$

Звідси та з (11) випливає нерівність (3). Оскільки для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{d((\mathcal{L}^{-1}h_1)(t) - (\mathcal{L}^{-1}h_2)(t))}{dt} = f((\mathcal{L}^{-1}h_1)(t)) - f((\mathcal{L}^{-1}h_2)(t)) + h_1(t) - h_2(t)$$

і, отже, для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{d((\mathcal{L}^{-1}h_1)(t) - (\mathcal{L}^{-1}h_2)(t))}{dt}\right| \leq M|(\mathcal{L}^{-1}h_1)(t) - (\mathcal{L}^{-1}h_2)(t)| + |h_1(t) - h_2(t)|,$$

то згідно з (3) та визначенням норми в C^1 справджується і нерівність (4).

Отже, достатність доведено. □

Доведення теореми 2. Співвідношення (3) і (4) виконуються, що показано в завершальній частині доведення теореми 1. Співвідношення (5) виконується на підставі (26). Співвідношення (6) є наслідком визначення норми в C^1, співвідношення (5) та нерівності

$$\left|\frac{d(\mathcal{L}^{-1}h)(t)}{dt}\right| \leq M\left|(\mathcal{L}^{-1}h)(t)\right| + |h(t) + f(0)|, \ t \in \mathbb{R},$$

яка випливає із тотожності

$$\frac{d(\mathcal{L}^{-1}h)(t)}{dt} \equiv \big(f((\mathcal{L}^{-1}h)(t)) - f(0)\big) + (h(t) + f(0)).$$

□

7. Зауваження. Для обґрунтування теорем 1 і 2 можна було б також використати метод монотонних операторів [14] або ж результати праць [15],[16] про оборотність відображення $\mathcal{L}$ та аналогічного різницевого відображення з неліпшицевим f. Запропонований тут метод дослідження відображення $\mathcal{L}$ має ті переваги, що при незначних доповненнях він застосовний до рівняння (23), якщо h є елементом L_p $(1 \leq p < \infty)$ — банахового простору вимірних і сумовних в степені p на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ із значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{L_p} = (\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt)^{1/p}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
2. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. – 720 с.
4. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наукова думка, 1990. – 271 с.
5. Мухамадиев Э. *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций* // Матем. заметки. – 1972. – Т.11, №3. – С.269–274.
6. Слюсарчук В. Е. *Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов* // Матем. сб. – 1981. – Т.116(158), №4(12). – С.483–501.
7. Слюсарчук В. Е. *Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов* // Матем. сб. – 1986. – Т.130(172), №1(5). – С.86–104.
8. Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов*// Матем. заметки. – 1987. – Т.42, №2. – С.262–267.
9. Слюсарчук В. Е. *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений* // Укр. мат. журн. – 1987. – Т. 39, №5. – С.660–662.
10. Слюсарчук В. Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, №2. – С.201–205.
11. Баскаков А. Г. *Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов* // Докл. РАН. – 1993. – Т.333, №3. – С. 282–284.
12. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: Изд. "Университетское", 1984. – 352 с.
13. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
14. Трубников Ю. В., Перов А. И. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.
15. Слюсарчук В. Ю. *Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних диференціальних операторів у просторі обмежених на осі функцій* // Матем. студії. – 1999. – Т.12, №2. – С.213–220.
16. Слюсарчук В. Ю. *Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних різницевих відображень у просторі* $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ // Матем. студії. – 2000. – Т.13, №1. – С.64–73.

Рівненський державний технічний університет

Надійшло 7.07.2000