УДК 513.88

Д. С. Калюжный-Вербовецкий

КАСКАДНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И КОНСЕРВАТИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗЛОЖИМОЙ ВНУТРЕННЕЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ В БИКРУГЕ

D. C. Kalyuzhnyi-Verbovetskyi. *Cascade connections of multiparametric linear systems and conservative realization of a decomposable inner operator-valued function on bidisk*, Matematychni Studii, **15** (2001) 65–76.

We introduce the notion of cascade connection of multiparametric discrete time-invariant linear dynamical systems with unit delay. This allows us to construct the explicit example of conservative realization of a decomposable operator-valued function $\theta(z_1, z_2) = \theta_2(z_2)\theta_1(z_1)$, where θ_1 and θ_2 are inner operator-valued functions on the unit disk, vanishing at zero, and discuss some properties of such realization.

Д. С. Калюжный-Вербовецкий. *Каскадные соединения многопараметрических линейных систем и консервативная реализация разложимой внутренней оператор-функции в бикруге* // Математичнi Студiї. – 2001. – Т.15, №1. – С.65–76.

Вводится понятие каскадного соединения многопараметрических дискретных линейных стационарных динамических систем с единичным запаздыванием. Это позволяет построить явный пример консервативной реализации разложимой внутренней оператор-функции $\theta(z_1, z_2) = \theta_2(z_2)\theta_1(z_1)$, где θ_1 и θ_2 — внутренние оператор-функции в единичном круге, исчезающие в нуле, и обсудить некоторые свойства такой реализации.

0. Введение. В последние 10–15 лет, в связи с исследованием операторных наборов (см. [19, 20]), многопараметрической теорией рассеяния (см. [4, 12]), лифтинг-теорией и теорией интерполяции для нескольких комплексных переменных (см. [6, 7, 9, 10, 11, 13, 14]), усилился интерес к теории многопараметрических линейных систем, т.е. таких, в которых роль времени играет уже многомерный параметр, дискретный или непрерывный. В работах [15, 16, 17] мы развиваем подход к теории многопараметрических диссипативных (консервативных) линейных стационарных динамических систем рассеяния, тесно увязанный с интересами теории функций нескольких комплексных переменных, теории управления и теории операторов, в частности, с изучением линейных пучков сжимающих (унитарных) операторов на единичном N-мерном торе $\mathbb{T}^N$.

В [15] вводится понятие *N-параметрической линейной стационарной динамической системы* вида

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \sum_{k=1}^{N}(A_k x(t-e_k) + B_k u(t-e_k)), \\ y(t) & = & \sum_{k=1}^{N}(C_k x(t-e_k) + D_k u(t-e_k)), \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{Z}^N,\ |t| > 0) \qquad (0.1)$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47A56, 93B15, 93C35.

где $|t| := \sum_{k=1}^{N} t_k$, для $k \in \{1, \dots, N\}$ $e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^N$ (здесь единица — на k-ом месте, и нули — на остальных местах); для всех $t \in \mathbb{Z}^N$ таких, что $|t| \geq 0$, $x(t)$ $(\in \mathcal{X})$, $u(t)$ $(\in \mathcal{U})$, и для всех $t \in \mathbb{Z}^N$ таких, что $|t| > 0$, $y(t)$ $(\in \mathcal{Y})$ — соответственно *состояния, входные и выходные данные* системы α, а $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$ — сепарабельные гильбертовы пространства; для всех $k \in \{1, \dots, N\}$ $A_k \in [\mathcal{X}, \mathcal{X}]$, $B_k \in [\mathcal{U}, \mathcal{X}]$, $C_k \in [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, $D_k \in [\mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ — линейные ограниченные операторы (здесь $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ обозначает банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$). Вводя обозначение $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_N)$ для наборов операторов, действующих в общей для них паре (возможно, совпадающих) гильбертовых пространств, можно для системы (0.1) использовать обозначение $\alpha = (N; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Если $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, положим $z\mathbf{T} := \sum_{k=1}^{N} z_k T_k$. Оператор-функция

$$\theta_\alpha(z) = z\mathbf{D} + z\mathbf{C}(I_{\mathcal{X}} - z\mathbf{A})^{-1} z\mathbf{B}, \tag{0.2}$$

голоморфная в некоторой окрестности $z = 0$ в $\mathbb{C}^N$, называется *передаточной функцией* системы α. Система $\alpha = (N; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ называется *диссипативной (соотв., консервативной) системой рассеяния*, если для каждого $\zeta \in \mathbb{T}^N$

$$\zeta\mathbf{G} := \begin{bmatrix} \zeta\mathbf{A} & \zeta\mathbf{B} \\ \zeta\mathbf{C} & \zeta\mathbf{D} \end{bmatrix} \in [\mathcal{X} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$$

есть сжимающий (соотв., унитарный) оператор. В [6] Дж. Аглер ввел класс $S_N(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ голоморфных в открытом единичном поликруге $\mathbb{D}^N$ функций $\theta(z)$, принимающих значения из $[\mathcal{U}, \mathcal{Y}]$ и таких, что для любого сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$, любого набора $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_N)$ коммутирующих сжатий в $\mathcal{H}$ и любого положительного $r < 1$

$$\|\theta(r\mathbf{T})\|_{[\mathcal{U} \otimes \mathcal{H}, \mathcal{Y} \otimes \mathcal{H}]} \leq 1,$$

где $\theta(r\mathbf{T})$ определяется посредством т. н. наследственного функционального исчисления (детали см. в [6]). Для $N = 1$ (соотв., $N = 2$) этот класс совпадает с классом Шура $S(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ (соотв., классом $S_2(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$), состоящим из голоморфных в $\mathbb{D}$ (соотв. в $\mathbb{D}^2$) сжимающих $[\mathcal{U}, \mathcal{Y}]$-значных функций, и в данной статье будут важны именно эти два его частных случая. Обозначим через $S_N^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ подкласс класса $S_N(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, состоящий из оператор-функций, исчезающих в точке $z = 0$. В [15] показано, что класс передаточных функций N-параметрических консервативных линейных стационарных динамических систем рассеяния, с пространством входных данных $\mathcal{U}$ и пространством выходных данных $\mathcal{Y}$, совпадает с $S_N^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Однако существование консервативных реализаций для функций $\theta \in S_N^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, т.е. таких консервативных систем рассеяния α вида (0.1), что $\theta = \theta_\alpha$ (см. (0.2)), доказано неконструктивно. Таким образом, возникает потребность в явных, конструктивных примерах таких реализаций. В настоящей статье вводится понятие каскадного соединения $\alpha = \alpha^{(2)}\alpha^{(1)}$ систем $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ вида (0.1). Его основное свойство состоит в том, что передаточная функция факторизуется: $\theta_\alpha(z) = \theta_{\alpha^{(2)}}(z)\theta_{\alpha^{(1)}}(z)$. Это позволяет нам построить явный пример консервативной реализации *разложимой внутренней оператор-функции в бикруге* $\mathbb{D}^2$, т.е. оператор-функции $\theta \in S_2^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ вида $\theta(z_1, z_2) = \theta_2(z_2)\theta_1(z_1)$, где $\theta_1 \in S^0(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $\theta_2 \in S^0(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ — внутренние оператор-функции в круге $\mathbb{D}$; для последних же т.н. простые (однопараметрические) консервативные реализации известны (см. [2]).

Статья имеет следующую структуру. В п. 1 мы приводим некоторые сведения об однопараметрических линейных стационарных динамических системах (с запаздыванием и без запаздывания) и напоминаем определение каскадного соединения однопараметрических систем стандартного вида (без запаздывания). В п. 2 мы даем определение каскадного соединения N-параметрических систем вида (0.1) и доказываем сформулированное выше его основное свойство. Для случая $N = 1$ мы устанавливаем связь введенного понятия каскадного соединения систем с единичным запаздыванием с соответствующим понятием каскадного соединения систем без запаздывания. В п. 3 мы строим консервативную реализацию разложимой внутренней оператор-функции в бикруге, затем приводим определения дилатации, управляемости, наблюдаемости и минимальности для систем вида (0.1) (эти понятия исследуются нами в [16, 17]) и показываем, что построенная реализация оказывается наблюдаемой, а для случая двусторонне внутренних оператор-функций θ_1 и θ_2 — также управляемой и минимальной.

1. Предварительные сведения. В случае $N = 1$ система (0.1) имеет вид

$$\alpha : \begin{cases} x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1), \\ y(t) &= Cx(t-1) + Du(t-1), \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}) \tag{1.1}$$

а ее передаточная функция:

$$\theta_\alpha(z) = zD + zC(I_\mathcal{X} - zA)^{-1}zB. \tag{1.2}$$

Система $\alpha = (1; A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ вида (1.1) является системой с единичным запаздыванием: выходные данные в каждый момент времени определяются состояниями и входными данными в предыдущий момент времени. Если для всех $t \in \mathbb{Z}_+$ положить $\xi(t) := u(t)$, $\eta(t) := y(t+1)$, то система (1.1) принимает стандартный вид

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + B\xi(t), \\ \eta(t) &= Cx(t) + D\xi(t), \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Z}_+) \tag{1.3}$$

т.е. уже является системой без запаздывания, а ее передаточная функция:

$$W_\Sigma(z) = D + zC(I_\mathcal{X} - zA)^{-1}B. \tag{1.4}$$

Диссипативность (соотв., консервативность) системы (1.3), как и системы (1.1), означает, что матрица системы

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in [\mathcal{X} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}] \tag{1.5}$$

определяет сжимающий (соотв., унитарный оператор). Заметим, что агрегат $(1; A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ для систем (1.1) и (1.3) является общим и в случае, когда оператор G из (1.5) — унитарный, называется унитарным узлом, а оператор-функция (1.4) — характеристической функцией этого узла. Обзор теории унитарных узлов см. в [3]. Обзор теории диссипативных (или, в другой терминологии, пассивных) систем рассеяния вида (1.3) см. в [1], а также в [8]. Заметим, что переход от систем (1.3) к системам (1.1) не приводит к существенным изменениям теории. Так, например, передаточные функции (1.2) и (1.4) связаны соотношением $\theta_\alpha(z) = zW_\Sigma(z)$. Известно [5, 3], что класс передаточных функций консервативных систем рассеяния вида (1.3), с пространствами входных данных $\mathcal{U}$ и выходных данных $\mathcal{Y}$ (характеристических функций соответствующих унитарных узлов), совпадает с $S(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Очевидно, $S^0(\mathcal{U},\mathcal{Y}) = zS(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Таким образом, класс передаточных функций консервативных систем рассеяния вида (1.1) совпадает с $S^0(\mathcal{U},\mathcal{Y})$, что является частным случаем (для $N=1$) результата, упоминавшегося во введении.

Пусть $\Sigma^{(1)} = (1; A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}; \mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ и $\Sigma^{(2)} = (1; A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}, D^{(2)}; \mathcal{X}^{(2)}, \mathcal{V}, \mathcal{Y})$ — системы вида (1.3). *Каскадное соединение* $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$ (см., например, [8]) есть система $\Sigma = \Sigma^{(2)}\Sigma^{(1)}$ вида (1.3), которая образуется, если выходные данные $\eta^{(1)}(t)$ системы$\Sigma^{(1)}$ рассматривать как входные данные $\xi^{(2)}(t)$ системы $\Sigma^{(2)}$ в каждый момент времени t. Подробнее, запишем уравнения систем:

$$\begin{aligned} x^{(2)}(t+1) &= A^{(2)}x^{(2)}(t) + B^{(2)}\xi^{(2)}(t), \quad & x^{(1)}(t+1) &= A^{(1)}x^{(1)}(t) + B^{(1)}\xi^{(1)}(t),\\ \eta^{(2)}(t) &= C^{(2)}x^{(2)}(t) + D^{(2)}\xi^{(2)}(t), & \eta^{(1)}(t) &= C^{(1)}x^{(1)}(t) + D^{(1)}\xi^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Приравнивая $\xi^{(2)}(t) = \eta^{(1)}(t)$ и упрощая, получаем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^{(2)}(t+1) \\ x^{(1)}(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^{(2)} & B^{(2)}C^{(1)} \\ 0 & A^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(2)}(t) \\ x^{(1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{(2)}D^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix} \xi^{(1)}(t),\\ \eta^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} C^{(2)} & D^{(2)}C^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(2)}(t) \\ x^{(1)}(t) \end{bmatrix} + D^{(2)}D^{(1)}\xi^{(1)}(t). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Таким образом, каскадное соединение $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$ — это система $\Sigma = \Sigma^{(2)}\Sigma^{(1)} = (1; A, B, C, D; \mathcal{X} = \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$, где операторы A, B, C, D определяются из (1.6). При этом матрица этой системы G_Σ (см. (1.5)) допускает факторизацию:

$$G_\Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} A^{(2)} & B^{(2)}C^{(1)} & B^{(2)}D^{(1)} \\ 0 & A^{(1)} & B^{(1)} \\ \hline C^{(2)} & D^{(2)}C^{(1)} & D^{(2)}D^{(1)} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} A^{(2)} & 0 & B^{(2)} \\ 0 & I_{\mathcal{X}^{(1)}} & 0 \\ C^{(2)} & 0 & D^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & A^{(1)} & B^{(1)} \\ 0 & C^{(1)} & D^{(1)} \end{bmatrix} \in [\mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{Y}]. \tag{1.7}$$

В частности, из этой факторизации следует, что каскадное соединение диссипативных (соотв., консервативных) систем рассеяния вида (1.3) является также диссипативной (соотв., консервативной) системой рассеяния вида (1.3). Основное свойство каскадного соединения — это факторизация

$$W_{\Sigma^{(2)}\Sigma^{(1)}}(z) = W_{\Sigma^{(2)}}(z)W_{\Sigma^{(1)}}(z). \tag{1.8}$$

Отметим, что в случае консервативных систем рассеяния понятию каскадного соединения в терминологии статьи [3] отвечает понятие произведения унитарных узлов. Оно использовалось для изучения факторизаций (1.8), с дополнительными свойствами (регулярности, $(\pm)$ регулярности), оператор-функций класса Шура в [3, 18].

2. Каскадные соединения многопараметрических линейных стационарных динамических систем. Пусть $\alpha^{(1)} = (N; \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{D}^{(1)}; \mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ и $\alpha^{(2)} = (N; \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{B}^{(2)}, \mathbf{C}^{(2)}, \mathbf{D}^{(2)}; \mathcal{X}^{(2)}, \mathcal{V}, \mathcal{Y})$ — системы вида (0.1). Так как они являются системами с запаздыванием, выходные данные $y^{(1)}(t)$ системы $\alpha^{(1)}$ можно рассматривать как входные данные $u^{(2)}(t)$ системы $\alpha^{(2)}$ только для следующих по каждой "временной" оси значений $t+e_k$. Поэтому при определении каскадного соединения таких систем возникает необходимость включить в пространство состояний новой системы еще одну компоненту — промежуточное пространство $\mathcal{V}$, где каждый выходной сигнал $y^{(1)}(t)$ будет "дожидаться" следующих моментов $t+e_k$, когда он подается на вход системы $\alpha^{(2)}$. Более подробно, запишем уравнения систем:

$$\alpha^{(j)}:\begin{cases} x^{(j)}(t)=\sum_{k=1}^{N}(A_k^{(j)}x^{(j)}(t-e_k)+B_k^{(j)}u^{(j)}(t-e_k)),\\ y^{(j)}(t)=\sum_{k=1}^{N}(C_k^{(j)}x^{(j)}(t-e_k)+D_k^{(j)}u^{(j)}(t-e_k)).\end{cases}\qquad (j=1,2)$$

Полагая $v(t)=y^{(1)}(t)$, а затем $u^{(2)}(t)=v(t)$, получаем

$$\begin{bmatrix} x^{(2)}(t)\\ v(t)\\ x^{(1)}(t)\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{N}\left(\begin{bmatrix} A_k^{(2)} & B_k^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & C_k^{(1)}\\ 0 & 0 & A_k^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{(2)}(t-e_k)\\ v(t-e_k)\\ x^{(1)}(t-e_k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ D_k^{(1)}\\ B_k^{(1)}\end{bmatrix}u^{(1)}(t-e_k)\right),$$

$$y^{(2)}(t)=\sum_{k=1}^{N}\begin{bmatrix} C_k^{(2)} & D_k^{(2)} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{(2)}(t-e_k)\\ v(t-e_k)\\ x^{(1)}(t-e_k)\end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Определение 2.1. *Каскадное соединение* систем $\alpha^{(1)}=(N;\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{B}^{(1)},\mathbf{C}^{(1)},\mathbf{D}^{(1)};\mathcal{X}^{(1)},\mathcal{U},\mathcal{V})$ и $\alpha^{(2)}=(N;\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{B}^{(2)},\mathbf{C}^{(2)},\mathbf{D}^{(2)};\mathcal{X}^{(2)},\mathcal{V},\mathcal{Y})$ — это система $\alpha=\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}=(N;\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D};\mathcal{X}=\mathcal{X}^{(2)}\oplus\mathcal{V}\oplus\mathcal{X}^{(1)},\mathcal{U},\mathcal{Y})$, где наборы операторов $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ определяются из (2.1) (набор $\mathbf{D}$ состоит из нулевых операторов).

Отметим, что при этом линейный пучок

$$z\mathbf{G}_\alpha:=\begin{bmatrix} z\mathbf{A} & z\mathbf{B}\\ z\mathbf{C} & z\mathbf{D}\end{bmatrix}\in[\mathcal{X}\oplus\mathcal{U},\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y}]$$

допускает следующую факторизацию

$$\begin{aligned} z\mathbf{G}_\alpha &= \left[\begin{array}{ccc|c} z\mathbf{A}^{(2)} & z\mathbf{B}^{(2)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & z\mathbf{C}^{(1)} & z\mathbf{D}^{(1)}\\ 0 & 0 & z\mathbf{A}^{(1)} & z\mathbf{B}^{(1)}\\ \hline z\mathbf{C}^{(2)} & z\mathbf{D}^{(2)} & 0 & 0\end{array}\right] = \begin{bmatrix} z\mathbf{A}^{(2)} & 0 & 0 & z\mathbf{B}^{(2)}\\ 0 & I_{\mathcal{V}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{\mathcal{X}^{(1)}} & 0\\ z\mathbf{C}^{(2)} & 0 & 0 & z\mathbf{D}^{(2)}\end{bmatrix}\times\\ &\times\begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}^{(2)}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_{\mathcal{V}}\\ 0 & 0 & I_{\mathcal{X}^{(1)}} & 0\\ 0 & I_{\mathcal{V}} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}^{(2)}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_{\mathcal{V}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & z\mathbf{A}^{(1)} & z\mathbf{B}^{(1)}\\ 0 & 0 & z\mathbf{C}^{(1)} & z\mathbf{D}^{(1)}\end{bmatrix}\in\\ &\in [\mathcal{X}^{(2)}\oplus\mathcal{V}\oplus\mathcal{X}^{(1)}\oplus\mathcal{U},\mathcal{X}^{(2)}\oplus\mathcal{V}\oplus\mathcal{X}^{(1)}\oplus\mathcal{Y}] \end{aligned} \qquad (2.2)$$

(ср. (1.7)). Промежуточный множитель есть матрица перестановки, которая отвечает как раз за то, чтобы в каждый момент t выходной сигнал $y^{(1)}(t)$ системы $\alpha^{(1)}$ отправлялся в соответствующую компоненту $\mathcal{V}$ пространства состояний каскадного соединения $\alpha=\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}$, а компонента состояния $v(t)\in\mathcal{V}$ системы α подавалась на вход системы $\alpha^{(2)}$.

Теорема 2.2. *Каскадное соединение диссипативных (соотв., консервативных) систем рассеяния вида (0.1) есть диссипативная (соотв., консервативная) система рассеяния вида (0.1).*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из определения диссипативной (соотв., консервативной) системы рассеяния вида (0.1) и факторизации (2.2). □

Теорема 2.3. *Пусть $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}$ — системы из определения 2.1. Тогда в некоторой окрестности $z = 0$ в $\mathbb{C}^N$ передаточные функции $\theta_{\alpha^{(1)}}(z)$, $\theta_{\alpha^{(2)}}(z)$ и $\theta_{\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}}(z)$ являются голоморфными и*

$$\theta_{\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}}(z) = \theta_{\alpha^{(2)}}(z)\theta_{\alpha^{(1)}}(z) \tag{2.3}$$

(ср. (1.8)).

Доказательство. Утверждение теоремы можно вывести из интерпретации передаточной функции системы как соответствия отображения вход-выход в т.н. Z-образах (см. [15]), т.е. без рассмотрения пространств состояний систем $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}$. Однако мы докажем его непосредственно, пользуясь выражениями передаточных функций через коэффициенты систем (см. (0.2)), попутно получив формулу для резольвенты $R_{\mathbf{A}}(z) = (I_{\mathcal{X}} - z\mathbf{A})^{-1}$ набора $\mathbf{A}$ основных операторов каскадного соединения. Очевидно, в некоторой окрестности Γ точки $z = 0$ в $\mathbb{C}^N$ определены и голоморфны резольвенты $R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z) = (I_{\mathcal{X}^{(1)}} - z\mathbf{A}^{(1)})^{-1}$ и $R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z) = (I_{\mathcal{X}^{(2)}} - z\mathbf{A}^{(2)})^{-1}$ наборов $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ основных операторов систем $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$. Тогда в Γ определена и голоморфна резольвента $R_{\mathbf{A}}(z)$ и справедливо равенство:

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{A}}(z) &= (I_{\mathcal{X}} - z\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{X}^{(2)}} - z\mathbf{A}^{(2)} & -z\mathbf{B}^{(2)} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{Y}} & -z\mathbf{C}^{(1)} \\ 0 & 0 & I_{\mathcal{X}^{(1)}} - z\mathbf{A}^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z) & R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z)z\mathbf{B}^{(2)} & R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z)z\mathbf{B}^{(2)}z\mathbf{C}^{(1)}R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z) \\ 0 & I_{\mathcal{Y}} & z\mathbf{C}^{(1)}R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z) \\ 0 & 0 & R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно в Γ определены и голоморфны $\theta_{\alpha^{(1)}}(z)$, $\theta_{\alpha^{(2)}}(z)$ и $\theta_{\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}}(z)$, и

$$\theta_{\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}}(z) = z\mathbf{D} + z\mathbf{C}R_{\mathbf{A}}(z)z\mathbf{B} =$$

$$= \begin{bmatrix} z\mathbf{C}^{(2)} & z\mathbf{D}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z) & R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z)z\mathbf{B}^{(2)} & R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z)z\mathbf{B}^{(2)}z\mathbf{C}^{(1)}R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z) \\ 0 & I_{\mathcal{Y}} & z\mathbf{C}^{(1)}R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z) \\ 0 & 0 & R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z\mathbf{D}^{(1)} \\ z\mathbf{B}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} z\mathbf{C}^{(2)} & z\mathbf{D}^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z)z\mathbf{B}^{(2)}\theta_{\alpha^{(1)}}(z) \\ \theta_{\alpha^{(1)}}(z) \\ R_{\mathbf{A}^{(1)}}(z)z\mathbf{B}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= z\mathbf{C}^{(2)}R_{\mathbf{A}^{(2)}}(z)z\mathbf{B}^{(2)}\theta_{\alpha^{(1)}}(z) + z\mathbf{D}^{(2)}\theta_{\alpha^{(1)}}(z) = \theta_{\alpha^{(2)}}(z)\theta_{\alpha^{(1)}}(z),$$

что и требовалось доказать. □

Для случая $N = 1$ мы имеем теперь два понятия каскадного соединения: для систем с запаздыванием, вида (1.1), и систем без запаздывания, вида (1.3). Пусть

$\alpha = (1; A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ — система вида (1.1). Определим систему $\Sigma(\alpha) = (1; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ вида (1.3) следующим образом:

$$G_{\Sigma(\alpha)} = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & C & D \\ 0 & A & B \\ \hline I_{\mathcal{Y}} & 0 & 0 \end{array}\right] \in [\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]. \tag{2.4}$$

Теорема 2.4. *Отображение $\Sigma(\cdot)$ обладает свойствами:*

(i) $\Sigma(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}) = \Sigma(\alpha^{(2)})\Sigma(\alpha^{(1)})$;

(ii) $W_{\Sigma(\alpha)}(z) = \theta_\alpha(z)$.

Доказательство. Пусть $\alpha^{(1)} = (1; A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}; \mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$, $\alpha^{(2)} = (1; A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}, D^{(2)}; \mathcal{X}^{(2)}, \mathcal{V}, \mathcal{Y})$ — системы вида (1.1). Тогда, согласно (2.2),

$$G_{\alpha^{(2)}\alpha^{(1)}} = \left[\begin{array}{ccc|c} A^{(2)} & B^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{(1)} & D^{(1)} \\ 0 & 0 & A^{(1)} & B^{(1)} \\ \hline C^{(2)} & D^{(2)} & 0 & 0 \end{array}\right] \in [\mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{Y}].$$

Согласно (2.4),

$$\begin{aligned} G_{\Sigma(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & C^{(2)} & D^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & A^{(2)} & B^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{(1)} & D^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & A^{(1)} & B^{(1)} \\ \hline I_{\mathcal{Y}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \in \\ &\in [\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{Y}]. \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно (2.4),

$$\begin{aligned} G_{\Sigma(\alpha^{(1)})} &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & C^{(1)} & D^{(1)} \\ 0 & A^{(1)} & B^{(1)} \\ \hline I_{\mathcal{V}} & 0 & 0 \end{array}\right] \in [\mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{V}], \\ G_{\Sigma(\alpha^{(2)})} &= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & C^{(2)} & D^{(2)} \\ 0 & A^{(2)} & B^{(2)} \\ \hline I_{\mathcal{Y}} & 0 & 0 \end{array}\right] \in [\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V}, \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{Y}]. \end{aligned}$$

Поэтому, согласно (1.7),

$$\begin{aligned} G_{\Sigma(\alpha^{(2)})\Sigma(\alpha^{(1)})} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & C^{(2)} & D^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & A^{(2)} & B^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{(1)} & D^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & A^{(1)} & B^{(1)} \\ \hline I_{\mathcal{Y}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ &\in [\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)} \oplus \mathcal{Y}], \end{aligned}$$

что совпадает с $G_{\Sigma(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})}$, и (i) доказано. Для доказательства (ii) заметим, что систему $\Sigma(\alpha)$ можно преставить в виде $\Sigma(\alpha) = \Sigma^{(2)}\Sigma^{(1)}$, где $\Sigma^{(1)} = (1; A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ и

$\Sigma^{(2)} = (1; 0, I_{\mathcal{Y}}, I_{\mathcal{Y}}, 0; \mathcal{Y}, \mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ — системы вида (1.3). Так как $W_{\Sigma^{(2)}}(z) = zI_{\mathcal{Y}}$, $W_{\Sigma^{(1)}}(z) = D + zC(I_{\mathcal{X}} - zA)^{-1}B$, согласно (1.8) и (1.2), имеем

$$W_{\Sigma(\alpha)}(z) = W_{\Sigma^{(2)}}(z)W_{\Sigma^{(1)}}(z) = zD + zC(I_{\mathcal{X}} - zA)^{-1}zB = \theta_\alpha(z),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 2.5. Доказательство свойства (ii) можно было провести, непосредственно выписав $W_{\Sigma(\alpha)}(z)$, однако приведенное доказательство объясняет структуру системы $\Sigma(\alpha)$ и мотивацию ее определения.

Напомним определения управляемости и наблюдаемости (см., например, [1]), общие для систем вида (1.3) и (1.1). Пусть $\alpha = (1; A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Определим подпространства в $\mathcal{X}$: $\mathcal{X}_\alpha^c = \bigvee_{n=0}^\infty A^n B\mathcal{U}$, $\mathcal{X}_\alpha^o = \bigvee_{n=0}^\infty (A^*)^n C^*\mathcal{Y}$ (здесь "$\bigvee_n \mathcal{L}_n$"обозначает замыкание линейной оболочки множеств $\mathcal{L}_n$). Система α называется *управляемой* (соотв., *наблюдаемой*), если $\mathcal{X}_\alpha^c = \mathcal{X}$ (соотв., $\mathcal{X}_\alpha^o = \mathcal{X}$). Система α — управляемая тогда и только тогда, когда *сопряженная система* $\alpha^* := (1; A^*, C^*, B^*, D^*; \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U})$ — наблюдаемая.

Теорема 2.6. *Отображение $\Sigma(\cdot)$ обладает свойствами:*

(i) α — диссипативная (соотв., консервативная) система рассеяния вида (1.1) *тогда и только тогда, когда $\Sigma(\alpha)$ — диссипативная (соотв., консервативная) система рассеяния вида*(1.3)*;*

(ii) если $\overline{G_\alpha(\mathcal{X} \oplus \mathcal{U})} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, то система α вида (1.1) *— управляемая тогда и только тогда, когда система $\Sigma(\alpha)$ вида* (1.3) *— управляемая;*

(iii) система α вида (1.1) *— наблюдаемая тогда и только тогда, когда система $\Sigma(\alpha)$ вида* (1.3) *— наблюдаемая.*

Доказательство. (i) непосредственно следует из (2.4), так как оператор $G_{\Sigma(\alpha)}$ — сжимающий (соотв., унитарный) тогда и только тогда, когда оператор G_α — сжимающий (соотв., унитарный). Чтобы доказать (ii), заметим, что

$$\mathcal{X}_{\Sigma(\alpha)}^c = \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \mathcal{U} \bigvee \left(\bigvee_{n=0}^\infty \begin{bmatrix} CA^nB \\ A^{n+1}B \end{bmatrix} \mathcal{U} \right) = \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \mathcal{U} \bigvee \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} \mathcal{X}_\alpha^c.$$

Если $\mathcal{X}_{\Sigma(\alpha)}^c = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$, то $\mathcal{X} = \overline{P_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_{\Sigma(\alpha)}^c} = B\mathcal{U} \bigvee A\mathcal{X}_\alpha^c = \mathcal{X}_\alpha^c$ (здесь $P_{\mathcal{X}}$ обозначает ортопроектор на подпространство $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$). Обратно, если $\mathcal{X}_\alpha^c = \mathcal{X}$ и $\overline{G_\alpha(\mathcal{X} \oplus \mathcal{U})} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, то

$$\mathcal{X}_{\Sigma(\alpha)}^c = \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \mathcal{U} \bigvee \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} \mathcal{X} = \overline{\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} (\mathcal{U} \oplus \mathcal{X})} = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}.$$

Таким образом, (ii) доказано. Так как

$$\mathcal{X}_{\Sigma(\alpha)}^o = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{Y}} \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{Y} \bigvee \left(\bigvee_{n=0}^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ (A^*)^n C^* \end{bmatrix} \mathcal{Y} \right) = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}_\alpha^o,$$

то $\mathcal{X}_{\Sigma(\alpha)}^o = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_\alpha^o = \mathcal{X}$, и (iii) также доказано. □

3. Консервативная реализация разложимой внутренней оператор-функции в бикруге. Напомним, что оператор-функция $\theta\colon \mathbb{D}^N \to [\mathcal{U},\mathcal{Y}]$ называется внутренней (соотв., двусторонне внутренней), если она голоморфна в $\mathbb{D}^N$ и ее граничные значения $\theta(\xi)$ для почти всех $\xi \in \mathbb{T}^N$ являются изометрическими (соотв., унитарными) операторами. Пусть $\theta_1\colon \mathbb{D} \to [\mathcal{U},\mathcal{V}]$, $\theta_2\colon \mathbb{D} \to [\mathcal{V},\mathcal{Y}]$ — внутренние оператор-функции, причем $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$. Тогда $\theta(z_1,z_2) = \theta_2(z_2)\theta_1(z_1)\colon \mathbb{D}^2 \to [\mathcal{U},\mathcal{Y}]$ — внутренняя оператор-функция, причем $\theta(0,0) = 0$. Определим систему $\alpha_1 = (1;A^{(1)},B^{(1)},C^{(1)},D^{(1)};\mathcal{X}^{(1)},\mathcal{U},\mathcal{V})$ вида (1.1) следующим образом: положим $\mathcal{X}^{(1)} := H^2_0(\mathcal{V}) \ominus \theta_1 H^2(\mathcal{U})$, где для сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ пространство Харди $H^2(\mathcal{H})$ состоит из $\mathcal{H}$-значных функций $h(z)$, голоморфных в $\mathbb{D}$ и таких, что $\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\|h(re^{is})\|^2\,ds < \infty$, а $H^2_0(\mathcal{H})$ — его подпространство, состоящее из функций $h(z)$ таких, что $h(0) = 0$;

$$\begin{array}{rcl} (A^{(1)}x^{(1)})(z_1) &=& z_1^{-1}(x^{(1)}(z_1) - z_1\widehat{x}^{(1)}_1), \quad (x^{(1)} \in \mathcal{X}^{(1)},\ z_1 \in \mathbb{D}) \\ (B^{(1)}u)(z_1) &=& z_1^{-1}(\theta_1(z_1) - z_1(\widehat{\theta}_1)_1)u, \quad (u \in \mathcal{U},\ z_1 \in \mathbb{D}) \\ C^{(1)}x^{(1)} &=& \widehat{x}^{(1)}_1, \quad (x^{(1)} \in \mathcal{X}^{(1)}), \qquad D^{(1)}u \ = \ (\widehat{\theta}_1)_1 u \quad (u \in \mathcal{U}) \end{array} \tag{3.1}$$

где $\widehat{x}^{(1)}_1$ и $(\widehat{\theta}_1)_1$ — 1-ый коэффициент Маклорена вектор-функции $x^{(1)}(z_1)$ (оператор-функции $\theta_1(z_1)$). Аналогично определим систему $\alpha_2 = (1;A^{(2)},B^{(2)},C^{(2)},D^{(2)};\mathcal{X}^{(2)},\mathcal{V},\mathcal{Y})$ вида (1.1), полагая

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{X}^{(2)} &:=& H^2_0(\mathcal{Y}) \ominus \theta_2 H^2(\mathcal{V}); \\ (A^{(2)}x^{(2)})(z_2) &=& z_2^{-1}(x^{(2)}(z_2) - z_2\widehat{x}^{(2)}_1), \quad (x^{(2)} \in \mathcal{X}^{(2)},\ z_2 \in \mathbb{D}) \\ (B^{(2)}u)(z_2) &=& z_2^{-1}(\theta_2(z_2) - z_2(\widehat{\theta}_2)_1)u, \quad (u \in \mathcal{U},\ z_2 \in \mathbb{D}) \\ C^{(2)}x^{(2)} &=& \widehat{x}^{(2)}_1, \quad (x^{(2)} \in \mathcal{X}^{(2)}) \quad D^{(2)}u \ = \ (\widehat{\theta}_2)_1 u \quad (u \in \mathcal{U}) \end{array} \tag{3.2}$$

Тогда для $k = 1,2$ α_k — простая (т.е. такая, что $\mathcal{X}^c_{\alpha_k} \bigvee \mathcal{X}^o_{\alpha_k} = \mathcal{X}^{(k)}$) консервативная реализация оператор-функции θ_k. Это утверждение легко следует из соответствующего результата [2] о простых консервативных реализациях вида (1.3) внутренних оператор-функций, примененного к функциям $z_k^{-1}\theta_k(z_k)$, после очевидного перехода к системам вида (1.1), описанного в п. 1. Более того, α_k–наблюдаемая система. Действительно, если $x^{(k)} \in \bigcap_{n=0}^{\infty}\operatorname{Ker}(C^{(k)}(A^{(k)})^n)$, то $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ $C^{(k)}(A^{(k)})^n x^{(k)} = \widehat{x}^{(k)}_{n+1} = 0$ и, так как $\widehat{x}^{(k)}_0 = 0$, то $x^{(k)} = 0$; таким образом, $\bigcap_{n=0}^{\infty}\operatorname{Ker}(C^{(k)}(A^{(k)})^n) = \{0\}$, значит, $\mathcal{X}^o_{\alpha_k} = \mathcal{X}^{(k)}$. Если $\theta_k(z_k)$ есть двусторонне внутренняя оператор-функция, то α_k будет также управляемой системой (это нетрудно показать, построив аналогичную наблюдаемую консервативную реализацию оператор-функции $\theta^*_k(z_k) := \theta_k(\overline{z_k})^*$ и воспользовавшись единственностью, с точностью до унитарного подобия, простых консервативных реализаций оператор функций класса Шура [3]). Определим теперь системы $\alpha^{(1)} = (2;\mathbf{A}^{(1)},\mathbf{B}^{(1)},\mathbf{C}^{(1)},\mathbf{D}^{(1)};\mathcal{X}^{(1)},\mathcal{U},\mathcal{V})$ и $\alpha^{(2)} = (2;\mathbf{A}^{(2)},\mathbf{B}^{(2)},\mathbf{C}^{(2)},\mathbf{D}^{(2)};\mathcal{X}^{(2)},\mathcal{V},\mathcal{Y})$, полагая для $j \in \{1,2\}, k \in \{1,2\}$

$$A^{(k)}_j = \delta_{jk}A^{(k)},\ B^{(k)}_j = \delta_{jk}B^{(k)},\ C^{(k)}_j = \delta_{jk}C^{(k)},\ D^{(k)}_j = \delta_{jk}D^{(k)}, \tag{3.3}$$

где $\delta_{jk} = \left\{\begin{array}{l} 1,\ k = j, \\ 0,\ k \neq j. \end{array}\right.$ Определим систему $\alpha^\theta = \alpha^{(2)}\alpha^{(1)} = (2;\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D};\mathcal{X} = \mathcal{X}^{(2)} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{X}^{(1)},\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Согласно (3.1), (3.2), (3.3), (2.1), ее коэффициенты определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\left(A_1\begin{bmatrix} x^{(2)} \\ v \\ x^{(1)} \end{bmatrix}\right)(z) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{x}_1^{(1)} \\ z_1^{-1}(x^{(1)}(z_1) - z_1\widehat{x}_1^{(1)}) \end{bmatrix}, \\
\left(A_2\begin{bmatrix} x^{(2)} \\ v \\ x^{(1)} \end{bmatrix}\right)(z) &= \begin{bmatrix} z_1^{-1}(x^{(2)}(z_2) - z_2\widehat{x}_1^{(2)}) + z_2^{-1}(\theta_2(z_2) - z_2(\widehat{\theta}_2)_1)v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
(B_1u)(z) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\widehat{\theta}_1)_1u \\ z_1^{-1}(\theta_1(z_1) - z_1(\widehat{\theta}_1)_1)u \end{bmatrix}, \quad (B_2u)(z) = 0, \\
C_1\begin{bmatrix} x^{(2)} \\ v \\ x^{(1)} \end{bmatrix} &= 0, \quad C_2\begin{bmatrix} x^{(2)} \\ v \\ x^{(1)} \end{bmatrix} = \widehat{x}_1^{(2)} + (\widehat{\theta}_2)_1v, \quad D_1 = D_2 = 0,
\end{aligned}$$

где $x^{(1)} \in \mathcal{X}^{(1)}$, $x^{(2)} \in \mathcal{X}^{(2)}$, $v \in \mathcal{V}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$. Из теоремы 2.2 вытекает следующий результат.

Теорема 3.1. *Система α^θ есть консервативная реализация оператор-функции $\theta(z_1, z_2) = \theta_2(z_2)\theta_1(z_1) \in S_2^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, где $\theta_1(z_1) \in S^0(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $\theta_2(z_2) \in S^0(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ — внутренние оператор-функции в $\mathbb{D}$.*

Следствие 3.2. *Функция $\theta(z_1, z_2)$ из теоремы 3.1 представляется в виде*

$$\theta(z_1, z_2) = z_2C_2(I_{\mathcal{X}} - z_1A_1 - z_2A_2)^{-1}z_1B_1,\ (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2),$$

где для всякого $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{T}^2$ оператор

$$\begin{bmatrix} \zeta_1A_1 + \zeta_2A_2 & \zeta_1B_1 \\ \zeta_2C_2 & 0 \end{bmatrix} \in [\mathcal{X} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$$

является унитарным. Так как $\theta_1(z_1) = z_1\phi_1(z_1)$, $\theta_2(z_2) = z_2\phi_2(z_2)$, где $\phi_1(z_1) \in S(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $\phi_2(z_2) \in S(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ — внутренние оператор-функции в $\mathbb{D}$, получаем, что $\phi(z_1, z_2) := \phi_2(z_2)\phi_1(z_1)$ (т.е. произвольная разложимая внутренняя оператор-функция из класса $S_2(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$) допускает представление в виде

$$\phi(z_1, z_2) = C_2(I_{\mathcal{X}} - z_1A_1 - z_2A_2)^{-1}B_1, \quad (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2),$$

где для всякого $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{T}^2$ оператор $\begin{bmatrix} \zeta_1A_1 + \zeta_2A_2 & B_1 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \in [\mathcal{X} \oplus \mathcal{U}, \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}]$ является унитарным.

Замечание 3.3. Явный пример консервативной реализации можно получить и для произвольной *разложимой оператор-функции* $\theta(z_1, z_2) = \theta_2(z_2)\theta_1(z_1)$ *класса* $S_2^0(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$, построив каскадное соединение двухпараметрических систем, отправляясь от простых консервативных реализаций оператор-функций $\theta_1(z_1) \in S^0(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ и $\theta_2(z_2) \in S^0(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$. Следствие 3.2 полностью переносится на этот случай. Можно также показать, что для оператор-функций $\theta_k(z_k) \in S^0(\mathcal{U}_k, \mathcal{U}_{k+1})(k = 1, \dots, N)$ оператор-функция $\theta(z_1, \dots, z_N)$

$= \theta_N(z_N)\cdots\theta_1(z_1) \in S_N^0(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_{N+1})$ и построить ее консервативную реализацию, составляя последовательные каскадные соединения N-параметрических систем, отправляясь от простых консервативных реализаций оператор-функций $\theta_k(z_k)$.

Пусть $\alpha = (1; A, B, C, D; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ и $\widetilde{\alpha} = (1; \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, D; \widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ — две системы одного и того же вида(1.3) или (1.1). Система $\widetilde{\alpha}$ называется *дилатацией* системы α, если $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{X} \oplus \mathcal{D}_*$, $A = P_{\mathcal{X}}\widetilde{A}|\mathcal{X}$, $B = P_{\mathcal{X}}\widetilde{B}$, $C = \widetilde{C}|\mathcal{X}$, $\widetilde{A}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $\widetilde{C}\mathcal{D} = \{0\}$, $\widetilde{A}^*\mathcal{D}_* \subset \mathcal{D}_*$, $\widetilde{B}^*\mathcal{D}_* = \{0\}$.

Пусть $\alpha = (N; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ и $\widetilde{\alpha} = (N; \widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{B}}, \widetilde{\mathbf{C}}, \mathbf{D}; \widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ — две системы вида (0.1). Система $\widetilde{\alpha}$ называется *дилатацией* системы α, если для каждого $\zeta \in \mathbb{T}^N$ однопараметрическая система $\widetilde{\alpha}_\zeta := (1; \zeta\widetilde{\mathbf{A}}, \zeta\widetilde{\mathbf{B}}, \zeta\widetilde{\mathbf{C}}, \zeta\mathbf{D}; \widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ является дилатацией однопараметрической системы $\alpha_\zeta := (1; \zeta\mathbf{A}, \zeta\mathbf{B}, \zeta\mathbf{C}, \zeta\mathbf{D}; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$. Система $\alpha = (N; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ называется *минимальной*, если она не является дилатацией никакой другой, отличной от нее, системы. Система $\alpha = (N; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Y})$ называется *управляемой* (соотв., *наблюдаемой*), если $\mathcal{X} = \bigvee_{\zeta\in\mathbb{T}^N} \mathcal{X}^c_{\alpha_\zeta}$ (соотв., $\mathcal{X} = \bigvee_{\zeta\in\mathbb{T}^N} \mathcal{X}^o_{\alpha_\zeta}$). Известно (например, см. [1]), что для $N = 1$ минимальность системы эквивалентна ее управляемости и наблюдаемости.

Теорема 3.4. *В условиях теоремы 3.1, система α^θ является наблюдаемой, а если $\theta_1(z_1)$, $\theta_2(z_2)$ (а значит, и $\theta(z_1, z_2)$) — двусторонне внутренние оператор-функции, то α^θ является также и управляемой, и минимальной.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{T}^2$. Тогда $\theta_{1,\zeta_1}(\lambda) := \theta_1(\lambda\zeta_1)$, $\theta_{2,\zeta_2}(\lambda) := \theta_2(\lambda\zeta_2)$ — внутренние оператор-функции в $\mathbb{D}$, $\alpha^{(1)}_{\zeta_1}$, $\alpha^{(2)}_{\zeta_2}$ — их наблюдаемые консервативные реализации вида (1.1) соответственно, а $\alpha^\theta_\zeta = \alpha^{(2)}_{\zeta_2}\alpha^{(1)}_{\zeta_1}$. Согласно теореме 2.4, $\Sigma(\alpha^\theta_\zeta) = \Sigma(\alpha^{(2)}_{\zeta_2})\Sigma(\alpha^{(1)}_{\zeta_1})$ и $W_{\Sigma(\alpha^\theta_\zeta)}(\lambda) = \theta_{\alpha^{(2)}_{\zeta_2}\alpha^{(1)}_{\zeta_1}}(\lambda)$. По теореме 2.6 и теореме 2.4, $\Sigma(\alpha^{(1)}_{\zeta_1})$ и $\Sigma(\alpha^{(2)}_{\zeta_2})$ — наблюдаемые консервативные реализации вида (1.3) внутренних оператор-функций $W_{\Sigma(\alpha^{(1)}_{\zeta_1})}(\lambda) = \theta^{(1)}_{\alpha_{\zeta_1}}(\lambda) = \theta_{1,\zeta_1}(\lambda)$ и $W_{\Sigma(\alpha^{(2)}_{\zeta_2})}(\lambda) = \theta^{(2)}_{\alpha_{\zeta_2}}(\lambda) = \theta_{2,\zeta_2}(\lambda)$ соответственно. Тогда [18] их каскадное соединение $\Sigma(\alpha^\theta_\zeta)$ — наблюдаемая консервативная реализация вида (1.3) оператор- функции $W_{\Sigma(\alpha^\theta_\zeta)}(\lambda) = \theta_{\alpha^{(2)}_{\zeta_2}\alpha^{(1)}_{\zeta_1}}(\lambda)$ $(= \theta(\lambda\zeta))$. По теореме 2.6, $\alpha^\theta_\zeta = \alpha^{(2)}_{\zeta_2}\alpha^{(1)}_{\zeta_1}$ — наблюдаемая система. Значит, и α^θ–наблюдаемая система. Аналогично доказывается, что в случае двусторонне внутренней оператор-функции $\theta(z_1, z_2)$ для каждого $\zeta \in \mathbb{T}^2$ система α^θ_ζ — также управляемая, а значит, и минимальная. Отсюда следует управляемость, а также минимальность системы α^θ. □

Замечание 3.5. В случае разложимой двусторонне внутренней оператор-функции $\theta(z_1, z_2)$ построенная консервативная реализация системы α^θ оказывается управляемой, наблюдаемой и минимальной. Вообще говоря, можно показать [17], что при $N > 1$ минимальность системы не эквивалентна ее управляемости и наблюдаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аров Д. З. *Пассивные линейные стационарные динамические системы* // Сиб. мат. ж. – 1979. – Т. 20, №2. – С. 211–228.

2. Бродский В. М., Шварцман Я. С. *Инвариантные подпространства сжатия и факторизации характеристических функций* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1975. – Вып. 22. – С. 15–35.

3. Бродский М. С. *Унитарные узлы и их характеристические функции* // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33, №4. – С. 141–168.

4. Золотарёв В. А. *Схема рассеяния Лакса-Филлипса на группах и функциональная модель алгебры Ли* // Мат. сб. – 1992. – Т. 183, №5. – С. 115–144.

5. Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*: Пер. с фр. – М.: Мир, 1970. – 430 с.

6. Agler J. *On the representation of certain holomorphic functions defined on a polydisc* // Topics in Operator Theory: Ernst D. Hellinger Memorial Volume (L. de Branges, I. Gohberg, and J. Rovnyak, editors). - Oper. Theory and Appl. – V. 48. – Basel: Birkhäuser-Verlag, 1990. – P. 47–66.

7. Agler J., McCarthy J. *Nevanlinna-Pick interpolation on the bidisk* // J. Reine Angew. Math. – 1999. – V. 506. – P. 191–204.

8. Ball J.A., Cohen N. *De Branges-Rovnyak operator models and systems theory: a survey* // Topics in Matrix and Operator Theory (H. Bart, I. Gohberg, and M.A. Kaashoek, editors). – Oper. Theory Adv. Appl. – V. 50. – Basel: Birkhäuser-Verlag, 1991. – P. 93–136.

9. Ball J. A., Li W. S., Timotin D., Trent T. *A commutant lifting theorem on the polydisk* // Preprint.

10. Ball J. A., Trent T. *Unitary colligations, reproducing kernel Hilbert spaces, and Nevanlinna-Pick interpolation in several variables* // J. Funct. Anal. – 1998. – V. 157. – P. 1–61.

11. Ball J. A., Vinnikov V. *Realization and interpolation for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces* // Preprint.

12. Cotlar M., Sadosky C. *Integral representations of bounded Hankel forms defined in scattering systems with a multiparametric evolution group* // Oper. Theory Adv. Appl. - 1988. - V. 35. - P. 357–375.

13. Cotlar M., Sadosky C. *Transference of metrics induced by unitary coupling, a Sarason theorem for the bidimensional torus, and a Sz.-Nagy–Foias theorem for two pairs of dilations* // J. Funct. Anal. – 1993. – V. 111. – P. 473–488.

14. Cotlar M., Sadosky C. *Nehari and Nevanlinna-Pick problems and holomorphic extensions in the polydisk in terms of restricted BMO* // J. Funct. Anal. – 1994. – V. 124. – P. 205–210.

15. Kalyuzhniy D.S. *Multiparametric dissipative linear stationary dynamical scattering systems: Discrete case* // J. Operator Theory. - 2000. - V. 43, №2. - P. 427–460.

16. Kalyuzhniy D. S. *Multiparametric dissipative linear stationary dynamical scattering systems: Discrete case, II: Existence of conservative dilations* // Integral Equations Operator Theory. – 2000. – V. 36, №1. – P. 107–120.

17. Kalyuzhniy D.S. *On the notions of dilation, controllability, observability, and minimality in the theory of dissipative scattering linear nD systems* // Proceedings CD of the Fourteenth International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2000). – June 19–23, 2000. - Perpignan (France). – 6 pp.

18. Khan D.C. *(±)-regular factorization of transfer functions and passive scattering systems for cascade couplings* // J. Oper. Theory. – 1994. – V. 32. – P. 1–16.

19. Livšic M.S., Kravitsky N., Markus A.S., Vinnikov V. *Theory of Commuting Nonselfadjoint Operators* // Mathematics and Its Applications. – V. 332. – Dordrecht: Kluwer, 1995.

20. Livšic M.S., Waksman L. *Commuting Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space* // Lect. Notes in Math. – V. 1272. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 115 p.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса, 65029, ул. Дидрихсона, 4.
d.kv@paco.net

Поступило 22.10.1999