УДК 517.576

Т. М. Сало

ПРО ВИНЯТКОВУ МНОЖИНУ В АСИМПТОТИЧНІЙ РІВНОСТІ СУМИ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ШВИДКОГО ЗРОСТАННЯ

T. M. Salo. *On the exceptional set in an asymptotic equality between the sum and the maximal term of an entire Dirichlet series of rapid growth*, Matematychni Studii, **15** (2001) 57–64.

For an entire Dirichlet series $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\ 0\le\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty)$, we establish necessary and sufficient conditions under which

$$\sup\{|F(\sigma+i\tau)|:\tau\in\mathbb{R}\}=(1+o(1))\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}:n\ge0\}$$

as $\sigma\to+\infty$ outside some set E with $d_h(E)=\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}h(\sigma)\operatorname{meas}(E\cap[\sigma,+\infty))=0$, where $h(\sigma)$ is a nonnegative continuous increasing to $+\infty$ function on $[0,+\infty)$.

Т. М. Сало. *Об исключительном множестве в асимптотическом равенстве суммы и максимального члена целого ряда Дирихле быстрого роста* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №1. – С.57–64.

Для целых рядов Дирихле вида $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n},\ 0\le\lambda_n\uparrow+\infty\ (n\to+\infty)$, устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы

$$\sup\{|F(\sigma+i\tau)|:\tau\in\mathbb{R}\}=(1+o(1))\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}:n\ge0\}$$

при $\sigma\to+\infty$ вне некоторого множества E с $d_h(E)=\varliminf\limits_{\sigma\to+\infty}h(\sigma)\operatorname{meas}(E\cap[\sigma,+\infty))=0$, где $h(\sigma)$ — неотрицательная непрерывная возрастающая к $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функция.

1°. Нехай $\Lambda=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty\ \ (1\le n\to+\infty)$. Клас цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{z\lambda_n},\tag{1}$$

позначимо через $H(\Lambda)$. Для $F\in H(\Lambda)$ і $\sigma\in\mathbb{R}$ позначимо $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}:n\ge0\}$ і $\nu(\sigma)=\nu(\sigma,F)=\max\{n:|a_n|e^{\sigma\lambda_n}=\mu(\sigma,F)\}$ відповідно максимальний член і центральний індекс ряду (1).

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

Нехай L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій. Через L_φ позначимо клас функцій $h \in L$ таких, що $h(\varphi(t))t^{-1}\ln t \to 0$ $(t \to +\infty)$, де $\varphi \in L$ і всюди нижче є оберненою функцією до функції $\Phi \in L$. Для $\Phi \in L$ позначимо

$$H(\Lambda,\Phi) = \{F \in H(\Lambda) : (\exists K > 0)(\ln \mu(\sigma,F) \geq K\sigma\Phi(\sigma), \sigma \geq \sigma_0)\},$$
$$H_1(\Lambda,\Phi) = \{F \in H(\Lambda) : (\exists K > 0)(\ln \mu(\sigma,F) \geq K\sigma\Phi(K\sigma), \sigma \geq \sigma_0)\}.$$

Зрозуміло, що $H(\Lambda,\Phi) \subset H_1(\Lambda,\Phi)$.

Для вимірної множини $E \subset [0,+\infty)$ скінченної Лебегової міри $\operatorname{meas} E < +\infty$ її верхньою і нижньою h-щільностями у нескінченності називаємо відповідно величини

$$D_h(E) = \varlimsup_{R\to+\infty} h(R)\operatorname{meas}(E \cap [R,+\infty)), \quad d_h(E) = \varliminf_{R\to+\infty} h(R)\operatorname{meas}(E \cap [R,+\infty)).$$

Добре відомо [1] (для лакунарних степеневих рядів див. [2]), що для того, щоб для кожної цілої функції $F \in H(\Lambda)$ співвідношення

$$F(\sigma + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(\sigma)}e^{(\sigma+iy)\lambda_{\nu(\sigma)}} \tag{2}$$

справджувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри і рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \tag{3}$$

У [3, 4] це твердження доповнюється в частині описання виняткової множини у співвідношенні (2). Власне, якщо $F \in H(\Lambda,\Phi)$, $\Phi \in L$, $h \in L_\varphi$ і виконується умова

$$(\forall b > 0) : \lim_{\sigma\to+\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{4}$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0,+\infty) \setminus E, D_h(E) = 0)$ рівномірно по $y \in \mathbb{R}$. У випадку $\Phi(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, $h \in L$, в [3] доведено, що умова (4) є і необхідною для справедливості співвідношення (2) для кожної функції $F \in H(\Lambda,\Phi)$, при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E, D_h(E) = 0)$. У [4] доведено, що умова (4) є необхідною для справедливості співвідношення (2) для кожної функції $F \in H_1(\Lambda,\Phi)$ при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E, D_h(E) = 0)$, де $h, \Phi \in L$ — довільні фіксовані функції.

У цій статті доведено, що у всіх цитованих результатах умову (4) можна замінити умовою

$$(\forall b > 0) : \varliminf_{\sigma\to+\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{5}$$

при цьому у твердженнях верхню щільність $D_h(E)$ скрізь слід замінити на нижню щільність $d_h(E)$. Всюди нижче вважаємо, що ряд (3) є збіжний.

Доведемо наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in L$, $h \in L_\varphi$. Якщо $F \in H(\Lambda,\Phi)$ і виконується умова (5), то співвідношення (2) є правильним при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0,+\infty) \setminus E, d_h(E) = 0)$ рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.*

Теорема 2. *Нехай $\Phi \in L, h \in L$ і умова (5) не виконується. Тоді існують функція $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$, стала $\beta > 0$ і множина $E \subset [0, +\infty)$ з $d_h(E) > 0$ такі, що для всіх $\sigma \in E$*

$$F(\sigma) > (1+\beta)\mu(\sigma, F). \tag{6}$$

2°. *Доведення теореми 1* у частині отримання асимптотичної рівності (2) є близьким до відповідних доведень теорем з [1–3, 5, 6], а в частині оцінки величини виняткової множини — до відповідних доведень з [6], проведених в класі рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Нехай $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ — лічильна функція послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$. Вслід за [6] визначимо

$$q(k) = n\Big(\frac{\lambda_k}{3}\Big) \quad (k \ge 0), \quad \delta(l, j) = (j - l + 1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1}.$$

$$\delta_k = \max\{\delta(l, j) : q(k) \le l \le k \le j < +\infty\}.$$

Як і в [6] показуємо, що

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \delta_k \le C \sum_{k=q(n)}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}, \quad n \ge 0, \tag{7}$$

де $C > 0$ — деяка стала. За умовою (5) для кожного $b > 0$ існує така послідовність $\sigma_j \to +\infty$, що

$$h(\sigma_j) \sum_{b\lambda_k > \Phi(\sigma_j)} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \to 0,$$

тому для $m_j = \min\big\{k : \lambda_k > \Phi(\sigma_j)/b\big\}$ маємо $\lambda_{m_j - 1} \le \Phi(\sigma_j)/b$ і, отже

$$h(\varphi(b\lambda_{m_j - 1})) \sum_{k=m_j}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \to 0, \quad m_j \to +\infty. \tag{8}$$

Якщо тепер позначити $n_j = \max\{n : \lambda_{n-1} \le 3\lambda_{m_j - 1}\}$, то отримаємо $\lambda_{n_j} > 3\lambda_{m_j - 1}$, звідки, враховуючи, що $\frac{1}{3}\lambda_{n_j} < \lambda_{q(n_j)}$, маємо $\lambda_{n_j - 1} \le 3\lambda_{m_j - 1} < \lambda_{n_j} < 3\lambda_{q(n_j)}$. Тому $q(n_j) \ge m_j$, звідки за нерівністю (7) та за допомогою співвідношення (8) отримуємо

$$h\Big(\varphi\Big(\frac{b}{3}\lambda_{n_j - 1}\Big)\Big) \sum_{k=n_j}^{+\infty} \delta_k \le Ch(\varphi(b\lambda_{m_j - 1})) \sum_{k=q(n_j)}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - l_k} \le$$
$$\le Ch(\varphi(b\lambda_{m_j - 1})) \sum_{k=m_j}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = o(1), \quad j \to +\infty. \tag{9}$$

Нехай тепер $l_j = \sum_{k \ge n_j} \delta_k$ і $b = 6$. Оскільки за співвідношенням (9)

$$h(\varphi(2\lambda_{n_j - 1}))l_j \to 0 \ \ (j \to +\infty), \tag{10}$$

то можна визначити $\overline{C}_j = (\max\{h(\varphi(2\lambda_{n_k - 1}))l_k : k \ge j\})^{-\frac{1}{2}}$, при цьому $\overline{C}_j \nearrow +\infty$ $(j \to +\infty)$. Нехай $C_k \equiv \overline{C}_j$ для $n_j \le k < n_{j+1}$. Тоді, застосовуючи співвідношення (10), маємо

$$h(\varphi(2\lambda_{n_j-1}))\sum_{k\geq n_j} C_k\delta_k \leq h(\varphi(2\lambda_{n_j-1}))\sum_{s=j}^{+\infty}\overline{C}_s\sum_{k=n_s}^{n_{s+1}-1}\delta_k \leq$$

$$\leq (h(\varphi(2\lambda_{n_j-1})))^{\frac{1}{2}}\sum_{s=j}^{+\infty}\frac{1}{(l_s)^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=n_s}^{n_{s+1}-1}\delta_k = (h(\varphi(2\lambda_{n_j-1})))^{\frac{1}{2}}\sum_{s=j}^{+\infty}\frac{l_s-l_{s+1}}{(l_s)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= (h(\varphi(2\lambda_{n_j-1})))^{\frac{1}{2}}\sum_{s=j}^{+\infty}((l_s)^{\frac{1}{2}}-(l_{s+1})^{\frac{1}{2}})\Big(1+\Big(\frac{l_{s+1}}{l_s}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \leq$$

$$\leq 2(h(\varphi(2\lambda_{n_j-1}))l_j)^{\frac{1}{2}} = o(1), \quad j\to+\infty. \tag{11}$$

Нехай $\varepsilon_k = C_k\delta_k$. Покажемо, що рівності

$$\nu(\sigma+\varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma), \quad \nu(\sigma-\varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma) \tag{12}$$

виконуються одночасно для всіх $\sigma\in[0;+\infty)\setminus E_2$, $d_h(E_2)=0$, де $\nu(\sigma)=\nu(\sigma,F)$. Нехай (σ_n) — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma,F)$, тобто $\nu(\sigma,F)=j$ при $\sigma_j\leq\sigma<\sigma_{j+1}$ і, якщо $\nu(\sigma_{j+1},F)=j+p$, то $\sigma_{j+1}=\sigma_{j+2}=\dots=\sigma_{j+p}<\sigma_{j+p+1}$. Нехай $\sigma\in[\sigma_n,\sigma_{n+1})$ і $\sigma_n<\sigma_{n+1}=\dots=\sigma_{n+p}<\sigma_{n+p+1}$. Тоді $\nu(\sigma)=n$ і $\nu(\sigma+\varepsilon_{\nu(\sigma)})\neq\nu(\sigma)$ лише у випадку, коли $\sigma+\varepsilon_n\geq\sigma_{n+1}$, а $\nu(\sigma-\varepsilon_{\nu(\sigma)})\neq\nu(\sigma)$ лише у випадку $\sigma-\varepsilon_n<\sigma_n$. Тобто, рівності (12) на проміжку $[\sigma_n,\sigma_{n+1})$ можуть не виконуватись лише на множині $E_{(n)}\subset[\sigma_n,\sigma_n+\varepsilon_n)\cup[\sigma_{n+1}-\varepsilon_n,\sigma_{n+1})$. У будь-якому випадку $\operatorname{meas}E_{(n)}\leq 2\varepsilon_n$. Нехай $E_2\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{n=1}^{+\infty}E_{(n)}$.

За умовою $F\in H(\Lambda,\Phi)$ маємо при $\sigma\geq\sigma_0$

$$K\sigma\Phi(\sigma)\leq\ln\mu(\sigma,F)=\ln\mu(0,F)+\int_0^\sigma\lambda_{\nu(t)}dt\leq 2\sigma\lambda_{\nu(\sigma-0)},$$

звідки $\sigma\leq\varphi\Big(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma-0)}\Big)$ при $\sigma\geq\sigma_0$, де $\nu(\sigma)=\nu(\sigma,F)$, $K=K_F$, $\varphi(t)$ — функція обернена до $\Phi(t)$. Тоді

$$h(\sigma_n)\operatorname{meas}(E_2\cap[\sigma_n,+\infty)) = h(\sigma_n)\sum_{k=n}^{+\infty}\operatorname{meas}E_{(k)}\leq$$

$$\leq 2h(\varphi(2\lambda_{\nu(\sigma_n-0)}))\sum_{k=n}^{+\infty}\varepsilon_k\leq 2h(\varphi(2\lambda_{n-1}))\sum_{k=n}^{+\infty}\varepsilon_k.$$

Звідси, враховуючи (11), отримуємо $d_h(E_2)=0$. Для всіх $\sigma\in[\sigma_1,+\infty)\setminus E_2$ одночасно виконуються рівності (12).

Наступна частина доведення аж до формули (16) є практично дослівним повторенням відповідних доведень з [3] і [6]. За означенням $\mu(\sigma,F)$ при $\sigma\notin E_2$ за допомогою рівностей (12) послідовно маємо

$$|a_n|e^{(\sigma\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)})\lambda_n}\leq\mu(\sigma\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)},F)=|a_{\nu(\sigma)}|e^{(\sigma\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)})\lambda_{\nu(\sigma)}},$$

тобто

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\leq\mu(\sigma,F)\exp\{-|\lambda_n-\lambda_{\nu(\sigma)}|\varepsilon_{\nu(\sigma)}\}. \tag{13}$$

Оскільки, за нерівністю Коші-Буняковського

$$\sum_{m=l}^{j}(\lambda_{m+1}-\lambda_m)^{-1}\sum_{m=l}^{j}(\lambda_{m+1}-\lambda_m)\geq (j-l+1)^2, \tag{14}$$

то для $n\geq \nu+1$, вибираючи в (14) $l=\nu$ та $j=n-1$ маємо

$$\delta_\nu\geq \delta(\nu,n-1)\geq (n-\nu)^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

а для $q(\nu)\leq n\leq \nu-1$, вибираючи в (14) $l=n$ та $j=\nu-1$ отримуємо

$$\delta_\nu\geq\delta(n,\nu)\geq\Big(\frac{\nu-n}{\nu-n+1}\Big)^{\frac{3}{2}}\delta(n,\nu-1)\geq$$
$$\geq\Big(1-\frac{1}{\nu-n+1}\Big)^{\frac{3}{2}}(\nu-n)^{\frac{1}{2}}\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}(\nu-n)^{\frac{1}{2}}>\frac{(\nu-n)^{\frac{1}{2}}}{3}.$$

За допомогою останньої нерівності та нерівності (15), з нерівності (13) при $\sigma\to+\infty$ ($\sigma\notin E_2$) дістаємо

$$\sum\nolimits_3\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\mu(\sigma,F)}\sum_{n\geq q(\nu),n\neq\nu}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\leq\sum_{n=q(\nu)}^{\nu-1}\exp\Big\{-\frac{C_\nu}{3}(\nu-n)^{\frac{1}{2}}\Big\}+$$
$$+\sum_{n=\nu+1}^{+\infty}\exp\{-C_\nu(n-\nu)^{\frac{1}{2}}\}<2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{C_\nu}{3}n^{\frac{1}{2}}\Big\}=o(1). \tag{16}$$

В [3] показано, що якщо $h\in L$, $\Phi\in L$, $F\in H(\Lambda,\Phi)$ і виконується умова

$$(\forall b>0):h(\varphi(bx))\int_x^{+\infty}\frac{\ln n(t)}{t^2}dt\to 0,\quad x\to+\infty, \tag{17}$$

то

$$\sum\nolimits_2\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{\mu(\sigma,F)}\sum_{\lambda_n\leq\frac{1}{3}\lambda_\nu}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}=o(1) \tag{18}$$

при $\sigma\to+\infty$ ($\sigma\in[0,+\infty)\setminus E$,$D_h(E)=0$), де $\nu=\nu(\sigma,F)$ (див. [3], наслідок 3).

Зауважимо, що із умови $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty$ за допомогою нерівності (14) отримуємо $n(t)=o(\sqrt{t})$ ($t\to+\infty$), тому

$$\int_x^{+\infty}\frac{\ln n(t)}{t^2}dt=O\Big(\frac{\ln x}{x}\Big),\quad x\to+\infty$$

і, оскільки $h\in L_\varphi$, то виконується умова (17), а, отже, справедлива рівність (18).

Застосовуючи рівність (18) вкупі з нерівністю (16) отримаємо, що при $\sigma\to+\infty$ ($\sigma\notin E\cup E_2=E_1$)

$$\sum_{n\neq\nu(\sigma)}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\leq\mu(\sigma,F)\Big(\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3\Big)=o(\mu(\sigma,F)).$$

Тому

$$R_\nu(\sigma+iy)=\sum_{n\neq\nu(\sigma)}a_ne^{(\sigma+iy)\lambda_n}=o(\mu(\sigma,F))$$

при $\sigma\to+\infty$ ($\sigma\notin E_1$) рівномірно по $y\in\mathbb{R}$ і, оскільки $0\leq d_h(E_1)\leq D_h(E)+d_h(E_2)=0$, то $d_h(E_1)=0$, тобто теорему 1 доведено. □

3°. Доведення теореми 2. Маємо змогу повторювати міркування з [4] . Справді, із заперечення умови (5) випливає, що існують деякі $b > 0, d > 0$, такі, що

$$h\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{b}\Big)\Big) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geq d > 0 \quad (n \geq n_0). \tag{19}$$

Вибираючи $\varkappa_n = \sum_{k=1}^{n-2} r_k \ (n \geq 2)$, де

$$r_1 = \max\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda_2}{b}\Big), \frac{b_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big\}, \quad r_k = \max\Big\{\varphi\Big(\frac{\lambda_{k+1}}{b}\Big) - \varphi\Big(\frac{\lambda_k}{b}\Big), \frac{b_1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}\Big\},$$

а також $a_0 = 1, a_n = \exp\{-\sum_{k=1}^{n} \varkappa_k(\lambda_k - \lambda_{k-1})\}$, отримуємо, що $\varkappa_n = \frac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$. Враховуючи, що $\varkappa_n \uparrow +\infty \ (n \to +\infty)$, звідси негайно отримуємо, що для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ і $n \geq 0$ виконується $\mu(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \max\{a_k e^{\sigma\lambda_k} : k \geq 0\} = a_n e^{\sigma\lambda_n}$. Зауважимо, що $\varkappa_{n+1} - \varkappa_n = r_{n-1} \geq \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$. Тому, для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_n + \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}]$ та $n \geq n_0$ маємо

$$\frac{a_{n-1}e^{\sigma\lambda_{n-1}}}{\mu(\sigma)} = \exp\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})(\varkappa_n - \sigma)\} \geq e^{-b_1} = \beta. \tag{20}$$

Нехай тепер F — функція, яка визначена рядом (1) з щойно визначеними коефіцієнтами (a_n). Оскільки $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty$, то за нерівністю Коші-Буняковського, як і вище маємо $n^2 = o(\lambda_n)(n \to +\infty)$, а за побудовою $-\frac{1}{\lambda_n} \ln a_n \to +\infty \ (n \to +\infty)$, тому очевидно, що $F \in H(\Lambda)$. Крім того $\mu(\sigma, F) \equiv \mu(\sigma)$. Тому, для всіх $\sigma \in E \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=n_0}^{+\infty} [\varkappa_n; \varkappa_n + \frac{b_1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}]$ маємо $F(\sigma) \geq (1 + \beta)\mu(\sigma, F)$. Враховуючи, що при $\sigma \geq \sigma_0$ для $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$

$$\ln \mu(2\sigma, F) \geq \int_{\sigma}^{2\sigma} \lambda_{\nu(x)} dx \geq \sigma\lambda_{\nu(\sigma)} = \sigma\lambda_n \geq b\sigma\Phi\Big(\frac{\varkappa_{n+1}}{2}\Big) \geq b\sigma\Phi\Big(\frac{\sigma}{2}\Big),$$

то $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$. Оскільки,

$$\operatorname{meas}(E \cap [\varkappa_{n+1}; +\infty)) = b_1 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k},$$

то при $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$ одержуємо

$$\begin{aligned} h(\sigma) \operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) \geq h(\varkappa_n) \operatorname{meas}(E \cap [\varkappa_{n+1}, +\infty)) = \\ = h\Big(\varphi\big(\frac{\lambda_{n-1}}{b}\big)\Big) b_1 \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \geq b_1 d \end{aligned}$$

і, отже $d_h(E) \geq b_1 d > 0$. Теорему 2 доведено. □

4°. Наслідки. Із теорем 1 і 2 негайно отримуємо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай $\Phi \in L$ і $h \in L_\varphi$. Для того, щоб для кожної функції $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ співвідношення (2) було правильним при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, d_h(E) = 0$) рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$(\forall b > 0) : \varlimsup_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(b\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0. \tag{21}$$

Доведення. Необхідність умови (21) маємо з теореми 2.

Відмітимо тепер, що з умови $F \in H_1(\Lambda, \Phi)$ випливає, що $F \in H(\Lambda, \Phi_1)$ при $\Phi_1(t) = \Phi(Kt)$, де $K = K(F)$ — стала з означення класу $H_1(\Lambda, \Phi)$. І достатність умови (21) отримуємо з теореми 1. □

Зауважимо, що з теорем 1–3 отримуємо нові твердження і в класі цілих функцій $f(z)$, зображуваних лакунарними степеневими рядами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k}. \tag{22}$$

Власне нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_k| r^{n_k} : k \geq 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{k : |a_k| r^{n_k} = \mu_f(r)\}$. Нижньою логарифмічною h-щільністю множини $E \subset [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри $l_n\text{-meas}\, E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E\cap[1,+\infty)} \frac{dr}{r} < +\infty$ називаємо величину

$$d_h^*(E) = \varliminf_{r\to+\infty} h(r) l_n\text{-meas}\,(E \cap [r, +\infty)).$$

Із теореми 1 отримаємо наступний наслідок.

Наслідок. *Нехай $\Phi \in L$ і $h \in L_\varphi$. Якщо*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\ln r\Phi(r)} > 0$$

і

$$(\forall b > 0) : \varliminf_{r\to+\infty} h(r) \sum_{n_k > b\Phi(r)} \frac{1}{n_{k+1} - n_k} = 0,$$

то співвідношення

$$f(re^{i\varphi}) = (1 + o(1)) a_{\nu_f(r)} r^{n_{\nu_f(r)}} e^{i\varphi n_{\nu_f(r)}}$$

виконується при $r \to +\infty$ $(r \in [1, +\infty) \setminus E,\ d_h^*(E) = 0)$ рівномірно по $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Подібно можна переформулювати також теореми 2 і 3 для цілих функцій вигляду (22).

ЛІТЕРАТУРА

1. Скасків О. Б. *Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* // Доп. АН УРСР, сер.А. – 1984. – №11. – С.22–24.
2. Fenton P. C. *The minimum modulus of gap power series* // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1978. – V.21. – P.49–54.
3. Скасків О. Б., Сало Т. М. *Цілі ряди Діріхле швидкого зростання і нові оцінки міри виняткових множин в теоремах типу Вімана-Валірона* // Укр. мат. журн. (в друці)
4. Сало Т. М., Скасків О. Б. *Про виняткові множини у теоремах типу Вімана-Валірона* // Вісник Львів. ун-ту. – 2000. – Вип.56. – С.176–178.
5. Скаскив О. Б., Шеремета М. Н. *Об асимптотическом поведении целых рядов Дирихле* // Матем. сб. – 1986. – Т.131(173), №3 (11). – С.385–402.

6. Скаскив О. Б. *К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции* // Изв. АН СССР, сер.матем. – 1989. – Т.53, №4. – С.833–850.

7. Сало Т. М., Скасків О. Б. *Оцінки виняткової множини в теоремах типу Бореля* // Вісник Львів. ун-ту. – 1999. – Вип.54. – С.171–174.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 10.05.2000
Після переробки 15.09.2000