УДК 517.945, 519.46

А. О. Абраменко, С. В. Спічак

ПРО НОВІ КЛАСИ ЕРМІТОВИХ ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНИХ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ШРЕДІНГЕРА

A. O. Abramenko, S. V. Spichak. *On new classes of Hermitian exactly solvable matrix Schrödinger operators*, Matematychni Studii, **15** (2001) 44–56.

Five multi-parameter families of Hermitian exactly solvable matrix Schrödinger operators in one variable was constructed. For this we use a representation of the four-dimensional Lie algebra as well as invariant space under its operators and additional operators which act in this space.

А. А. Абраменко, С. В. Спичак. *Про новые классы эрмитовых точно решаемых матричных операторов Шредингера* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №1. – С.44–56.

Построены пять многопараметрических семейств эрмитовых точно решаемых матричных одномерных операторов Шредингера. Для этого используется одно из представлений четырехмерной алгебры Ли, а также пространство, инвариантное относительно его операторов и дополнительных операторов.

1. Вступ. В останній час багато праць (див., напр. [1–3, 8]) присвячено проблемі побудови точно та квазі-точно розв'язуваних моделей Шредінгера

$$\hat{H}[x]\psi(x) = [\partial_x^2 + V(x)]\psi(x) = \lambda\psi(x). \tag{1}$$

У працях [2]–[4] методом Турбінера–Шифмана повністю описано одновимірні скалярні моделі. Подальший розвиток цього методу для випадку багатовимірних скалярних стаціонарних рівнянь Шредінгера здійснено в [4]–[7]. Щодо матричних моделей (1), які мають Лі-алгебраїчну структуру [9], то описано лише декілька конкретних прикладів [4, 8]. Дослідження вказаних моделей проводились по одному з двох підходів:

1. Підхід Турбінера-Шифмана, Заславського [1]–[4], який грунтується на концепції Лі-алгебраїчного гамільтоніану. Оператор другого порядку називатимемо *Лі-алгебраїчним*, якщо виконуються такі умови:
   - гамільтоніан H є квадратичною формою зі сталими коефіцієнтами операторів першого порядку $Q_1, \ldots, Q_n$, які утворюють алгебру Лі L

$$H[x] = \left(\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} Q_j Q_k\right). \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 81R15, 81Q05.

- алгебра L має скінченновимірний інваріантний підпростір $\mathcal{G}$ усього простору зображення. При цьому у випадку точно розв'язуваних моделей (на відміну від квазі-точно розв'язуваних) ці підпростори можуть мати будь-яку розмірність.

Отже, якщо даний гамільтоніан є Лі-алгебраїчним, то після обмежень на простір $\mathcal{G}$ він стає матричним оператором $\mathcal{H}$, власні значення та власні функції якого обчислюються суто алгебраїчним шляхом.

2. Альтернативний підхід до побудови матричних моделей описано у працях [10]–[12]. Основна ідея полягає в тому, щоб зафіксувати базисні елементи інваріантного простору $\mathcal{G}$. Наприклад, у випадку простору, базисні елементи якого взято у вигляді поліномів по x, виникає відповідна задача класифікації супералгебр матрично-диференціальних операторів [12].

У цьому повідомленні ми запропонували метод, який синтезує зазначені підходи і дозволяє коструктивно будувати багатопараметричні сім'ї точно розв'язуваних матричних моделей Шредінгера (1). Пояснимо коротко суть цього методу. У статті [13] знайдено зображення чотиривимірних розв'язних алгебр Лі в класі матрично-диференціальних операторів

$$\mathcal{L} = \{Q : Q = a(x)\partial_x + A(x)\}\,. \tag{3}$$

Тут $a(x)$ — гладка дійсна функція, $A(x)$ — матриця розмірності 2×2, компоненти якої є гладкими комплекснозначними функціями від x, $\partial_x = \dfrac{d}{dx}$. У цій статті також одержано відповідні інваріантні простори. Однак, використовуючи лише оператори вказаних зображень алгебри Лі, не вдається побудувати ермітові моделі. Для розв'язання цієї проблеми пропонуємо зробити наступне:

- у відповідності з другим підходом, доповнити множину операторів зображення алгебри Лі операторами, які б залишали відповідний простір інваріантним;
- розглянути гамільтоніан H, який побудовано за допомогою як операторів даного зображення, так і нових доданих операторів;
- з одержаної багатопараметричної сім'ї гамільтоніанів H виділити ермітові моделі.

Цю схему ми реалізуємо на прикладі зображення алгебри Лі $L^2_{4,8}$ [13]. У розділі 3 регулярним чином описано всі відповідні ермітові точно розв'язні матричні моделі Шредінгера.

Як часткові приклади наведемо *Моделі 1,2*, які мають важливу властивість: відповідні інваріантні простори є гільбертовими, тобто на елементах цих просторів можна ввести скалярний добуток $\langle f_1(y), f_2(y)\rangle = \int \vec{f_1}(y)^\dagger f_2(y)\,dy$, де $\vec{f_1}(y)^\dagger$ — ермітове спряження вектора $f_1(y)$.

Модель 1. $(\hat{H}(y) + E)\psi(y) = 0$, де

$$\hat{H}(y) = \partial_y^2 - \left(\sin y + \frac{1}{2} y\cos y\right)\sigma_1 + \left(\cos y - \frac{1}{2} y \sin y\right)\sigma_3 + \frac{3}{4}.$$

Ця модель відповідає випадку 1 у розділі 3, де $\alpha_2 = \beta_2 = \delta_3 = \gamma_0 = 1$, $\varepsilon = 1/2$, а решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Інваріантний простір $\mathcal{G}$ цього оператора має розмірність

$2k+3$ і породжується векторами

$$\vec{f}_j = -ie^{-1/4y^2} y^j \exp\left(\frac{i\sigma_2}{2} y\right) \vec{e}_1, \quad \vec{g}_s = ie^{-1/4y^2} y^s \exp\left(\frac{i\sigma_2}{2} y\right) \vec{e}_2,$$

де $j = 0, \dots, k+1$, $s = 0, \dots, k$, $\vec{e}_1 = (1,0)^T$, $\vec{e}_2 = (0,1)^T$.

Модель 2.

$$\hat{H}(y) = \partial_y^2 - \frac{1}{2}\left[\cos\left(2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\sigma_1 + \sin\left(2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\sigma_3\right] + \frac{5}{4y^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16}y^2.$$

Ця модель відповідає підвипадку 2.1 у розділі 3, де $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_0 = 1$, $\delta_1 = \dfrac{1}{2}$, а решта коефіцієнтів дорівнюють нулю. Інваріантний простір $\mathcal{G}$ породжується векторами

$$\vec{f}_j = -ie^{-1/8y^2} \left|\frac{y}{2}\right|^{2j+1/2} \exp\left(i\sigma_2 \ln\left|\frac{y}{2}\right|\right) \vec{e}_1, \quad g_s = ie^{-1/8y^2} \left|\frac{y}{2}\right|^{2s+1/2} \exp\left(i\sigma_2 \ln\left|\frac{y}{2}\right|\right) \vec{e}_2,$$

де $j = 0, \dots, k+1$, $s = 0, \dots, k$.

2. Загальний вигляд ермітового точно розв'язуваного оператора Шредінгера для зображення $L_{4,8}^2$ алгебри Лі. У статті [13] знайдено зображення алгебри Лі $L_{4,8}^2$ з операторами

$$Q_1 = A, \quad Q_2 = Be^{-x}, \quad Q_3 = c^x(\partial_x + C), \quad Q_4 = \partial_x, \tag{4}$$

де $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Оператори $Q_1, \dots, Q_4$ з (4) задовольняють комутаційні співвідношення (решта комутаційних співвідношень нульові):

$$[Q_2, Q_3] = Q_1, \ [Q_2, Q_4] = Q_2, \ [Q_3, Q_4] = -Q_3.$$

Відповідний інваріантний простір має такий вигляд:

$$\mathcal{G} = \langle e^{-cx}\vec{e}_1, e^{-(c+1)x}\vec{e}_1, \dots, e^{-(c+k+1)x}\vec{e}_1\rangle \oplus \langle e^{-cx}\vec{e}_2, e^{-(c+1)x}\vec{e}_2, \dots, e^{-(c+k)x}\vec{e}_2\rangle, \tag{5}$$

де k — довільне натуральне число.

Оскільки в операторах (4) всі матриці верхньотрикутні, то для побудови ермітового гамільтоніану H природно було б доповнити множину операторів (4) новими операторами з нижньотрикутними матрицями. При цьому ці оператори повинні залишати простір (5) інваріантним. Неважко переконатися, що в класі операторів (3), де $a(x)$ може бути матрицею 2×2, всі такі оператори мають вигляд:

$$\begin{aligned} &R_1 = S_0, \quad R_2 = S_+e^x\partial_x, \quad R_3 = S_+\partial_x, \quad R_4 = S_0e^x\partial_x, \\ &R_5 = S_0\partial_x, \quad R_6 = S_+e^{-x}\partial_x, \quad R_7 = S_-e^x\partial_x, \end{aligned} \tag{6}$$

де $S_0 = \dfrac{\sigma_3}{2}$, $S_\pm = \dfrac{i\sigma_2 \pm \sigma_1}{2}$, σ_i $(i = 1,2,3)$ — матриці Паулі 2×2 , а саме

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо основні етапи алгоритму побудови точно розв'язуваного оператора Шредінгера [14]. Загальна форма точно розв'язуваної моделі в рамках нашого підходу має вигляд

$$H[x] = \xi(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \tag{7}$$

де $\xi(x)$ — деяка дійсна функція, $B(x)$, $C(x)$ — матричні функції 2×2. При цьому необхідно розглянути лише ті незалежні білінійні форми операторів (4), (6), в яких коефіцієнти при похідній другого порядку ∂_x^2 є дійсними скалярними функціями.

Нехай $U(x)$ — невироджена матрична функція, яка задовольняє систему звичайних диференціальних рівнянь

$$U'(x) = \frac{1}{2\xi(x)}\left(\frac{\xi'(x)}{2} - B(x)\right)U(x), \tag{8}$$

а також визначимо функцію $z(x)$ за допомогою рівності

$$z(x) = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{\xi(x)}}. \tag{9}$$

Виявляється, що заміна

$$\begin{aligned} x &\rightarrow y = z(x), \\ H[x] &\rightarrow \hat{H}[y] = \hat{U}^{-1}(y)H[z^{-1}(y)]\hat{U}(y), \end{aligned} \tag{10}$$

де z^{-1} — обернена функція до z, $\hat{U}(y) = U(z^{-1}(y))$, приводить гамільтоніан (7) до стандартного вигляду оператора Шредінгера

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + V(y) \tag{11}$$

з

$$V(y) = \left\{U^{-1}(x)\left[-\frac{1}{4\xi}B^2(x) - \frac{1}{2}B'(x) + \frac{\xi'}{2\xi}B(x) + C(x)\right]U(x) + \frac{\xi''}{4} - \frac{3\xi'^2}{16\xi}\right\}\Bigg|_{x=z^{-1}(y)}. \tag{12}$$

Тут запис $W(x)|_{x=z^{-1}(y)}$ означає, що необхідно виконати заміну $x \rightarrow z^{-1}(y)$ у виразі $W(x)$.

Легко показати, що за допомогою заміни $U(x) = e^{-cx}$ можна позбутися параметра c в операторах (4), а також в базисних елементах (5), які позначимо через $\vec{b}_1(x), \ldots, \vec{b}_{2k+3}(x)$. Далі, перетворений інваріантний простір матиме вигляд:

$$\mathcal{G} = \langle \hat{U}^{-1}(y)\vec{b}_1(z^{-1}(y)), \ldots, \hat{U}^{-1}(y)\vec{b}_{2k+3}(z^{-1}(y))\rangle, \tag{13}$$

де $\hat{U}(y) = U(x)|_{x=z^{-1}}$ – матриця з (8).

Оскільки метою даної роботи є побудова ермітових моделей, то необхідно, щоб рівняння (8) розв'язувалося в явному вигляді. Отже, виберемо з усіх лінійно незалежних квадратичних форм операторів (4), (6) такі, при яких матриця $B(x)$ відповідного гамільтоніану (7) має вигляд

$$B(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{3}\tilde{\varphi}_i\sigma_i h(x) = g(x) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}h(x), \tag{14}$$

де $g(x)$, $h(x)$ — комплекснозначні скалярні функції, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_1, i\varphi_2, \varphi_3)$ — комплекснозначні сталі, які залежать від параметрів α_{ij} (2), $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (множник i перед довільним параметром φ_2 вибрано для зручності).

Всі можливі лінійно незалежні квадратичні форми операторів (4), (6) в класі операторів (7) наведено нижче

$$\begin{array}{l} Q_4^2 = \partial_x^2,\ Q_3Q_4 = e^x\partial_x^2,\ Q_3^2 = e^{2x}(\partial_x^2 + \partial_x), \\ Q_3 = e^x\partial_x,\ \tilde{R}_2 = R_2 - R_7 = Q_1Q_3 - R_7 = \sigma_1 e^x\partial_x, \\ \tilde{R}_7 = R_2 + R_7 = Q_1Q_3 + R_7 = i\sigma_2 e^x\partial_x,\ 2R_4 = 2R_1Q_3 = \sigma_3 e^x\partial_x, \\ Q_4 = \partial_x,\ 2R_3 = 2Q_1Q_4 = (\sigma_1 + i\sigma_2)\partial_x,\ 2R_5 = \sigma_3\partial_x, \\ 2R_6 = (\sigma_1 + i\sigma_2)e^{-x}\partial_x,\ 2Q_1 = \sigma_1 + i\sigma_2,\ 2R_1 = \sigma_3, \\ 2Q_2 = (\sigma_1 + i\sigma_2)c^{-x}. \end{array} \qquad (15)$$

Відповідний гамільтоніан H (2), (7) має вигляд

$$\begin{array}{l} H = \alpha_0 Q_4^2 + \alpha_1 Q_3Q_4 + \alpha_2 Q_3^2 + \beta_0 Q_3 + \beta_1\tilde{R}_2 + \beta_2\tilde{R}_7 + 2\beta_3 R_4 + \\ +\gamma_0 Q_4 + 2\gamma_1 R_3 + 2\gamma_3 R_5 + 2\kappa R_6 + 2\delta_1 Q_1 + 2\delta_3 R_1 + 2\varepsilon Q_2 = \\ = [\alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}]\partial_x^2 + [\alpha_2 e^{2x} + \beta_0 e^x + \tilde{\beta}_a\sigma^a e^x + \gamma_0 + \gamma_1(\sigma_1 + i\sigma_2) + \\ +\gamma_3\sigma_3 + \kappa(\sigma_1 + i\sigma_2)e^{-x}]\partial_x + \delta_1(\sigma_1 + i\sigma_2) + \delta_3\sigma_3 + \varepsilon(\sigma_1 + i\sigma_2)e^{-x} = \\ = \xi(x)\partial_x^2 + [g(x) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\sigma}e^x + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{\sigma}e^{-x}]\partial_x + \tilde{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}e^{-x}, \end{array} \qquad (16)$$

де

$$\begin{array}{l} \xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}; \quad g(x) = \gamma_0 + \beta_0 e^x + \alpha_2 e^{2x}; \\ \tilde{\beta}_1 = \beta_1,\ \tilde{\beta}_2 = i\beta_2,\ \tilde{\beta}_3 = \beta_3; \quad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1,\ \tilde{\gamma}_2 = i\gamma_1,\ \tilde{\gamma}_3 = \gamma_3; \\ \tilde{\kappa}_1 = \kappa,\ \tilde{\kappa}_2 = i\kappa,\ \tilde{\kappa}_3 = 0; \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon,\ \tilde{\varepsilon}_2 = i\varepsilon,\ \tilde{\varepsilon}_3 = 0; \\ \tilde{\delta}_1 = \delta_1,\ \tilde{\delta}_2 = i\delta_1,\ \tilde{\delta}_3 = \delta_3. \end{array} \qquad (17)$$

Матриця $B(x)$ гамільтоніану (7), (16) матиме вигляд (14) в одному з чотирьох наступних випадків:

$$\begin{array}{l} 1.\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0},\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}},\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mu\tilde{\boldsymbol{\beta}}; \\ 2.\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0},\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \neq \mathbf{0},\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mu\tilde{\boldsymbol{\gamma}}; \\ 3.\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0},\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \neq \mathbf{0}; \\ 4.\ \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{0}, \end{array} \qquad (18)$$

де λ, μ — деякі сталі. Тоді гамільтоніан (16) можна записати

$$\begin{array}{l} H[x] = \xi(x)\partial_x^2 + [g(x) + h(x)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}]\partial_x + \tilde{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}e^{-x}, \\ h = \omega e^x + \lambda + \mu e^{-x}, \end{array} \qquad (19)$$

при цьому в наведених випадках (18) параметри $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_1, i\varphi_2, \varphi_3)$, ω, λ, μ приймають значення:

$$\begin{array}{l} 1.\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}},\ \omega = 1; \\ 2.\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}},\ \omega = 0,\ \lambda = 1; \\ 3.\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}},\ \omega = 0, \lambda = 0,\ \mu = 1; \\ 4.\ h = 0. \end{array} \qquad (20)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$U(x) = \xi^{1/4}(x) \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{g(x)}{\xi(x)}dx\right] \exp\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}}{2}\theta(x)dx\right]\Lambda, \tag{21}$$

де $\theta(x) = -\int \frac{h(x)}{\xi(x)}dx$, Λ — довільна невироджена матриця 2×2.

З врахуванням формули Гаусдорфа-Кемпбела потенціал (12) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
V(y) = \Lambda^{-1}\Bigg\{ & \frac{1}{16\xi}\left[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\omega^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2)e^{2x} + (4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - \right. \\
& \left. -8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\omega\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 + 2\mu\omega\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \gamma_0^2) - 8\mu\lambda\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2e^{-x} - 4\mu^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2e^{-2x}\right] + \\
& + \frac{1}{2\xi}\Bigg[\Big(\alpha_2\lambda - \beta_0\omega + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\Big)e^{2x} + \Big(2\alpha_2\mu + \alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0\omega - \alpha_0\omega + \\
& + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\Big)e^x + 2\alpha_1\mu - \beta_0\mu - \gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + \\
& + \Big(\alpha_0\mu - \gamma_0\mu + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\Big)e^{-x}\Bigg]\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma} + \\
& + \Big(\tilde{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}\Big)\operatorname{ch}\Big(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\Big) + \Big(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}\Big)e^{-x}\operatorname{ch}\Big(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\Big) + \\
& + \frac{i([\tilde{\boldsymbol{\delta}}\times\tilde{\boldsymbol{\varphi}}],\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}}\operatorname{sh}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right) + \frac{i([\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\times\tilde{\boldsymbol{\varphi}}],\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}}e^{-x}\operatorname{sh}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)\Bigg\}\Lambda\Bigg|_{x=z^{-1}(y)}
\end{aligned} \tag{22}$$

Отже, ми одержали оператор Шредінгера (11).

3. Сім'я ермітових потенціалів (22). У цій частині повідомлення ми описуємо повне багатопараметричну сім'ю потенціалів (22), які зводяться до ермітових. Зауважимо, що цей потенціал має структуру

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \sum_{i=1}^{5} v_i(y)\Lambda^{-1}\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}\Lambda + v_0(y), \tag{23}$$

при цьому v_i — лінійно незалежні функції, $\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)})$ — комплекснозначні сталі вектори, компоненти яких залежать від параметрів $\alpha_i, \tilde{\varphi}_i, \varepsilon_i, \delta_i$ з формул (17), (20). Для того, щоб потенціал (23) був ермітовим необхідно і досить, щоб матриці $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}$ одночасно зводились до ермітових за допомогою деякого перетворення Λ. Умови такого зведення наведено в наступній лемі (доведення див. в [14]), з якої випливають необхідні і достатні умови, що накладаються на параметри (17). Явні формули для знаходження перетворення Λ буде наведено нижче.

Лема. *Нехай* $\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)})$ — *ненульові комплекснозначні вектори. Тоді справедливі такі твердження:*

(i) матриця $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$ *зводиться до ермітової за допомогою перетворення* $A \to \Lambda^{-1}A\Lambda$ *тоді і лише тоді, коли* $(\mathbf{a}^{(1)})^2 > 0$ *(зокрема, це означає, що* $(\mathbf{a}^{(1)})^2 \in \mathbb{R}$*);*

(ii) матриці $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$, *де* $\mathbf{a}^{(2)} \neq \lambda\mathbf{a}^{(1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *зводяться одночасно до ермітових тоді і лише тоді, коли*

$$(\mathbf{a}^{(1)})^2 > 0,\ (\mathbf{a}^{(2)})^2 > 0,\ [\mathbf{a}^{(1)}\times\mathbf{a}^{(2)}]^2 > 0,\ \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)} \in \mathbb{R};$$

(iii) матриці $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}(i \neq 1,2)$, де $\mathbf{a}^{(2)} \neq \lambda\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(i)} \neq \mu\mathbf{a}^{(2)}$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, зводяться одночасно до ермітових тоді і лише тоді, коли

$$(\mathbf{a}^{(1)})^2 > 0,\ (\mathbf{a}^{(2)})^2 > 0,\ [\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}]^2 > 0,\ \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)} \in \mathbb{R}.$$

$$\{\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(i)},\ \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{a}^{(i)},\ ([\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}]\mathbf{a}^{(i)})\} \subset \mathbb{R}.$$

Тут через $[\mathbf{a}^{(i)} \times \mathbf{a}^{(j)}]$, $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{a}^{(j)}$ позначено векторний та скалярний добутки відповідно.

Перейдемо безпосередньо до відбору операторів Шредінгера (11), що зводяться до ермітових. У процесі відбору в залежності від параметрів (17) виникають різні класи цих операторів з ермітовою матрицею $V(y)$. Це, в свою чергу, дає повний опис точно-розв'язуваних матричних моделей (1), (19), які можна звести до ермітових матричних операторів Шредінгера. Враховуючи попередню лему, нижче ми наводимо остаточні результати: умови на вибір параметрів, явний вигляд точно-розв'язуваних ермітових операторів Шредінгера, а також відповідні перетворення Λ. Після цього ми докладно зупинимось на виведенні відповідних формул випадку 1. В нижченаведених формулах запис $[A] \wedge [B]$ означає кон'юнкцію двох тверджень A та B.

Подальший аналіз показує, що ермітові моделі отримуються тільки тоді, коли у (18), (20) $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \omega = 1, \mu = 0$.

Випадок 1.

$$[\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 < 0,\ \varepsilon \neq 0,\ \beta_1 \neq \beta_2] \wedge [\{\lambda, \gamma_0, \beta_0, \varepsilon(\beta_1 - \beta_2),\ \delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \beta_3\delta_3, \delta_3\} \subset \mathbb{R}] \wedge$$
$$\wedge \left[\mu = \alpha_0 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = -\gamma_0\lambda + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = 0\right]$$

$$\begin{aligned}\hat{H}[y] &= \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} + \\ &+ (8\alpha_1\gamma_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma_0^2)] + \\ &+ \Big(P\cos\big(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + \Omega\big) + \frac{\varepsilon(\beta_1-\beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}e^{-x}\cos\big(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\big)\Big)\sigma_1 + \\ &+ \Big(P\sin\big(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + \Omega\big) + \frac{\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}e^{-x}\sin\big(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\big)\Big)\sigma_3\Bigg|_{x=z^{-1}(y)},\end{aligned}$$

де

$$P = \sqrt{\delta_3^2 - \frac{(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}})^2}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}, \quad \cos\Omega = \frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{P\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}},\ \sin\Omega = \frac{\delta_3}{P},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}\right) \cdot \exp(\nu\sigma_3),\ e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Тут і далі ми позначаємо $z^{-1}(y)$ обернену функцію до функції (9), $\theta(x)$ — функція, яка визначається формулою (21).

Випадок 2. $[\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 < 0,\ \varepsilon = 0,\ \beta_1 \neq \beta_2, (\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}})^2 - \tilde{\boldsymbol{\delta}}^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 > 0] \wedge [\lambda \in \mathbb{R}]$.

Підвипадок 2.1.

$$\left[\delta_3 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2} = \alpha_1\lambda - \beta_0 - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2} = \right.$$
$$\left. = -\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2} = 0\right] \wedge [\gamma_0, \beta_0 \in \mathbb{R}],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^{2x} +$$
$$+(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 + \gamma_0^2)] +$$
$$+\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_1 + \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_3\right]\Bigg|_{x=z^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}\right)\exp(\nu\sigma_3),\ e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Підвипадок 2.2.

$$\left[\delta_3 = 0,\ \gamma_0 = -\alpha_0,\ \lambda = -2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right] \wedge [\gamma_0,\ i\beta_0 \in \mathbb{R}],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^{2x} +$$
$$+(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 + \gamma_0^2)] + \frac{i\lambda\beta_0}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\sigma_2 e^x +$$
$$+\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_1 + \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_3\right]\Bigg|_{x=z^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}\right)\exp(\nu\sigma_3),\ e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Підвипадок 2.3.

$$[\delta_1 = 0, \beta_1^2 - \beta_2^2 \neq 0] \wedge$$
$$\wedge \left[\left\{ i\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),\ i\left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left. i\left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),\ 2\alpha_2\gamma_0 - \beta_0^2,\ \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\beta_0 - \gamma_0\beta_0,\ \gamma_0^2 \right\} \subset \mathbb{R}\right],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^{2x} +$$
$$+(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 + \gamma_0^2)]+$$
$$+\frac{1}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\left[\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^{2x} + \right.$$
$$\left. + \left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^x + \left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\right] i\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\sigma_2 +$$
$$\left. + \frac{\delta_3\sqrt{\beta_1^2 - \beta_2^2}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_3 - \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_1\right]\right|_{x=z^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp(\nu\sigma_3)\exp(\chi\sigma_1), \quad e^{2\nu} = \sqrt{\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1}}, \; e^{2\chi} = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} - \beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} + \beta_3}}.$$

Підвипадок 2.4.

$$[\delta_1, \delta_3 \neq 0] \wedge \left[\left\{ i\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right), i\left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),\right.\right.$$
$$\left.\left. i\left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right), 2\alpha_2\gamma_0 - \beta_0^2, \; \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\beta_0 - \gamma_0\beta_0, \gamma_0^2 \right\} \subset \mathbb{R}\right].$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^{2x} +$$
$$+(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 + \gamma_0^2)]+$$
$$+\frac{1}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\left[\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^{2x} + \left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^x + \left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\right] i\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\sigma_2$$
$$\left. +\sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol\delta}^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2 - (\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta})^2}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_1 - \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_3\right]\right|_{x=z^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp(\nu\vec{\alpha}\vec{\sigma}) \cdot \exp(\chi\sigma_3), \boldsymbol\alpha = \frac{\delta_3\tilde{\boldsymbol\beta} - \beta_3\tilde{\boldsymbol\delta}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}},$$

$$e^{2\nu\vec{\alpha}^2} = \sqrt{\frac{\delta_1(\beta_1 - \beta_2) - \sqrt{\delta_3(\beta_1 - \beta_2)[\delta_3(\beta_1 + \beta_2) - 2\delta_1\beta_3]}}{\delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \sqrt{\delta_3(\beta_1 - \beta_2)[\delta_3(\beta_1 + \beta_2) - 2\delta_1\beta_3]}}}.$$

Величину χ визначаємо у наступний спосіб. При дії перетворення Λ_1 на $\dfrac{\tilde{\boldsymbol\beta}^2\tilde{\boldsymbol\delta}\boldsymbol\sigma - (\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta})\tilde{\boldsymbol\beta}\boldsymbol\sigma}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}$ одержуємо деяку матрицю $\mathbf{b}\boldsymbol\sigma$. Компоненти вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ зв'язані з χ співвідношенням $e^{2\chi} = \sqrt{\dfrac{ib_1 + b_2}{ib_1 - b_2}}$.

У випадку, коли параметри не задовольняють описані вище умови (випадки 1, 2), одержані ермітові оператори Шредінгера мають діагональний вигляд, а саме

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + f(x) + g(x)\sigma_3|_{x=z^{-1}(y)}. \tag{24}$$

Функції $f(x)$, $g(x)$, а також перетворення Λ наведено в Додатку.

В цілому процедура виведення наведених формул для гамільтоніанів $\hat{H}[y]$, які не належать до класу (24), дуже громіздка. Тому зупинимось на основних етапах виводу відповідної формули на прикладі 1, не вдаючись в технічні деталі. У цьому випадку, коли $\varepsilon \neq 0$, за допомогою леми можна довести, що $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 < 0$, при цьому $\beta_1 \neq \beta_2$.

Зберігаючи позначення леми, розглянемо вектори $\mathbf{a}^{(i)}$:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \times \tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \quad \mathbf{a}^{(3)} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\delta}} \times \tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}, \quad \mathbf{a}^{(4)} = \tilde{\boldsymbol{\delta}} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\delta}}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \quad \mathbf{a}^{(5)} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}.$$

Покажемо, що вектори $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)} \neq 0$, тобто задовольняють умови леми. Справді, якщо б один з них дорівнював нулю, то неважко довести, що $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \nu_1\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \mathbf{0}$. Оскільки $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = (\delta_1, i\delta_1, \delta_3)$, то пряме обчислення дає, що вектори $\mathbf{a}^{(3)} = \nu_2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\mathbf{a}^{(4)} = \nu_3\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Тоді потенціал (22) має вигляд $V(y) = f_1(x) + g(x)\Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}\Lambda$. Оскільки $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = 0$, то згідно з пунктом (i) леми потенціал ермітовий тільки у випадку, коли $g(x) \equiv 0$, і тоді він належить до класу (24). Звідси випливає, що вектори $\mathbf{a}^{(i)} (i = 1, 2)$ ненульові.

Користуючись умовами (ii) леми, що накладаються на вектори $\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(2)}$, одержуємо, що $\varepsilon(\beta_1 - \beta_2) \in \mathbb{R}$.

З пункту (iii), у разі застосування до векторів $\mathbf{a}^{(3)}$, $\mathbf{a}^{(4)}$, випливає умова $\{\delta_3,\ \delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \beta_3\delta_3\} \subset \mathbb{R}$.

Оскільки слід матриць $\Lambda^{-1}\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}\Lambda$ нульовий, то для того, щоб оператор (23) був ермітовим необхідно, щоб функція $v_0(y)$ була дійсною. Враховуючи вигляд $v_0(y)$ з (22), а також застосовуючи пункт (iii) леми до вектора $\mathbf{a}^{(5)}$, ми одержуємо решту умов, що накладаються на параметри у випадку 1.

Спочатку знаходимо перетворення $\Lambda_1 = \exp(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma})$, яке зводить матрицю $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$ до вигляду $\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)/\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\sigma_3$. Після застосування формули Гаусдорфа-Кемпбела отримуємо умови, що накладаються на невідомі параметри $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, а також саме перетворення Λ_1. Це перетворення переводить матрицю $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$ в деяку матрицю $\mathbf{b}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$. Далі шукаємо перетворення Λ_2 вигляду $\exp(\nu\sigma_3)$, яке не змінює матрицю σ_3. Параметр ν знаходимо з тієї умови, що матриця $\mathbf{b}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$ повинна перходити в $\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)/\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\sigma_1$. Після застосування перетворення $\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ до решти матриць $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}$, $i \neq 1, 2$, ми приходимо до ермітового вигляду потенціалу (22).

4. Висновки. У цьому повідомленні, виходячи з операторів (4), (6), ми наводимо систематичний опис ермітових точно розв'язуваних гамільтоніанів. При цьому оператори (4) є зображенням алгебри Лі з відповідним скінченновимірним інваріантним простором (5), а оператори (6) побудовано так, що вони залишають простір (5) інваріантним. В результаті ми отримали декілька класів багатопараметричних сімей ермітових точно розв'язуваних матричних одновимірних гамільтоніанів.

У ході дослідження ми не ставили собі за мету виділити з одержаних моделей Шредінгера ті, для яких відповідні власні функції були б квадратично інтегровними. Ми сподіваємось, що ця проблема буде розв'язана нами в найближчий час.

5. Додаток.

Тут ми наводимо явний вигляд функцій $b(x)$, $g(x) \neq 0$ оператора (24), обмеження на параметри, що не підпадають під випадки 1, 2, а також перетворення вигляду

$$\Lambda = \exp[\nu(ia_2\sigma_1 - a_1\sigma_2)], \tag{25}$$

де параметр ν визначається із співвідношення

$$e^{2\nu(a_1^2+a_2^2)} = \sqrt{\frac{ia_3 - \sqrt{a_1^2+a_2^2}}{ia_3 + \sqrt{a_1^2+a_2^2}}}. \tag{26}$$

Вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ вказано в явному вигляді для кожного з наведених нижче випадків для операторів (24).

параметри	$\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 = \mathbf{0},\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0},\ 2i[\tilde{\boldsymbol{\delta}} \times \tilde{\boldsymbol{\beta}}] = \gamma_0\tilde{\boldsymbol{\beta}}$
$f(x)$	$\frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\gamma_0 - 4\beta_0^2)e^{2x} +$ $8(\alpha_1\gamma_0 - \gamma_0\beta_0)e^x - 4\gamma_0^2]$
$g(x)$	δ_3
$\mathbf{a}$	$\frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta_0)\tilde{\boldsymbol{\beta}} + 2\tilde{\boldsymbol{\delta}}$

параметри	$\alpha_2 = \mu = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_1 = \beta_3 = 1, \lambda = \alpha_0,$ $\beta_0 = \alpha_0(\gamma_0 - 2\delta_3), \tilde{\boldsymbol{\delta}} = \alpha_0\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_3\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0, \alpha_0 \neq 0,$ $2\delta_3 - \gamma_0 \neq 0, \{\gamma_0 - \alpha_0\beta_0 - \gamma_0\beta_0, \gamma_0^2(2\delta_3 - \gamma_0)\} \subset R$
$f(x)$	$\frac{1}{16(e^x + \alpha_0)}[(-4\beta_0^2 - 3)e^{2x} + 4(-\alpha_0 + 2\gamma_0 -$ $2\alpha_0\beta_0 - 2\gamma_0\beta_0)e^x - 4(\alpha_0^2 + \gamma_0^2)]$
$g(x)$	$\frac{1}{2(e^x + \alpha_0)}(\alpha_0 e^{2x} + (\alpha_0^2 + 1)e^x + \alpha_0)(2\delta_3 - \gamma_0)$
$\mathbf{a}$	$(2\delta_3 - \gamma_0)\tilde{\boldsymbol{\beta}} + 2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

параметри	$\alpha_2 = \mu = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_1 = \beta_3 = 1, \lambda = \alpha_0,$ $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \frac{\beta_0}{\gamma_0}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0, \alpha_0 \neq 0, \gamma_0 \neq 0, \{\beta_0,\ \gamma_0,$ $\gamma_0 - \alpha_0\beta_0 - \gamma_0\beta_0\} \subset R$
$f(x)$	$\frac{1}{16(e^x + \alpha_0)}[(-4\beta_0^2 - 3)e^{2x} + 4(\alpha_0 + 2\gamma_0 -$ $2\alpha_0\beta_0 - 2\gamma_0\beta_0)e^x - 4(\alpha_0^2 + \gamma_0^2)]$
$g(x)$	$\frac{1}{2(\gamma_0 e^x + \alpha_0\gamma_0)}[\beta_0 e^{2x} + (\alpha_0\beta_0 + \gamma_0)e^x + \alpha_0\gamma_0]$
$\mathbf{a}$	$-\gamma_0\tilde{\boldsymbol{\beta}} + 2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

параметри	$\alpha_2 = \mu = 0, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}, \alpha_1 = \lambda^2\delta_3^2 = 1, \lambda = \alpha_0,$ $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \lambda\tilde{\boldsymbol{\delta}}, \alpha_0 \neq 0, \{\delta_3, \beta_0, \gamma_0\} \subset R$
$f(x)$	$\frac{1}{16(e^x+\alpha_0)}[(-4\beta_0^2-3)e^{2x}+4(\alpha_0+2\gamma_0-$ $2\alpha_0\beta_0-2\gamma_0\beta_0)e^x-4(\alpha_0^2+\gamma_0^2)]$
$g(x)$	$\frac{\delta_3}{2(e^x+\alpha_0)}[(2-\alpha_0(\beta_0+2\alpha_0\delta_3^2))e^{2x}+$ $((-\beta_0\alpha_0-2\alpha_0^2\delta_3^2-\gamma_0+2\alpha_0\delta_3^2)\alpha_0+2\alpha_0)e^x$ $+(-\gamma_0\alpha_0+2\alpha_0^2\delta_3^2-2\alpha_0\delta_3^2)\alpha_0+2]\delta_3$
a	$\tilde{\boldsymbol{\delta}}$

параметри	$\mu = \lambda = \alpha_0 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_1 = \beta_3 = 1, \beta_0 = \frac{\delta_1\gamma_0}{\delta_1+\varepsilon},$ $\beta_0 \neq 0, \delta_3 \neq 0, \beta_0-\gamma_0 \neq 0, \gamma_0 \neq 0, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq \mathbf{0}, \{\gamma_0, \beta_0\} \subset R$
$f(x)$	$\frac{1}{16e^x}[-(4\beta_0^2+3)e^{2x}+8(\gamma_0-\gamma_0\beta_0)e^x-4\gamma_0^2]$
$g(x)$	$\frac{1}{2e^x}\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon}e^{2x}+1\right)(\beta_0-\gamma_0)$
a	$(\beta_0-\gamma_0)\tilde{\boldsymbol{\beta}}+2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

параметри	$\mu = \lambda = \alpha_0 = \alpha_2 = \beta_0 = 0, \alpha_1 = 1, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}, (\tilde{\boldsymbol{\delta}}\tilde{\boldsymbol{\beta}})^2 = \delta_3^2,$ $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = (\tilde{\boldsymbol{\delta}}\tilde{\boldsymbol{\beta}})\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \{\gamma_0, \delta_3\} \subset R$
$f(x)$	$\frac{1}{16e^x}[-3e^{2x}+8\gamma_0e^x-4\gamma_0^2]$
$g(x)$	$\frac{1}{2}[2(\tilde{\boldsymbol{\delta}},\tilde{\boldsymbol{\beta}})-\gamma_0]$
a	$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$

параметри	$\mu = \alpha_2 = \beta_0 = 0, \lambda = \alpha_0, \alpha_1 = 1, \tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\beta_1, i\beta_1, 1),$ $\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \delta_3\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}, \lambda \neq 0, (\gamma_0+2\delta_3)^2 > 0$
$f(x)$	$\frac{1}{16(e^x+\alpha_0)}[-3e^{2x}+4(1-2\lambda+2\gamma_0)e^x-4(\lambda^2+\gamma_0^2)]$
$g(x)$	$\frac{1}{2}(2\delta_3-\gamma_0)]$
a	$-\frac{\gamma_0+2\delta_3}{2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

Якщо функція $g(x) = 0$, то потенціал (24) є скалярний.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zaslavskii O. B., Ulyanov V. V. *New classes of exact solutions of the Schrödinger equation and potential-field description of spin systems* // Soviet Phys. JETP. – 1984. – V.60, №5. – P.991–996.

2. Turbiner A. V. *Quasi-exactly-solvable problems and* sl(2) *algebra* // Comm. Math. Phys. – 1988. – V.118, №3. – P.467–474.
3. Shifman M. A. *New findings in quantum mechanics (partial algebraization of the spectral problem)* // Internat. J. Modern Phys. A. – 1989. – V.4, №12. – P.2897–2952.
4. Shifman M. A., Turbiner A. V. *Quantal problems with partial algebraization of the spectrum* // Comm. Math. Phys. – 1989. – V.126, №2. – P.347–365.
5. González-López A., Kamran N., Olver N. *Quasi-exactly solvable Lie algebras of differential operators in two complex variables* // J. Phys. A. – 1991. – V.24, №17. – P.3995–4008.
6. González-López A., Kamran N., Olver N. *New quasi-exactly solvable Hamiltonians in two dimensions* // Comm. Math. Phys. – 1994. – V.159, №3. – P.503–537.
7. Ushveridze A. G. Quasi–exactly Solvable Models in Quantum Mechanics. – Bristol: IOP Publishing, 1993.
8. Finkel F., González-López A., Rodríguez M. A. *Quasi-exactly solvable spin* 1/2 *Schrödinger operators* // Preprint hep-th/9509057, 1995.
9. Zhdanov R. Z. *On algebraic classification of quasi-exactly solvable matrix models* // J. Phys. A. – 1997. – V.30, №24. – P.8761–8770.
10. Turbiner A. V. *Lie algebras and linear operators with invariant subspaces. Lie algebras, cohomology and new applications to quantum mechanics* // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1994. – V.160. – P.263–310.
11. Brihaye Y., Giller S., Gonera C., Kosiński P. *The structure of quasi-exactly solvable systems* // J. Math. Phys. – 1995. – V.36, №8. – P.4340–4349.
12. Finkel F., González-López A., Rodríguez M. A. *Quasi-exactly solvable spin* 1/2 *Schrödinger operators* http://194.67.23.76// J. Phys. A. – 1997. – V.30, №19. – P.6879–6892.
13. Абраменко А. О. *Matrix realizations of four-dimensional Lie algebras and corresponding invariant spases* // Вісник Київського університету, Сер.: фіз.-мат. науки. – 1999. – №3. – P.11–17.
14. Spichak S., Zhdanov R. *On algebraic classification of Hermitian quasi-exactly solvable matrix Schrödinger operators on line* // J. Phys. A. – 1999. – V.32, №20. – P.3815–3831.

Полтавський Педагогічний інститут, інститут математики НАН України.

Надійшло 31.01.2000