

УДК 517.51

В. В. МИХАЙЛЮК

ТОПОЛОГІЯ НАРІЗНОЇ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ СЕРПІНСЬКОГО

V. V. Myhaylyuk. *Separate continuity topology and a generalization of Sierpinski's theorem*, Matematychni Studii, 14 (2000) 193–196.

The separate continuity topology is considered and some its properties are investigated. With help of these properties a generalization of Sierpinski theorem on determination of a real separately continuous function by its values on a dense set is obtained.

В. В. Михайлюк. *Топология раздельной непрерывности и одно обобщение теоремы Серпинского* // Математичні Студії. – 2000. – Т.14, №2. – С.193–196.

Рассматривается топология раздельной непрерывности и исследуются некоторые её свойства, с помощью которых обобщается теорема Серпинского о том, что действительная раздельно непрерывная функция полностью определяется своими значениями на произвольном плотном множестве.

Відомо, що кожна неперервна функція f , яка діє з топологічного простору X в гаусдорфовий простір Y повністю визначається своїми значеннями на довільній всюди щільній множині в X . Природно виникає питання: коли такою ж властивістю володіють функції, що задовольняють умови ослабленої неперервності, наприклад, нарізно неперервні функції? Вперше цю задачу розв'язав Серпінський [1], показавши, що нарізно неперервна функція $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно визначається своїми значеннями на всюди щільній множині. Подальший розвиток цього результату тісно пов'язаний з дослідженнями множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень і встановленням властивостей сукупної ослабленої неперервності. Так, Пьотровський і Вінєлер в [2] встановили, що якщо кожна нарізно неперервна функція з добутку $X = X_1 \times \dots \times X_n$ в цілком регулярний простір Z є ледь неперервною, то кожна нарізно неперервна функція $f: X \rightarrow Z$ визначається своїми значеннями на довільній всюди щільній підмножині простору X . Нагадаємо, що функція називається ледь неперервною, якщо непорожній прообраз відкритої множини обов'язково має непорожню внутрішність. Оскільки кожна квазінеперервна функція є ледь неперервною, то, зокрема, з результату роботи [3] випливає, що якщо X — берів простір, Y — задовольняє першу аксіому зліченності і Z — цілком регулярний, то кожна нарізно неперервна функція $f: X \times Y \rightarrow Z$ визначається своїми значеннями на довільній всюди щільній в $X \times Y$ множині.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 54C08.

У цій статті ми, ввівши поняття топології нарізної неперервності і дослідивши її властивості, покажемо, що в останньому результаті умову цілковитої регулярності простору Z можна послабити.

Нехай X і Y — топологічні простори. Позначимо через $\mathcal{S}$ сукупність усіх підмножин S добутку $X \times Y$, які володіють наступною властивістю: якщо $(x_0, y_0) \in S$, то існують такі околи U точки x_0 і V точки y_0 в просторах X і Y відповідно, що $(\{x_0\} \times V) \cup (U \times \{y_0\}) \subseteq S$. Зрозуміло, що система $\mathcal{S}$ утворює деяку топологію на множині $X \times Y$, при цьому для довільного топологічного простору Z функція $f: X \times Y \rightarrow Z$ є неперервною в цій топології тоді і тільки тоді, коли f є нарізно неперервною. Цю топологію ми назвемо *топологією нарізної неперервності* або *s-топологією*. Для множини $A \subseteq X \times Y$ її замикання в s-топології ми позначатимемо через $[A]_s$.

Нагадаємо, що π -характером $\pi_\chi(x, X)$ топологічного простору X в точці $x \in X$ називається найменша потужність такої сім'ї $\mathcal{U}$ відкритих непорожніх множин $U \subseteq X$, що для кожного околу V точки x існує такий елемент $U \in \mathcal{U}$, що $U \subseteq V$. Відповідно π -характером простору X називається кардинал $\pi_\chi(X) = \sup_{x \in X} \pi_\chi(x, X)$. Зрозуміло, що простір з першою аксіомою зліченності має не більш ніж зліченний π -характер.

Почнемо з результату, який показує, що топологія нарізної неперервності тісно пов'язана з топологією добутку.

Теорема 1. *Нехай X — берів простір, Y — топологічний простір з не більш ніж зліченим π -характером, H — s-відкрита множина в $X \times Y$. Тоді існує відкрита в добутку $X \times Y$ множина G така, що $[G]_s = [H]_s$.*

Доведення. Покладемо $F = [H]_s$, $G = \text{int} F$. Зрозуміло, що $G \subseteq F$, тому $[G]_s \subseteq [F]_s = F$.

Покажемо тепер, що $F \subseteq [G]_s$. Нехай $(x_0, y_0) \in H$ і W — довільний відкритий s-окіл точки (x_0, y_0) . Оскільки множина H — s-відкрита, то існує такий відкритий окіл U точки x_0 в просторі X , що $U \times \{y_0\} \subseteq H \cap W$. Простір Y має не більш ніж зліченний π -характер, тому існує зліченна сім'я $(V_n : n \in \mathbb{N})$ відкритих непорожніх множин в Y , яка забезпечує не більш ніж зліченність π -характеру простору Y в точці y_0 . Покладемо $A_n = \{x \in U : \{x\} \times V_n \subseteq H \cap W\}$. Множина $H \cap W$ є s-відкритою, тому для кожного $x \in U$ існує такий окіл V точки y_0 в просторі Y , що $\{x\} \times V \subseteq H \cap W$, отже, існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $x \in A_n$. Тобто $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U$. Але X — берів простір, тому існують $n_0 \in \mathbb{N}$ і відкрита в X непорожня множина $U_1 \subseteq U$ такі, що $U_1 \subseteq \bar{A}$, де $A = A_{n_0}$. Позначимо $V_1 = V_{n_0}$. Візьмемо довільну точку $(x_1, y_1) \in U_1 \times V_1$ і довільний її s-окіл W_1 . Існує такий окіл U_2 точки x_2 , що $U_2 \times \{y_1\} \subseteq W_1$. Зауважимо, що $U_2 \cap A \neq \emptyset$, тому $(U_2 \times \{y_1\}) \cap (A \times V_1) \neq \emptyset$, отже, $W_1 \cap (A \times V_1) \neq \emptyset$. Звідси, $(x_1, y_1) \in [A \times V_1]_s$, тобто $U_1 \times V_1 \subseteq [A \times V_1]_s$. Але $A \times V_1 \subseteq H$, і отже, $U_1 \times V_1 \subseteq [H]_s = F$. А це означає, що $U_1 \times V_1 \subseteq \text{int}(F) = G$. Зокрема, $A_1 \times V_1 \subseteq G$, де $A_1 = A \cap U_1$. Крім того, $A_1 \times V_1 \subseteq A \times V_1 \subseteq H \cap W \subseteq W$. Тому $G \cap W \neq \emptyset$, тобто $(x_0, y_0) \in [G]_s$. Отже, $H \subseteq [G]_s$, $F = [H]_s \subseteq [G]_s$ і теорему доведено. $\square$

За допомогою цього результату легко одержуємо наступне узагальнення теореми Серпінського для випадку нарізно неперервних відображень двох змінних.

Теорема 2. *Нехай X — берів простір, Y — топологічний простір з не більш ніж зліченим π -характером, Z — топологічний простір, в якому кожні дві точки відокремлюються замкненими околами. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f: X \times Y \rightarrow Z$ однозначно визначається своїми значеннями на щільній в добутку $X \times Y$ множині.*

Доведення. Нехай $f: X \times Y \rightarrow Z$ і $g: X \times Y \rightarrow Z$ — нарізно неперервні функції такі, що $f|_A = g|_A$, де A — деяка щільна в $X \times Y$ множина. Доведемо, що $f = g$.

Нехай це не так. Тобто існує така точка $p \in X \times Y$, що $z_1 = f(p) \neq g(p) = z_2$. Візьмемо такі відкриті околи W_1 і W_2 відповідно точок z_1 і z_2 в просторі Z , що $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \emptyset$. Множини $H_1 = f^{-1}(W_1)$ і $H_2 = g^{-1}(W_2)$ є s -відкритими околами точки p , тому множина $H = H_1 \cap H_2$ є непорожньою і s -відкритою. Оскільки $F = [H]_s \subseteq [H_1]_s \cap [H_2]_s$, то $f(F) \subseteq f([H_1]_s) \subseteq \overline{W_1}$ і $g(F) \subseteq g([H_2]_s) \subseteq \overline{W_2}$. За теоремою 1 в добутку $X \times Y$ існує така відкрита множина G , що $[G]_s = F$. Маємо $f(G) \subseteq \overline{W_1}$ і $g(G) \subseteq \overline{W_2}$, тому $f(G) \cap g(G) = \emptyset$. Але оскільки $f|_A = g|_A$, то $G \cap A = \emptyset$, що неможливо. $\square$

У цих міркуваннях використовується формально дещо слабший результат ніж теорема 1. А саме, достатньо було б мати, що $\text{int}(F) \neq \emptyset$. Але, врахувавши, що це твердиться для довільної s -відкритої множини H , легко бачити, що ця різниця у висновках носить чисто формальний характер. Виходячи з цього, логічно було би запитати чи обов'язково $\text{int}(H) \neq \emptyset$? Або, що те ж саме, чи кожна щільна в $X \times Y$ множина є s -щільною? Позитивна відповідь на це питання негайно прояснила би природу описаної властивості нарізно неперервних функцій і дала би змогу в теоремі 2 послабити умову на простір Z до гаусдорфовості. Але як показує наступний результат відповідь на це питання негативна.

Теорема 3. Нехай X і Y — нескінченні T_1 -простори такі, що в добутку $X \times Y$ існує псевдобаза, потужність якої не перевищує потужності жодної з відкритих множин в просторах X і Y . Тоді існує щільна в $X \times Y$ множина C , яка є замкненою і ніде не щільною в топології нарізної неперервності.

Доведення. Без обмежень загальності можна вважати, що потрібна псевдобаза $\mathcal{P}$ складається з відкритих прямокутників. Нехай $|\mathcal{P}| = \mathbf{n}$, α — початковий ординал потужності $\mathbf{n}$, $\mathcal{P} = (P_\xi : \xi < \alpha)$, $P_\xi = U_\xi \times V_\xi$ для кожного $\xi < \alpha$, при цьому U_ξ і V_ξ — відкриті множини в X і Y відповідно. Побудуємо послідовність точок $(c_\xi = (a_\xi, b_\xi) : \xi < \alpha)$ таку, що

- (1) $c_\xi \in P_\xi$ для кожного $\xi < \alpha$;
- (2) $a_\beta \neq a_\gamma$ і $b_\beta \neq b_\gamma$ для довільних $\gamma < \beta < \alpha$.

Нехай $\beta < \alpha$ і точки c_ξ , $\xi < \beta$ вже побудовані. Множини $A = \{a_\xi : \xi < \beta\}$ і $B = \{b_\xi : \xi < \beta\}$ мають потужність меншу від $\mathbf{n}$. Згідно з умовою теореми, $|U_\beta| \geq \mathbf{n}$ і $|V_\beta| \geq \mathbf{n}$. Тому множини $U_\beta \setminus A$ і $V_\beta \setminus B$ є непорожніми. Виберемо довільні точки $a_\beta \in U_\beta \setminus A$ і $b_\beta \in V_\beta \setminus B$. Легко бачити, що послідовність $(c_\xi : \xi \leq \beta)$ задовольняє умови (1) та (2). Отже, на основі трансфінітної індукції, існує шукана послідовність.

Означимо $C = \{c_\xi : \xi < \alpha\}$. З умови (1) випливає, що множина C є щільною в добутку $X \times Y$. Умова (2) означає, що для довільної точки $(x, y) \in X \times Y$ множини $C^x = \{y' \in Y : (x, y') \in C\}$ і $C_y = \{x' \in X : (x', y) \in C\}$ є щонайбільше одноточковими в T_1 -просторах. Тому C^x і C_y є замкненими множинами в Y і X відповідно. Тобто, множина C є s -замкненою. Врахувавши, що простори X і Y не мають ізольованих точок, отримаємо, що множина C не є s -околом жодної своєї точки. Отже, C є ніде не щільною в топології нарізної неперервності. $\square$

Наслідок. Простір $(\mathbb{R}^2, s)$ не є регулярним.

Доведення. Нехай C щільна в $\mathbb{R}^2$ множина, яка є замкненою і ніде не щільною в топології нарізної неперервності. Візьмемо довільну s -відкриту множину $H \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus C$. Згідно з теоремою 1 існує відкрита в $\mathbb{R}^2$ множина G така, що $[H]_s = [G]_s$. Але $G \cap C \neq \emptyset$, тому $[H]_s \cap C \neq \emptyset$. Отже, $(\mathbb{R}^2, s)$ не є регулярним. $\square$

Зауважимо, що умова на простір Z теоремі 2 є слабшою ніж регулярність. Зокрема, простір $(\mathbb{R}^2, s)$ не є регулярним, але кожні дві точки в ньому відокремлюються замкненими околами. Крім того, як випливає з теорем 2 та 3 довільна неперервна функція на ньому повністю визначається своїми значеннями на деякій ніде не щільній множині.

Разом з тим природно запитати: чи можна в теоремі 2 послабити умову на простір Z до гаусдорфовості? Як зауважив рецензент негативну відповідь на це питання легко одержати використовуючи теорему 3. А саме, нехай $Z_1 = Z_2 = (\mathbb{R}^2, s)$, C — замкнена ніде не щільна множина в $(\mathbb{R}^2, s)$, яка є всюди щільною в $\mathbb{R}^2$ у звичайній топології, тобто множина, існування якої доведено в теоремі 3 і Z — простір, утворений склейкою по множині C просторів Z_1 і Z_2 , наділений природною фактор-топологією. Зрозуміло, що Z є гаусдорфовим. Але тотожні відображення $f_1: (\mathbb{R}^2, s) \rightarrow Z_1$ і $f_2: (\mathbb{R}^2, s) \rightarrow Z_2$ є неперервними як відображення в простір Z , які збігаються на множині C і відрізняються в інших точках.

На завершення цієї статті я хочу висловити щирі подяку В. К. Маслюченку за цінні поради і постійну увагу до даної роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sierpiński W. *Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables* // Publ. Math. Univ. Belgrade. — 1932. — V.1. — P.125–128.
2. Piotrowski Z., Winkler E.Y. *On Sierpiński's theorem on the determination of separately continuous functions* // Q&A in General Topology. — 1997. — V. 15. — 1997. — P.15–19.
3. Piotrowski Z. *Quasi-continuity and product spaces* // Proc. Intern. Geom. Top., Warszawa. — 1980. — P.349–352.

Чернівецький державний університет ім. Ю.Федьковича, кафедра математичного аналізу

Надійшло 21.09.1999

Після переробки 5.06.2000