УДК 513.6

В. І. Андрійчук

НЕВИРОДЖЕНИЙ ДОБУТОК В ЯДРАХ ЛОКАЛІЗАЦІЙ НАД ПСЕВДОГЛОБАЛЬНИМИ ПОЛЯМИ

V. I. Andriychuk. *Nondegenerate product in the kernels of localisation over pseudoglobal fields*, Matematychni Studii, **15** (2001) 3–8.

Let K be an algebraic function field in one variable over a pseudofinite constant field, V^K the set of all the valuations of K (which are trivial on constant field), K_v be the completion of K at $v \in V^K$, K_{sep} denote a separable closure of K, $G_K = \mathrm{Gal}(K_{sep}/K)$. Let M be a finite G_K-module and $M^D = \mathrm{Hom}(M, K_{sep}^*)$ be its dual, $Ш^i(M) = \mathrm{Ker}(H^i(K,M) \to \prod_{v\in V^K} H^i(K_v, M))$ the kernels of localisation maps. It is proved that the groups $Ш^i(M)$, $i = 1,2$, are finite and there is a nondegenerate pairing $Ш^1(M) \times Ш^2(M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

В. И. Андрийчук. *Невыродженное произведение в ядрах локализаций над псевдоглобальными полями* // Математичні Студії. – 2001. – Т.15, №1. – С.3–8.

Пусть K — поле алгебраических функций от одной переменной над псевдолокальним полем констант, V^K — множество всех нормирований поля K (тривиальных на поле констант), K_v — пополнение поля K относительно нормирования $v \in V^K$, K_{sep} — сепарабельное замыкание поля K, $G_K = \mathrm{Gal}(K_{sep}/K)$. Пусть M - конечный G_K — модуль и $M^D = \mathrm{Hom}(M, K_{sep}^*)$ — двойственный модуль, $Ш^i(M) = \mathrm{Ker}(H^i(K,M) \to \prod_{v\in V^K} H^i(K_v, M)$ — ядра гомоморфизмов локализации. Доказано, что группы $Ш^i(M)$, $i = 1,2$, — конечны и существует невырожденное спаривание $Ш^1(M) \times Ш^2(M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Для поля K, наділеного множиною нормувань V^K, ми позначаємо K_v — поповнення поля K відносно нормування $v \in V^K$. Нехай $G_K = \mathrm{Gal}(K_{sep}/K)$ — група Галуа сепарабельного замикання K_{sep} поля K, M — скінченний G_K — модуль і $M^D = \mathrm{Hom}(M, K_{sep}^*)$ — дуальний модуль. M і M^D є G_{K_v} — модулями, де G_{K_v} — група Галуа сепарабельного замикання поля K_v, і визначені гомоморфізми локалізації

$$\alpha_i : H^i(K, M) \to \prod_{v\in V_K} H^i(K_v, M), \quad \tilde{\alpha}_i : H^i(K, M^D) \to \prod_{v\in V_K} H^i(K_v, M^D)$$

(детальніше з означеннями цих гомоморфізмів можна ознайомитися за книгою [1], Розд. II, п. 6.).

Позначимо $Ш^i(M) = \mathrm{Ker}\,\alpha_i$, $Ш^i(M^D) = \mathrm{Ker}\,\tilde{\alpha}_i$.

У випадку, коли поле K є глобальним (тобто скінченним розширенням поля раціональних чисел або полем функцій на алгебраїчній кривій, визначеній над скінченним

2000 *Mathematics Subject Classification:* 11E72, 14G99, 20G10.

полем), Дж. Тейтом [2] доведено, що $Ш^i(M)$ та $Ш^i(M^D)$, i=1,2, є скінченними групами і існує невироджений добуток

$$Ш^1(M) \times Ш^2(M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad (1)$$

так, що групи $Ш^1(M)$ та $Ш^2(M^D)$ є групами характерів одна одної. Детальне формулювання результатів Тейта, що зв'язані з добутком (1) можна знайти у [1,2], а доведення згаданих результатів — у [3,4].

Мета цієї статті — показати, що двоїстість (1) залишається вірною і у випадку полів алгебраїчних функцій на кривих, визначених над псевдоскінченними [5] полями. Ми називаємо такі поля псевдоглобальними полями. Нам буде потрібний наслідок з наступної, доведеної Д. Рімом і Г. Уеплзом [6], теореми.

Теорема А (Д. Рім, Г. Уеплз). *Нехай X — проективна, гладка крива над квазіскінченним полем k і нехай $K = k(X)$ — поле функцій на кривій X. Існує точна послідовність*

$$0 \longrightarrow H^1(k, J_X(\bar{k})) \longrightarrow Br K \longrightarrow \bigoplus_{v\in V^K} Br K_v \xrightarrow{inv_K} Q/\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

де $\bar{k}$ — алгебраїчне замикання поля k, $J_X(\bar{k})$ — група $\bar{k}$- точок якобіана J_X кривої X, $Br K$ та $Br K_v$ — групи Брауера полів K та K_v.

Якщо $H^1(k', J_X(\bar{k})) = 0$ для всіх скінченних розширень k'/k, то класи іделів поля K утворюють формацію класів.

Доведення цього результату можна знайти або в [6] або в книзі Дж. Мілна [3], с. 161–164.

Майже безпосередньо з означення псевдоскінченного поля, з інтерпретації елементів групи $H^1(k, J_X(\bar{k}))$ як групи класів ізоморфних головних однорідних просторів для J_X та з теореми А впливає наступний наслідок.

Наслідок. *Для псевдоглобального поля K існує точна послідовність*

$$0 \longrightarrow Br K \longrightarrow \bigoplus_{v\in V^K} Br K_v \longrightarrow Q/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Ми розглядаємо скінченний G_K-модуль M, де G_K — група Галуа сепарабельного замикання псевдоглобального поля K. Вважаємо, що порядок модуля M взаємно простий з характеристикою поля K. Якщо L/K — скінченне розширення Галуа, над яким модуль M стає сталим, то, як доведено в [7], [8], $Ш^1(L, M) = 0$ і $Ш^1(K, M) = Ш^1(L/K, M)$. З наступної леми випливає, що подібні твердження вірні і для групи $Ш^2$.

Лема. *Нехай L/K — скінченне розширення Галуа таке, що M є сталим G_L-модулем. Тоді для $1 \le i \le 2$: 1) $Ш^i(L, M) = 0$; 2) $Ш^i(M) = Ш^i(L/K, M)$.*

Доведення. Перевіримо спочатку, що $Ш^2(\mu_n) = 0$, де μ_n — група коренів n-го степеня з 1. Це випливає з наступної комутативної діаграми з точними рядками і стовпцями

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Ш^2(\mu_n) & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & H^2(K, \mu_n) & \longrightarrow & H^2(K, K^*_{sep}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \prod_{v\in V^K} H^2(K_v, \mu_n) & \longrightarrow & \prod_{v\in V^K} H^2(K_v, K^*_{sep})
\end{array}$$

У цій діаграмі рядки точні за теоремою Гільберта 90, а точність другого стовпця випливає з наслідку теореми A.

Якщо, тепер, M довільний сталий G_K-модуль, то можна вважати, що M є прямою сумою модулів μ_{n_i}, де G_K діє тривіально на всіх μ_{n_i}. Звідси випливає, що $\text{Ш}^2(M) = 0$.

2) Нехай $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, $G^v = \mathrm{Gal}(L_w/K_v)$, де w деяке зафіксоване продовження v на поле L. Розглянемо точні послідовності Хохшільда-Серра, які відповідають розширенням L/K та L_w/K_v.

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^1(G,M) \longrightarrow H^1(K,M) \longrightarrow H^1(L,M)^G \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(G,M) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ker}(H^2(K,M) \longrightarrow H^2(L,M)^G) \end{array}, \tag{2}$$

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^1(G^v,M) \longrightarrow H^1(K_v,M) \longrightarrow H^1(L_w,M)^{G^v} \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(G^v,M) \xrightarrow{\beta_v} \mathrm{Ker}(H^2(K_v,M) \longrightarrow H^2(L_w,M)^{G^v} \end{array}. \tag{3}$$

Нехай $B_1 = \mathrm{Im}\,\beta$, $B_1^v = \mathrm{Im}\,\beta_v$. Розглянемо наступну комутативну діаграму з точними рядками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & H^2(K,M) & \longrightarrow & H^2(L,M)^G \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha|B_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & \prod_{v\in V^K} H^2(K_v,M) & \longrightarrow & \prod_{v\in V^K} H^2(L_w,M)^{G^v} \end{array}, \tag{4}$$

де $C_1 = \prod_{v\in V^K} B_1^v$, $\alpha|_{B_1}$ — обмеження гомоморфізму локалізації α на підгрупу B_1. Правий вертикальний гомоморфізм діаграми (4) ін'єктивний за доведеним. Тому звідси одержуємо, що $\text{Ш}^2(M) = \mathrm{Ker}\,\alpha = \mathrm{Ker}\,\alpha|_{B_1}$.

Тепер, враховуючи точні послідовності (2) і (3), запишемо ще одну комутативну діаграму з точними рядками:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(L,M)^G & \longrightarrow & H^2(G,M) & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha|_{B_1}} & & \\ \prod_{v\in V^K} H^1(L_w,M)^{G^v} & \longrightarrow & \prod_{v\in V^K} H^2(G^v,M) & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5}$$

Оскільки, згідно зауваження перед формулюванням леми $\text{Ш}^1(L,M) = 0$, то діаграма (5) показує, що

$$\text{Ш}^2(K,M) = \mathrm{Ker}\,\alpha|_{B_1} = \text{Ш}^2(L/K,M),$$

що і потрібно довести. □

Теорема. *Нехай K — псевдоглобальне поле, M — скінченний G_K-модуль, порядок якого взаємно простий з характеристикою поля K. Існує невироджений добуток*

$$\text{Ш}^1(M) \times \text{Ш}^2(M^D) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \tag{6}$$

тому скінченні групи $\text{Ш}^1(M)$ та $\text{Ш}^2(M^D)$ є групами характерів одна одної.

Доведення. Зазначимо, що у випадку глобального основного поля K результат теореми доведений Тейтом [2]. Для доведення теореми ми використаємо міркування, звязані з алгебраїчними торами та теоремою Тейта-Накаями. Схожі міркування використовувались М. І. Башмаковим [4] для доведення двоїстості (6) у випадку, коли поле K є числовим та А. В. Яковлєвим у статті [9]. З леми випливає, що досить довести існування невиродженого добутку: $\text{Ш}^1(L/K,M)\times\text{Ш}^2(L/K,M^D)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, де L/K — скінченне розширення Галуа, над яким модуль M стає сталим. Розглянемо точну послідовність $G=\mathrm{Gal}(L/K)$-модулів

$$0 \longrightarrow T_1^D \longrightarrow \mathbb{Z}[M^D] \xrightarrow{s} M^D \longrightarrow 0, \tag{7}$$

в якій $M^D=\mathrm{Hom}(M,L^*)$, гомоморфізм s індукований додаванням в M^D, $T_1^D=\mathrm{Ker}\, s$. У двоїстій до послідовності (7) точній послідовності

$$1 \longrightarrow M \longrightarrow T \longrightarrow T_1 \longrightarrow 1$$

G-модулі T і T_1 є торами. Можна вважати, що тори T та T_1 розщеплюються у полі L. Оскільки G-модуль $\mathbb{Z}[M^D]$ є пермутаційним (тобто група G діє на його $\mathbb{Z}$-базі перестановками), то $H^1(G,T)=0$ (див.[10]), і ми маємо точну послідовність когомологій Галуа

$$0 \longrightarrow H^1(G,T_1) \longrightarrow H^2(G,M) \xrightarrow{\gamma} H^2(G,T). \tag{8}$$

Розглянемо ще одну точну послідовність

$$1 \longrightarrow L^* \longrightarrow J_L \longrightarrow C_L \longrightarrow 1,$$

у якій J_L та C_L, відповідно, групи іделів та класів іделів поля L. Запишемо відповідну точну послідовність когомологій

$$H^1(G,C(T)) \longrightarrow H^2(G,T) \longrightarrow \textstyle\sum_{v\in V^K} H^2(G^v,T). \tag{9}$$

Тут $H^1(G,C(T))=H^1(G,\mathbb{Z}[M^D])=0$ за твердженням в) теореми 2 з [11], позаяк $\mathbb{Z}[M^D]=\hat{T}$. Далі, послідовність

$$\textstyle\sum_{v\in V^K} H^1(G^v,T_1) \longrightarrow \sum_{v\in V^K} H^2(G^v,M) \longrightarrow \sum_{v\in V^K} H^2(G^v,T) \tag{10}$$

($G^v=\mathrm{Gal}(L_w/K_v)$, w — зафіксоване продовження нормування v на поле L) теж точна. За твердженням а) теореми 2 з [11] $H^1(G^v,T_1)\cong H^1(G^v,T_1^D)$. Покажемо, що $H^1(G^v,T_1^D)=0$. Справді, $\mathbb{Z}[M^D]$ є пермутаційним G^v-модулем, тому $H^1(G^v,\mathbb{Z}[M^D])$ $=0$, і ми маємо точну послідовність когомологій

$$\mathbb{Z}[M^D]^{G^v} \xrightarrow{\xi} (M^D)^{G^v} \longrightarrow H^1(G^v,T_1^D) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

відповідну точній послідовності (7). Гомоморфізм ξ в (11) є, очевидно, епіморфізмом, звідки $H^1(G^v,T_1^D)=0$. Тому, точні послідовності (8), (9) і (10) можна включити в комутативну діаграму:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(G,T_1) \arrow[r] & H^2(G,M) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] & H^2(G,T) \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & \prod_{v\in V^K} H^2(G^v,M) \arrow[r] & \prod_{v\in V^K} H^2(G^v,T)
\end{tikzcd},$$

з якої бачимо, що $Ш^2(L/K, M) = \operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\gamma \cong H^1(G, T_1)$.

Для обчислення $Ш^1(L/K, M^D)$ випишемо дві комутативні діаграми, одержані А. В. Яковлевим [9] у випадку числового поля K. Ці діаграми (12) і (13) є правильними і у випадку псевдоглобального поля K, завдяки існуванню аналогу теореми Тейта-Накаями (теорема 2 в [11]) для торів над псевдоглобальним полем.

По-перше , існують ізоморфізми τ і $\hat{\tau}$ такі, що комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} H^{i-2}(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, \bar{Z})) & \xrightarrow{\bar{\mu}_{i-2}} & H^{i-2}(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, \mathbb{Z})) \\ \big\downarrow \hat{\tau} & & \big\downarrow \tau \\ H^i(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, J_L)) & \xrightarrow{\alpha_i^*} & H^i(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, C_L)) \end{array}, \tag{12}$$

в якій $\bar{Z}$ означає пряму суму $\bigoplus_{v \in V^K} \mathbb{Z}[G/G^v]$, $\bar{\mu}_{i-2}$ індукується гомоморфізмом $\bar{Z} \to \mathbb{Z}$, який ставить у відповідність елементу $z \in \bar{Z}$ суму всіх його коефіцієнтів, α_i^* індукується природнім гомоморфізмом $J_L \to C_L$, τ — гомоморфізм Тейта-Накаями, що ставить у відповідність елементу a $\cup$-добуток $a \cup u_{L/K}$, де $u_{L/K} \in H^2(G, C_L)$ з $\operatorname{inv}_{L/K}(u_{L/K}) = \frac{1}{m}$, де $m = [L : K]$.

По-друге, маємо наступну комутативну діаграму з точними стовпцями

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & & H^1(G, M^D) & \xrightarrow{\mu_1} & H^1(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bar{Z}, M^D)) \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & & H^2(G, T_1^D) & \xrightarrow{\mu_2} & H^2(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bar{Z}, T_1^D)) \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^2(G, \mathbb{Z}[M^D]) & \longrightarrow & H^2(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bar{Z}, \mathbb{Z}[M^D])) \end{array}. \tag{13}$$

У діаграмі (13) гомоморфізм μ_1 і μ_2 індуковані щойно означеним гомоморфізмом $\bar{Z} \to \mathbb{Z}$, (зазначимо, що $M^D = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, M^D)$ і так само для T_1^D та $\mathbb{Z}[M^D]$). Покладаючи в (12) $i = 0$, одержуємо

$$\operatorname{Coker}\alpha_0^* \cong \operatorname{Coker}\bar{\mu}_{-2}. \tag{14}$$

Далі, гомоморфізм $\bar{\mu}_{-2}$ індукує гомоморфізм груп характерів ($m = |G| = [L : K]$)

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{-2}(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, \mathbb{Z})), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{\mu}_{-2}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{-2}(G, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, \bar{Z})), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\cdot$$

Враховуючи, що (як і в [9])

$$\operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{-2}(G, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, \bar{Z})), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong H^2(G, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bar{Z}, T_1^D)),$$

$$\operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{-2}(G, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1, \mathbb{Z})), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong H^2(G, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, T_1^D)),$$

одержуємо згідно з [9], що гомоморфізм $\tilde{\mu}_{-2}$ можна ототожнити з гомоморфізмом μ_2 з діаграми (13). Звідси маємо

$$\operatorname{Ker}\tilde{\mu}_{-2} = \operatorname{Ker}\mu_2. \tag{15}$$

Звернемось тепер до гомоморфізму μ_1 з діаграми (13). З обчислень, наведених А. В. Яковлєвим у [9, с. 221], випливає, що

$$\operatorname{Ker}\mu_1 \cong Ш^1(L/K, M^D). \tag{16}$$

Діаграма (13) показує, що

$$\operatorname{Ker}\mu_1 \cong \operatorname{Ker}\mu_2. \tag{17}$$

Тепер , використовуючи ізоморфізми (14)–(17), одержуємо

$$Ш^1(L/K, M^D) \cong \operatorname{Ker}\mu_2 \cong \operatorname{Ker}\tilde{\mu}_{-2} \cong (\operatorname{Coker}\overline{\mu}_{-2})^* \cong (\operatorname{Coker}\alpha_0^*)^*,$$

де через $(A)^*$ позначена група характерів $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ групи A.

З іншого боку,

$$\operatorname{Coker}\alpha_0^* \cong \operatorname{Ker}(H^1(G, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, L^*)) \to H^1(G, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, J_L)) \cong$$

$$\cong \operatorname{Ker}(H^1(G, T_1) \to \bigoplus_{v\in V^K} H^1(G^v, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, L_w^*)) \cong H^1(G, T_1),$$

тому, що

$$H^1(G^v, \operatorname*{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_1^D, L_w^*)) = H^1(G^v, T_1(L_w)) \cong H^1(G^v, T_1^D)$$

за твердженням а) теореми 1 з [11], а рівність $H^1(G^v, T_1^D) = 0$ доведена вище.

Остаточно маємо $Ш^1(L/K, M^D) \cong (H^1(G, T_1))^*$, і тому , враховуючи, що за доведеним вище, $Ш^2(L/K, M) \cong H^1(G, T_1)$, одержуємо двоїстість, сформульовану в теоремі. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. – М.: Мир, 1968. – 208 с.
2. Tate J. *Duality theorems in Galois cohomology over number fields* // Proc. Int. Cong. Math., Stockholm. – 1962. – P.288–295.
3. Milne J. S. Arithmetic Duality Theorems. – Academic Press, Inc. 1986. – 422 pp.
4. Башмаков М. М. *Когомологии абелевых многообразий над числовым полем,* // Успехи мат. наук. – 1972. – Т.27, №6. – С.25–66.
5. Ax J. *The elementary theory of finite field* // Ann. Math. – 1968. – V.88, no. 2. – P.239–271.
6. Rihm D. S., Whaples G. *Global norm – residue map over quasifinite fields* // Nagoya Math. J. – 1966. – V.27, no. 1. – P.323–329.
7. Андрійчук В. І. *Когомології Галуа скінченних модулів над псевдоглобальними полями* // Вісник держ. у-ту "Львівська політехніка". – 1998. – №337. – С.5–7.
8. Андрійчук В. І. *Скінченні модулі над псевдоглобальними полями* // Вісник Київського університету, сер. фіз.-мат. – 2000. – Вип.1. – С.23–26.
9. Яковлев А. В. *Задача погружения для числовых полей* // Изв. АН СССР, сер.матем. – 1967. – Т.31, №2. – С.211–224.
10. Воскресенский В. Е. Алгебраические торы. – М.: Мир, 1968. – 223 с.
11. Andriychuk V. *On the algebraic tori over some function fields* // Матем. студії. – 1999. – Т.12, №2. – P.115–126.

Львівський національний університет, механіко-математичний факультет

Надійшло 29.06.1999