УДК 512.546

Е. Г. Зеленюк

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И ТОПОЛОГИИ НА ГРУППАХ

E. G. Zelenyuk. *Extremal ultrafilters and topologies on groups*, Matematychni Studii, **14** (2000) 121–140.

We investigate ultrafilters related to Ramsey ultrafilters and P-points on extremally disconnected topological groups and some other topological groups with extremal properties. In particular, we prove that an ultrafilter p on an infinite Boolean group $\mathbb{B}$ is Ramsey if and only if the maximal group topology on $\mathbb{B}$ such that p converges to zero is extremally disconnected and p contains an independent subset.

Е. Г. Зеленюк. *Экстремальные ультрафильтры и топологии на группах* // Математичні Студії. – 2000. – Т.14, №2. – С.121–140.

Исследуются ультрафильтры, связанные с рамсеевскими ультрафильтрами и P-точками, на экстремально несвязных топологических группах и некоторых других топологических группах с экстремальными свойствами. В частности доказано, что ультрафильтр p на бесконечной булевой группе $\mathbb{B}$ рамсеевский тогда и только тогда, когда наибольшая групповая топология на $\mathbb{B}$, в которой p сходится к нулю, экстремально несвязна и p содержит независимое подмножество.

Введение

Под экстремальными топологиями на группах понимаются в первую очередь экстремально несвязные топологии, топологии с конечными полугруппами ультрафильтров и неразложимые топологии, а под экстремальными ультрафильтрами — ультрафильтры, связанные с рамсеевскими ультрафильтрами и P-точками.

Первый пример недискретной экстремально несвязной топологической группы построил С. Сирота [1] в предположении континуум-гипотезы CH. На современный взгляд его конструкция выглядит следующим образом. На счетной булевой группе берется рамсеевский ультрафильтр и строится наибольшая групповая топология, в которой он сходится к нулю.

Иного типа пример недискретной экстремально несвязной топологической группы построил В. И. Малыхин [2] в предположении аксиомы Мартина MA. Это была счетная топологическая булева группа с единственным сходящимся к нулю неглавным ультрафильтром. Группа Малыхина, в отличие от группы Сироты, неразложима.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 22A05.

Ультрафильтры, близкие к фильтру окрестностей нуля группы Малыхина, независимо возникли и в комбинаторике чисел [3]. Там же было доказано, что из существования такого ультрафильтра вытекает существование P-точки и, следовательно, существуют модели ZFC без таких ультрафильтров. Аналогичную теорему о P-точке для топологических групп с единственным сходящимся к единице неглавным ультрафильтром доказал И. В. Протасов [4], установив тем самым независимость существования таких групп.

В работе [5] в предположении CH на счетной булевой группе для каждого натурального $n > 0$ были построены три групповые топологии с различными n-элементными полугруппами ультрафильтров и была доказана теорема о P-точке для произвольной недискретной топологической абелевой группы с конечной полугруппой ультрафильтров. Недавно И. В. Протасов доказал теорему о P-точке для неразложимых (и даже $\aleph_0$-неразложимых) топологических абелевых групп [6].

Данная работа примыкает к исследованиям в этом напрвалении. Одна из ее задач — выяснить природу накопившихся разрозненных теорем о P-точке. Другие задачи связаны с примером Сироты. Вкратце содержание работы таково.

§1 носит вспомогательный характер по отношению к §2. В нем определяется понятие полугруппы ультрафильтров топологической группы, приводятся необходимые в §2 факты о таких полугруппах и доказывается, что если полугруппа ультрафильтров счетной топологической группы конечна, то она является полугруппой идемпотентов. Этот результат решает вопрос 13.25 из [7].

В §2 доказываются две достаточно общие теоремы о P-точке и извлекаются соответствующие следствия для топологических групп с конечными полугруппами ультрафильтров, неразложимых и $\aleph_0$-неразложимых топологических групп.

В §3 доказывается еще одна теорема о P-точке для экстремально несвязных топологических групп, содержащих счетное дискретное незамкнутое подмножество. Однако в общем случае старая проблема [8, 1.16] о наивном примере недискретной экстремально несвязной топологической группы остается открытой.

В §4 дано прозрачное доказательство теоремы Сироты и доказано некоторое ее обращение. Как следствие получена тополого-групповая характеризация рамсеевских ультрафильтров. Ультрафильтр p на булевой группе $\mathbb{B}$ рамсеевский тогда и только тогда, когда наибольшая групповая топологи $\tau(p)$ на $\mathbb{B}$, в которой p сходится к нулю, экстремально несвязна и p содержит независимое подмножество.

В §5 в предположении MA на счетной булевой группе строится специальный ультрафильтр, отличный от рамсеевского, так называемая специальная P-точка, и доказывается, что топология $\tau(p)$ экстремально несвязна.

В §6 исследуются некоторые связанные с дискретностью тополого-групповые свойства рамсеевских ультрафильтров и специальных P-точек на экстремально несвязных топологических группах.

Начиная с §2 основной группой выступает бесконечная булева группа $\mathbb{B}$ — группа экспоненты 2. Аргументы такого ограничения следующие. Каждая недискретная экстремально несвязная топологическая группа содержит открытую булеву подгруппу [2]. Каждая недискретная неразложимая (и даже $\aleph_0$-неразложимая) топологическая абелева группа содержит открытую счетную булеву подгруппу [9, 10]. Каждая недискретная топологическая абелева группа с конечной полугруппой ультрафильтров содержит открытую счетную булеву подгруппу [11].

Пусть φ — фильтр на множестве X. *Характером (дисперсионным характером)* φ

называется наименьшая из мощностей баз (элементов) φ. *Индексом полноты* φ называется наибольший кардинал $\varkappa \leq |\varphi|^+$ такой, что $\bigcap \mathcal{F} \in \varphi$ для любого $\mathcal{F} \subset \varphi$ мощности $< \varkappa$. Для кардинала α фильтр φ называется *α-полным*, если индекс полноты φ не меньше α. Характером (дисперсионным характером, индексом полноты) однородного пространства называется характер (дисперсионный характер, индекс полноты) фильтра окрестностей точки в этом пространстве.

Все пространства, если особо не оговорено, предполагаются хаусдорфовыми.

Как обычно, через ZFC обозначается стандартная система Цермело-Френкеля аксиом теории множеств, $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X, $\mathcal{P}_\omega(X)$ — множество конечных подмножеств X, $|X|$ — мощность X, $\mathfrak{c}$ — мощность континуума, ω — первый бесконечный ординал. Через $\mathbb{Z}(2)$ обозначается двухэлементная группа — группа вычетов по модулю 2, а через $\mathbb{D}(2)$ — двухэлементная полугруппа с нулевым умножением. Через $\langle A \rangle$ обозначается наименьшая подгруппа, содержащая множество A. Чтобы не перегружать формулы скобками, будем пользоваться следующим порядком предпочтения операций: $\setminus, \cap, \cup, +$. Так, например, $A \cap B \setminus C + D \cup E = \big(A \cap (B \setminus C)\big) + (D \cup E)$.

§1. Полугруппы ультрафильтров топологий на группах

Пусть X — дискретное пространство, βX — чех-стоунова компактификация X. Элементами пространства βX являются всевозможные ультрафильтры на X, главные ультрафильтры отождествляются с соответствующими элементами из X, а базу окрестностей точки $p \in \beta X$ образуют множества $\bar{A} = \{q \in \beta X : A \in q\}$, где $A \in p$. Через X^* обозначается замкнутое подпространство $\beta X \setminus X$ в βX, состоящее из всех неглавных ультрафильтров на X. Каждый фильтр φ на X определяет в X^* замкнутое подмножество $\varphi^* = \bigcap \{A^* : A \in \varphi\}$, где $A^* = \bar{A} \setminus A$. Оно состоит из всех неглавных ультрафильтров на X, содержащих фильтр φ. Обратно, каждое замкнутое подмножество в X^* представимо в таком виде. Каждое отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует отображения $\beta X \to \beta Y$, $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{P}(\beta X) \to \mathcal{P}(\beta Y)$ и.д. Эти отображения мы также будем обозначать буквой f.

Пусть G — дискретная группа, βG — чех-стоунова компактификация G. Операция умножения на G естественно продолжается до операции умножения на βG с непрерывными левыми сдвигами на элементы из G и непрерывными правыми сдвигами. Для произвольных ультрафильтров $p, q \in \beta G$ базу ультрафильтра pq образуют множества вида $\bigcup \{aB_a : a \in A\}$, где $A \in p$, $B_a \in q$. Продолженная операция остается асоциативной, превращая, таким образом, βG в компактную правотопологическую полугруппу. Такое продолжение возникло и широко применяется в комбинаторике чисел (см., например, обзор [12]). Каждая замкнутая подполугруппа φ^* полугруппы G^*, как и каждая компактная правотопологическая полугруппа, имеет минимальный идеал $K(\varphi^*)$, который является вполне простой полугруппой, в частности, множество $E(\varphi^*)$ идемпотентов полугруппы φ^* непусто (см., например, [13]).

Пусть τ — недискретная топология на группе G, инвариантная относительно левых сдвигов. Обозначим через τ^* множество всех неглавных ультрафильтров на G, сходящихся в топологии τ к единице. Поскольку левоинвариантная топология на группе однозначно определяется фильтром окрестностей единицы, то это обозначение вполне согласуется с аналогичным обозначением для фильтров. Легко проверить, что τ^* — замкнутая подполугруппа в G^*. Она называется полугруппой ультрафильтров левоинвариантной топологии τ или левотопологической группы (G, τ) [14].

Лемма 1.1 [15]. *Каждую регулярную левоинвариантную топологию на счетной группе можно ослабить до регулярной левоинвариантной топологии счетного характера.*

Теорема 1.2 [15, 16]. *Полугруппы ультрафильтров счетных недискретных регулярных левотопологических групп счетного характера топологически изоморфны.*

Теорема 1.3 [15, 16]. *Пусть G — счетная группа без кручения. В полугруппе βG все конечные подгруппы тривиальны.*

Теорема 1.3 была доказана автором для абелевых групп, однако, как заметили Н. Хиндман и Д. Штраус, это ограничение легко устранимо.

Следствие 1.4. *В полугруппе ультрафильтров счетной недискретной регулярной левотопологической группы все конечные подгруппы тривиальны.*

Доказательство. Пусть (G,τ) — счетная недискретная регулярная левотопологическая группа. По лемме 1.1 топологию τ можно ослабить до регулярной левоинвариантной топологии τ_1 счетного характера. Пусть τ_2 — какая-то недискретная метризуемая групповая топология на $\mathbb{Z}$. По теореме 1.2 полугруппы τ_1^* и τ_2^* топологически изоморфны, а по теореме 1.3 в τ_2^* все конечные подгруппы тривиальны. Следовательно, тривиальны и все конечные подгруппы в τ_1^*, а следовательно, и в $\tau^* \subset \tau_1^*$. $\square$

Следующая лемма в случае $|\tau^*| = 1$ была доказана в [4].

Лемма 1.5. *Пусть (G,τ) — недискретная регулярная левотопологическая группа, $p, q \in \beta G$. Если $q, pq \in \tau^*$, то $p \in \tau^* \cup \{e\}$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что $U \in p$ для произвольной окрестности U единицы (G,τ). Выберем окрестность единицы V такую, что $\operatorname{cl} V \subset U$. Так как $pq \in \tau^*$, то $V \in pq$ и, значит, $\{x \in G : V \in xq\} \in p$. Но так как $q \in \tau^*$, то $\{x \in G : V \in xq\} \subset \operatorname{cl} V$ поэтому, $\operatorname{cl} V \in p$, следовательно, и $U \in p$. $\square$

Пространство называется *экстремально несвязным*, если оно удовлетворяет одному из следующих двух эквивалентных условий:

(i) замыкание любого открытого подмножества открыто;

(ii) замыкания любых двух дизъюнктных открытых подмножеств дизъюнктны.

Классический пример экстремально несвязного пространства — чех-стоунова компактификация дискретного пространства.

Лемма Фролика 1.6 [17, гл. VI, задача 164]. *Пусть X — регулярное экстремально несвязное пространство, A, B — счетные подмножества из X. Если $\operatorname{cl} A \cap B = A \cap \operatorname{cl} B = \varnothing$, то $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B = \varnothing$.*

Теорема 1.7. *Пусть (G,τ) — счетная недискретная регулярная левотопологическая группа. Если τ^* конечна, то $\tau^* = E(\tau^*)$.*

Доказательство. По следствию 1.4 τ^* не содержит нетривиальных конечных подгрупп. Предположим, что $\tau^* \neq E(\tau^*)$. Тогда τ^* содержит $\mathbb{D}(2)$. Значит, найдутся различные ультрафильтры $p, q \in \tau^*$ такие, что $qq = qp = pq = pp = p$. Возьмем произвольные $P \in p$, $Q \in q$. Так как $qq = pp$, то $\bar{Q}q \cap \bar{P}p \neq \varnothing$. Но тогда по лемме Фролика либо $\bar{Q}q \cap Pp \neq \varnothing$, либо $Qq \cap \bar{P}p \neq \varnothing$. Если $Qq \cap \bar{P}p \neq \varnothing$, то найдутся $y \in Q$, $p' \in \bar{P}$ такие, что $yq = p'p$, откуда $q = y^{-1}p'p = y^{-1}p'pp = qp = p$, — противоречие. Если же

$\bar{Q}q \cap Pp \neq \varnothing$, то найдутся $q' \in \bar{Q}$, $x \in P$ такие, что $q'q = xp$. Положим $r = x^{-1}q'$. Тогда $p = rq$, $q' = xr$. Из первого равенства и леммы 1.5 следует, что $r \in \tau^*$. Но тогда, делая во втором равенстве предельный переход и учитывая конечность τ^*, получаем, что для некоторого $s \in \tau^*$ $q = ps = pps = pq = p$, — снова противоречие. □

Пространство называется *неразложимым* (*$\aleph_0$-неразложимым*), если его нельзя разбить на два (на счетное число) плотных подмножества.

Теорема 1.8 [6]. *Пусть (G, τ) — недискретная левотопологическая группа. Если τ неразложима, то $K(\tau^*)$ — полугруппа левых нулей. Если G счетна, а τ $\aleph_0$-неразложима, то для любого $p \in \tau^*$ найдется $q \in E(G^*)$ такой, что $p = qp$.*

Лемма 1.9 [14]. *Пусть (G, τ) — недискретная топологическая группа, $p, q \in \beta G$. Если $p, pq \in \tau^*$, то $q \in \tau^* \cup \{e\}$.*

§2. Теоремы о P-точке

Точка в топологическом пространстве называется *P-точкой*, если пересечение любого счетного набора ее окрестностей будет ее окрестностью. Нас будут интересовать P-точки в пространстве ω^*. Для неглавного ультрафильтра p на ω следующие условия эквивалентны:

(i) p есть P-точка в ω^*;

(ii) для любого разбиения $\{A_n : n < \omega\}$ множества ω либо найдется $A \in p$ такое, что все подмножества $A \cap A_n$ конечны, либо $A_n \in p$ для некоторого $n < \omega$;

(iii) для любого отображения $f\colon \omega \to \omega$ либо найдется $A \in p$ такое, что все прообразы точек отображения $f|A$ конечны, либо найдется $B \in p$ такое, что $f(B)$ конечно.

Неглавные ультрафильтры на ω, не являющиеся P-точками в ω^*, строятся легко. Они существуют в каждом бесконечном замкнутом подмножестве из ω^*. Существует даже бесконечное замкнутое подмножество в ω^*, состоящее только из таких точек. При дополнительных к ZFC теоретико-множественных предположениях, например, в предположении леммы Буса — известного комбинаторного следствия MA, несложно строятся также и P-точки в ω^*. Однако существуют модели ZFC без P-точек в ω^* [18].

Пусть всюду далее в этом параграфе $|\mathbb{B}| = \omega$, $\mathbb{B} = \bigoplus_\omega \mathbb{Z}(2)$, min, max — отображения, сопоставляющие каждому ненулевому элементу из $\mathbb{B}$ номера первой и последней ненулевой координаты, τ_0 — групповая топология на $\mathbb{B}$, базу окрестностей нуля которой образуют подгруппы $\{x \in \mathbb{B} : \min(x) > n\} \cup \{0\}$, где $n < \omega$, τ — произвольная недискретная групповая топология на $\mathbb{B}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\tau_0 \subset \tau$. Если не существует гомоморфизмов τ^* на $\mathbb{Z}(2)$, то каждая точка из $\min(\tau^*)$ есть P-точка.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное отображение $f\colon \omega \to \omega$. Вначале определим отображение $\delta\colon \mathbb{B} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}(2)$. Для произвольного ненулевого $x \in \mathbb{B}$ выпишем последовательность $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ номеров ненулевых координат x, посчитаем число пар (n_i, n_{i+1}) таких, что $f(n_{i+1}) < n_i$, и определим $\delta(x)$ как элемент из $\mathbb{Z}(2)$, равный по модулю 2 этому числу. Затем введем обозначения:

$$
\begin{gathered}
\xi^* = \{p \in \tau^* : \delta(p) = 0\}, \quad \eta^* = \{p \in \tau^* : \delta(p) = 1\}, \\
\xi(\omega^*) = \bigl\{p \in \xi^* : f\bigl(\min(p)\bigr) \in \omega^*\bigr\}, \quad \eta(\omega) = \bigl\{p \in \eta^* : f\bigl(\min(p)\bigr) \in \omega\bigr\}, \\
\Delta = \xi(\omega^*) \cup \eta(\omega), \\
\xi(\omega) = \bigl\{p \in \xi^* : f\bigl(\min(p)\bigr) \in \omega\bigr\}, \quad \eta(\omega^*) = \bigl\{p \in \eta^* : f\bigl(\min(p)\bigr) \in \omega^*\bigr\}, \\
\Delta' = \xi(\omega) \cup \eta(\omega^*).
\end{gathered}
$$

И, наконец, определим отображение $h\colon \tau^* \to \mathbb{Z}(2)$, положив $h(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \in \Delta, \\ 1, & \text{если } p \in \Delta'. \end{cases}$ □

Лемма 2.2. *h — гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть $p, q \in \tau^*$. Поскольку

$$
\delta(p+q) = \begin{cases} \delta(p) + \delta(q) + 1, & \text{если } f\bigl(\min(q)\bigr) \in \omega, \\ \delta(p) + \delta(q), & \text{если } f\bigl(\min(q)\bigr) \in \omega^*, \end{cases}
$$

то

$$
\delta(p+q) = \begin{cases} \delta(p), & \text{если } q \in \Delta, \\ \delta(p) + 1, & \text{если } q \in \Delta'. \end{cases}
$$

Заметим также, что $f\bigl(\min(p+q)\bigr) = f\bigl(\min(p)\bigr)$. Поэтому, если $q \in \Delta$, то

$$
p+q \in \begin{cases} \xi(\omega^*), & \text{если } p \in \xi(\omega^*), \\ \eta(\omega), & \text{если } p \in \eta(\omega), \\ \xi(\omega), & \text{если } p \in \xi(\omega), \\ \eta(\omega^*), & \text{если } p \in \eta(\omega^*), \end{cases}
$$

если же $q \in \Delta'$, то

$$
p+q \in \begin{cases} \eta(\omega^*), & \text{если } p \in \xi(\omega^*), \\ \xi(\omega), & \text{если } p \in \eta(\omega), \\ \eta(\omega), & \text{если } p \in \xi(\omega), \\ \xi(\omega^*), & \text{если } p \in \eta(\omega^*). \end{cases}
$$

Значит,

$$
p+q \in \begin{cases} \Delta, & \text{если } p, q \in \Delta, \\ \Delta, & \text{если } p, q \in \Delta', \\ \Delta', & \text{если } p \in \Delta,\ q \in \Delta', \\ \Delta', & \text{если } p \in \Delta',\ q \in \Delta \end{cases}
$$

и, следовательно, h — гомоморфизм. □

Продолжим доказательство теоремы. Из леммы 2.2 и условия теоремы следует, что $h(\tau^*) = \{0\}$. Значит, $\Delta' = \varnothing$, поэтому, $\xi^* = \xi(\omega^*)$, $\eta^* = \eta(\omega)$. Убедимся, что подмножество $f\bigl(\min(\eta^*)\bigr) \subset \omega$ конечно. Действительно, если это не так, то найдется последовательность $\{p_n : n < \omega\} \subset \eta^*$ такая, что $f\bigl(\min(p_n)\bigr) < f\bigl(\min(p_{n+1})\bigr)$, и тогда, взяв какую-то предельную точку p этой последовательности, получим, что $p \in \eta^*$, но $f\bigl(\min(p)\bigr) \in \omega^*$, — противоречие.

Далее, выберем $U_\xi \in \xi$, $U_\eta \in \eta$ такие, что $f\bigl(\min(U_\eta)\bigr)$ конечно, $f\bigl(\min(U_\xi)\bigr) \cap f\bigl(\min(U_\eta)\bigr) = \varnothing$, $\delta(U_\xi) = \{0\}$. Образуем окрестность нуля $U = U_\xi \cup U_\eta \cup \{0\}$ и заметим, что если $a \in U_\xi$, $b \in U$, $\min(a) = \min(b)$, то $b \in U_\xi$. Выберем окрестность нуля V такую, что $V + V \subset U$, и положим $V_\xi = V \cap U_\xi$. Ясно, что $\min(V_\xi) \in \min(\xi)$. В завершение доказательства теоремы убедимся, что все прообразы точек отображения $f|\min(V_\xi)$ конечны. Действительно, если это не так, то найдутся $m < \omega$ и $\{a_n : n < \omega\} \subset V_\xi$ такие, что $\min(a_n) < \min(a_{n+1})$ и $f\bigl(\min(a_n)\bigr) = m$. Но тогда найдутся $n < k < \omega$ такие, что $\max(a_n) < \min(a_k)$ и $f\bigl(\min(a_k)\bigr) < \max(a_n)$, откуда $a_n + a_k \in U_\xi$ и $\delta(a_n + a_k) = \delta(a_n) + \delta(a_k) + 1 = 1$, — противоречие.

Следствие 2.3. *Если $K(\tau^*) \subset E(\tau^*)$, то каждая точка из $\min(\tau^*)$ есть P-точка.*

Доказательство. Пусть $K = K(\tau^*)$, $E = E(\tau^*)$. Так как $K \subset E \subset E(\mathbb{B}^*) \subset \tau_0^*$ и $\tau^* + K \subset K$, то по лемме 1.5 $\tau^* \subset \tau_0^*$ и, следовательно, $\tau_0 \subset \tau$. Теперь по теореме 2.1 нам достаточно убедиться в тривиальности произвольного гомоморфизма $f\colon \tau^* \to \mathbb{Z}(2)$. Очевидно, $f(E) = \{0\}$ и, значит, $f(K) = \{0\}$. Далее, с одной стороны, $f(\tau^* + K) = f(\tau^*) + f(K) = f(\tau^*) + \{0\} = f(\tau^*)$, а с другой стороны, $f(\tau^* + K) \subset f(K) = \{0\}$. Следовательно, $f(\tau^*) = \{0\}$. □

Из следствия 2.3 и теоремы 1.7 вытекает

Следствие 2.4. *Если τ^* конечна, то каждая точка из $\min(\tau^*)$ есть P-точка.*

Из следствия 2.3 и теоремы 1.8 вытекает

Следствие 2.5. *Если τ неразложима, то каждая точка из $\min(\tau^*)$ есть P-точка.*

Теорема 2.6. *Пусть $\tau_0 \subset \tau$. Если не существует гомоморфизмов τ^* на $\mathbb{D}(2)$, то каждая точка из $\max(\tau^*)$ есть P-точка.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное отображение $f\colon \omega \to \omega$. Вначале определим отображение $\sigma\colon \mathbb{B} \setminus \{0\} \to \mathbb{D}(2)$, положив

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f\bigl(\max(x)\bigr) \le \min(x), \\ 0, & \text{если } f\bigl(\max(x)\bigr) > \min(x). \end{cases}$$

Затем введем обозначения

$$\xi^* = \{p \in \tau^* : \sigma(p) = 0\}, \quad \eta^* = \{p \in \tau^* : \sigma(p) = 1\},$$
$$\eta(\omega) = \bigl\{p \in \eta^* : f\bigl(\max(p)\bigr) \in \omega\bigr\}, \quad \eta(\omega^*) = \bigl\{p \in \eta^* : f\bigl(\max(p)\bigr) \in \omega^*\bigr\},$$
$$\Delta = \xi^* \cup \eta(\omega).$$

И, наконец, определим отображение $h\colon \tau^* \to \mathbb{D}(2)$, положив $h(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \in \Delta, \\ 1, & \text{если } p \in \eta(\omega^*). \end{cases}$
□

2.7. Лемма *h — гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть $p, q \in \tau^*$. Тогда $p + q \in \begin{cases} \xi^*, & \text{если } q \in \xi^*, \\ \eta(\omega), & \text{если } q \in \eta(\omega), \\ \xi^*, & \text{если } q \in \eta(\omega^*). \end{cases}$ □

Продолжим доказательство теоремы. Из леммы 2.7 и условия теоремы следует, что $\eta^* = \eta(\omega)$. Легко проверить, что подмножество $f\big(\max(\eta^*)\big) \subset \omega$ конечно. Далее, выберем $U_\xi \in \xi$, $U_\eta \in \eta$ такие, что $f\big(\max(U_\eta)\big)$ конечно и $f\big(\max(U_\xi)\big) \cap f\big(\max(U_\eta)\big) = \varnothing$. Образуем окрестность нуля $U = U_\xi \cup U_\eta \cup \{0\}$ и заметим, что если $a \in U_\xi$, $b \in U$, $\max(a) = \max(b)$, то $b \in U_\xi$. Выберем окрестность нуля V такую, что $V+V \subset U$, и положим $V_\xi = V \cap U_\xi$. Ясно, что $\max(V_\xi) \in \max(\xi)$. Убедимся, что все прообразы точек отображения $f|\max(V_\xi)$ конечны. Действительно, если это не так, то найдутся $m < \omega$ и $\{a_n : n < \omega\} \subset V_\xi$ такие, что $\max(a_n) < \max(a_{n+1})$ и $f\big(\max(a_n)\big) = m$. Но тогда найдутся $n < k < \omega$ такие, что элементы a_n и a_k имеют одинаковые i-координаты для каждого $i < m$, откуда $a_n + a_k \in U_\xi$, $\min(a_n + a_k) \geq m$ и, следовательно, $f\big(\max(a_k)\big) = f\big(\max(a_n + a_k)\big) > \min(a_n + a_k) \geq m$, — противоречие.

Следствие 2.8 [6]. *Если $\tau^* \subset \tau_0^* + \tau^*$, то каждая точка из $\max(\tau^*)$ есть P-точка.*

Доказательство. Рассмотрим групповую топологию $\tau_1 = \tau_0 \vee \tau$. Базу окрестностей нуля топологии τ_1 образуют множества вида $U \cap V$, где U, V — окрестности нуля топологий τ_0, τ. Очевидно, $\tau_0 \subset \tau_1$. Убедимся, что $\max(\tau_1^*) = \max(\tau^*)$. Действительно, $E(\tau^*) \subset E(\mathbb{B}^*) = E(\tau_0^*)$, откуда $E(\tau^*) \subset \tau_1^*$, и для каждого $p \in \tau^*$ множество $\{q \in \tau^* : \max(q) = \max(p)\}$ есть левый идеал τ^*, а значит, содержит идемпотент. Поэтому, $\max(\tau^*) \subset \max(\tau_1^*)$. Далее, по лемме 1.5 соотношение $\tau^* \subset \tau_0^* + \tau^*$ эквивалентно соотношению $\tau^* \subset \tau_1^* + \tau^*$, откуда по лемме 1.9 $\tau_1^* \subset \tau_1^* + \tau_1^*$. Из последнего соотношения вытекает тривиальность произвольного гомоморфизма $f\colon \tau_1^* \to \mathbb{D}(2)$. Следовательно, по теореме 2.6 каждая точка из $\max(\tau_1^*) = \max(\tau^*)$ есть P-точка. □

Из следствия 2.8 и теоремы 1.8 вытекает

Следствие 2.9. *Если τ^* конечна, то каждая точка из $\max(\tau^*)$ есть P-точка.*

Из следствия 2.8 и теоремы 1.7

Следствие 2.10. *Если τ $\aleph_0$-неразложима, то каждая точка из $\max(\tau^*)$ есть P-точка.*

§3. Экстремально несвязные топологические группы, содержащие счетные дискретные незамкнутые подмножества

Подмножество D в пространстве X называется *сильно дискретным*, если для каждой точки $x \in D$ можно выбрать окрестность U_x так, что семейство $\{U_x : x \in D\}$ дизъюнктно. В регулярном пространстве каждое счетное дискретное подмножество сильно дискретно.

Лемма 3.1. *Пусть X — регулярное экстремально несвязное пространство, D — сильно дискретное подмножество в X, касающееся точки $x \in X$. Существует лишь один ультрафильтр на X, содержащий множество D и сходящийся к точке x.*

Доказательство. Для каждой точки $y \in D$ выберем окрестность U_y так, что семейство $\{U_y : y \in D\}$ дизъюнктно. Предположим, что лемма не верна. Тогда в D найдутся два дизъюнктных подмножества A и B, касающиеся точки x. Но тогда точки x будут касаться также и два дизъюнктных открытых подмножества $\bigcup\{U_y : y \in A\}$ и $\bigcup\{U_y : y \in B\}$, — противоречие. □

Теорема 3.2. *Пусть $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \tau)$ — экстремально несвязная топологическая группа, p — сходящийся неглавный ультрафильтр на $\mathbb{B}$, содержащий счетное дискретное подмножество. Существует отображение $f\colon \mathbb{B} \to \omega$ такое, что $f(p)$ есть P-точка.*

Доказательство. Можно считать, что p сходится к нулю. Пусть $D = \{x_n : n < \omega\}$ — дискретное подмножество в $\mathbb{B}$, принадлежащее p. Построим убывающую последовательность $\{U_n : n < \omega\}$ открытых окрестностей нуля $\mathbb{B}$ такую, что $x_n \notin U_n$ и семейство $\{x_n+U_n : n < \omega\}$ дизъюнктно. Пусть $f\colon \mathbb{B} \to \omega$ — отображение такое, что $f(x) = n$, если $x \in U_n \setminus U_{n+1}$. Так как $\bigcap\{U_n : n < \omega\} \cap D = \varnothing$, то ультрафильтр $f(p)$ на ω неглавный. Докажем, что $f(p)$ есть P-точка. Мы докажем даже чуть больше.

Пусть $\{A_m : m < \omega\}$ — произвольное разбиение множества D такое, что $A_m \notin p$. Каждый элемент $x_n \in D$ принадлежит некоторому множеству $A_{m(n)}$ нашего разбиения. Рассмотрим множество $x_n + U_n \cap A_{m(n)}$. Оно содержится в открытом множестве $x_n + U_n$ и по лемме 3.1 не касается x_n. Следовательно, найдутся дизъюнктные открытые множества $P_n, Q_n \subset x_n + U_n$ такие, что $x_n \in P_n$, $x_n + U_n \cap A_{m(n)} \subset Q_n$. Положим $P = \bigcup\{P_n : n < \omega\}$, $Q = \bigcup\{Q_n : n < \omega\}$, $F = \bigcup\{x_n + U_n \cap A_{m(n)} : n < \omega\}$. Тогда $F \subset Q$, множества P, Q открыты, дизъюнктны и $0 \in \operatorname{cl} P$. Но тогда $0 \notin \operatorname{cl} Q$ и, тем более, $0 \notin \operatorname{cl} F$. Пусть V, W — окрестности нуля такие, что $V \cap F = \varnothing$, $W+W \subset V$, $A = D \cap W$. Убедимся, что все $f(A \cap A_m)$ конечны. Действительно, допустим противное и возьмем какое-то $x_n \in A \cap A_m$. Тогда найдется некоторое $x_k \in U_n \cap A \cap A_m$. Но тогда, с одной стороны, $x_n + x_k \in A + A \subset W + W \subset V$, а с другой стороны, $x_n + x_k \in x_n + U_n \cap A_m \subset F \subset \mathbb{B} \setminus V$, — противоречие. □

Теорема 3.2 редуцирует старую проблему о наивном примере недискретной экстремально несвязной топологической группы к топологическим группам, в которых каждое счетное дискретное подмножество замкнуто. Здесь уместно напомнить вопрос из [19].

Вопрос 3.3 (И.В. Протасов). *Можно ли наивно построить счетную недискретную топологическую группу, в которой каждое дискретное подмножество замкнуто?*

§4. Тополого-групповая характеризация рамсеевских ультрафильтров

Пусть p — неглавный ультрафильтр на множестве X, $\varkappa$ — дисперсионный характер p. Ультрафильтр p называется *рамсеевским*, если для любого натурального $n > 0$ и для любого раскрашивания множества $[X]^n$ n-элементных подмножеств X в конечное число цветов найдется $A \in p$ такое, что $[A]^n$ одноцветно. Ультрафильтр p называется *селективным*, если для любого разбиения $\{A_\gamma : \gamma < \varkappa\}$ множества X либо $A_\gamma \in p$ для некоторого $\gamma < \varkappa$, либо найдется $A \in p$ такое, что $|A \cap A_\gamma| \leq 1$ для всех $\gamma < \varkappa$. Ультрафильтр p называется *слабо селективным*, если для любого разбиения $\{A_\gamma : \gamma < \varkappa\}$ множества X такого, что $|A_\gamma| < \varkappa$, найдется $A \in p$ такое, что $|A \cap A_\gamma| \leq 1$. Очевидно, селективный ультрафильтр слабо селективный. Кардинал $\varkappa$ называется *измеримым*, если $\varkappa > \omega$ и на $\varkappa$ существует неглавный $\varkappa$-полный ультрафильтр. Для ультрафильтра p рамсеевость и селективность эквивалентны и влекут $\varkappa$-полноту, а следовательно, измеримость $\varkappa$ в случае $\varkappa > \omega$. Обратно, если $\varkappa$ измерим, то на $\varkappa$ существуют рамсеевские ультрафильтры дисперсионного характера $\varkappa$. Однако первый измеримый кардинал сильно недостижим и, следовательно, с ZFC совместно утверждение об отсутствии измеримых кардиналов. Совместно ли с ZFC утверждение о существовании измеримых кардиналов, неизвестно. В случае $\varkappa = \omega$ статус рамсеевских ультрафильтров более определенный. На ω они несложно строятся при некоторых дополнительных к ZFC теоретико-множественных предположениях, например, в предположении леммы Буса. С другой стороны, каждый рамсеевский ультрафильтр на ω является P-точкой и, следовательно, с ZFC совместно утверждение об отсутствии рамсеевских ультрафильтров. Подробнее о рамсеевских ультрафильтрах см., например, в [20].

Всюду далее в этом параграфе пусть $|\mathbb{B}| = \varkappa$, p — произвольный неглавный ультрафильтр на $\mathbb{B}$, $\tau(p)$ — наибольшая групповая топология на $\mathbb{B}$, не обязательно хаусдорфова, в которой p сходится к нулю. Базу окрестностей нуля $\tau(p)$ образуют множества вида $[F_1, F_2, \dots, F_n, \dots] = \bigcup_{0<n<\omega}[F_1, \dots, F_n]$, где $[F_1, \dots, F_n] = \big\{x \in \mathbb{B} : x = x_1 + \dots + x_n, x_i \in F_i \cup \{0\}\big\}$, а $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ пробегают p [21].

Лемма 4.1. *Если p слабо селективный, то p содержит независимое подмножество.*

Доказательство. Можно считать, что дисперсионный характер p равен $\varkappa$. Представим $\mathbb{B}$ в виде объединения возрастающей $\varkappa$-последовательности подгрупп мощности $< \varkappa$ и воспользуемся селективностью p. □

Пространство X называется *сильно экстремально несвязным*, если для любого открытого незамкнутого подмножества U из X найдется точка $x \in \operatorname{cl} U \setminus U$ такая, что множество $U \cup \{x\}$ открыто. Очевидно, сильно экстремально несвязное пространство экстремально несвязно.

Теорема 4.2 [1]. *Если p рамсеевский, то $\tau(p)$ хаусдорфова и сильно экстремально несвязна.*

Доказательство. Хаусдорфовость $\tau(p)$ следует из леммы 4.1. Докажем сильную экстремальную несвязность $\tau(p)$. Можно считать, что дисперсионный характер p равен $\varkappa$. Пусть U — произвольное открытое подмножество в $\big(\mathbb{B}, \tau(p)\big)$, касающееся нуля. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $U \in x + p$ для некоторого $x \in \operatorname{cl} U \setminus U$.

Вначале выберем $A \in p$ такое, что $x + A \subset U$, и для произвольного натурального $m > 0$ раскрасим множество $[A]^m$ в два цвета следующим образом. Пусть $\{a_1, \dots, a_m\} \in [A]^m$. Если $x + a_1 + \dots + a_m \in U$, то $\{a_1, \dots, a_m\}$ окрасим в белый цвет, иначе — в черный. Так как p рамсеевский, то найдется $A_m \in p$ такое, что $A_m \subset A$ и $[A_m]^m$ одноцветно. Ясно, что этот цвет белый. Затем выберем $C \in p$ такое, что все $C \setminus A_m$ конечны. Это можно сделать, применяя селективность p к убывающей последовательности множеств $\bigcap\{A_i : 0 < i \le m\} \in p$. И наконец, построим индуктивно последовательность $\{D_n : 0 < n < \omega\}$ подмножеств из C с конечными дополнениями такую, что $x + [D_1, D_2, \dots, D_n, \dots] \subset U \cup \{x\}$, чем и докажем открытость $U \cup \{x\}$. Предположим, что уже построены $D_1, \dots D_n \subset C$ с конечными дополнениями такие, что $x + [D_1, \dots, D_n] \subset U \cup \{x\}$, однако для любого $D \subset C$ с конечным дополнением $x + [D_1, \dots, D_n, D] \not\subset U \cup \{x\}$. Тогда найдется $d \in [D_1, \dots, D_n]$ такой, что $x + d + [D, \dots, D] \not\subset U \cup \{x\}$. Но это влечет противоречие, как в случае $x + d \in U$, так и в случае $x + d = x$.

Случай 2: $\mathbb{B} \setminus U \in x + p$ для любого $x \in \operatorname{cl} U \setminus U$ и, следовательно, для любого $x \in \mathbb{B} \setminus U$.

Вначале зафиксируем $x \in \mathbb{B} \setminus U$, выберем $A(x) \in p$ такое, что $x + A(x) \subset \mathbb{B} \setminus U$, и для произвольного натурального $m > 0$ раскрасим множество $[A(x)]^m$ в два цвета следующим образом. Пусть $\{a_1, \dots, a_m\} \in [A(x)]^m$. Если $x + a_1 + \dots + a_m \in \mathbb{B} \setminus U$, то $\{a_1, \dots, a_m\}$

окрасим в белый цвет, иначе — в черный. Так как p рамсеевский, то найдется $A_m(x) \in p$ такое, что $A_m(x) \subset A(x)$ и $[A_m(x)]^m$ одноцветно. Ясно, что этот цвет белый. Затем выберем $C \in p$ такое, что $|C \setminus A_m(x)| < \varkappa$ для всех $x \in \mathbb{B} \setminus U$, $m > 0$. И наконец, построим индуктивно последовательность $\{D_n : 0 < n < \omega\}$ подмножеств из C с дополнениями мощности $< \varkappa$ такую, что $[D_1, D_2, \dots, D_n, \dots] \subset \mathbb{B} \setminus U$. Предположим, что уже построены $D_1, \dots, D_n \subset C$ с дополнениями мощности $< \varkappa$ такие, что $[D_1, D_2, \dots, D] \subset \mathbb{B} \setminus U$, однако для любого $D \subset C$ с дополнением мощности $< \varkappa$ $[D_1, D_2, \dots, D_n, D] \not\subset \mathbb{B} \setminus U$. Тогда найдется $d \in [D_1, \dots, D_n]$ такой, что $d + [D, \dots, D] \not\subset \mathbb{B} \setminus U$. Но этого быть не может, так как $d \in \mathbb{B} \setminus U$. Итак, мы построили окрестность нуля $[D_1, D_2, \dots, D_n, \dots]$, дизъюнктную с множеством U, — противоречие. Следовательно, случай 2 невозможен. □

Пусть $\mathbb{B} = \bigoplus_\varkappa \mathbb{Z}(2)$, supp — отображение, сопоставляющее каждому элементу из $\mathbb{B}$ множество номеров его ненулевых координат, e_α — элемент из $\mathbb{B}$ такой, что $\operatorname{supp}(e_\alpha) = \{\alpha\}$, $E = \{e_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, τ_0 — групповая топология на $\mathbb{B}$, базу окрестностей нуля которой образуют подгруппы $U_\alpha = \{x \in \mathbb{B} : \min(x) > \alpha\} \cup \{0\}$, τ — произвольная групповая топология на $\mathbb{B}$, в которой p сходится к нулю.

Теорема 4.3. *Пусть $E \in p$, $\tau_0 \subset \tau$. Если τ экстремально несвязна, то p рамсеевский.*

Доказательство. Вначале заметим, что семейство $\{e_\alpha + U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ открытых множеств в $(\mathbb{B}, \tau)$ дизъюнктно и, следовательно, множество E сильно дискретно.

Пусть $\{A_\gamma : \gamma < \varkappa\}$ — произвольное разбиение множества E такое, что $A_\gamma \notin p$. Каждый элемент $e_\alpha \in E$ принадлежит некоторому множеству $A_{\gamma(\alpha)}$ нашего разбиения. Рассмотрим множество $e_\alpha + U_\alpha \cap A_{\gamma(\alpha)}$. Оно содержится в открытом множестве $e_\alpha + U_\alpha$ и по лемме 3.1 не касается e_α. Следовательно, найдутся дизъюнктные открытые подмножества $P_\alpha, Q_\alpha \subset e_\alpha + U_\alpha$ такие, что $e_\alpha \in P_\alpha$, $e_\alpha + U_\alpha \cap A_{\gamma(\alpha)} \subset Q_\alpha$. Положим $P = \bigcup\{P_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, $Q = \bigcup\{Q_\alpha : \alpha < \varkappa\}$, $F = \bigcup\{e_\alpha + U_\alpha \cap A_{\gamma(\alpha)} : \alpha < \varkappa\}$. Тогда $F \subset Q$, множества P, Q открыты, дизъюнктны и $0 \in \operatorname{cl} P$. Но тогда $0 \notin \operatorname{cl} Q$ и, тем более, $0 \notin \operatorname{cl} F$. Выберем окрестности нуля V, W такие, что $V \cap F = \varnothing$, $W + W \subset V$, и положим $A = E \cap W$. Убедимся, что $|A \cap A_\gamma| \le 1$. Действительно, допустим противное — $e_\alpha, e_\beta \in A \cap A_\gamma$, $\alpha < \beta$. Тогда, с одной стороны, $e_\alpha + e_\beta \in A + A \subset W + W \subset V$, а с другой стороны, $e_\alpha + e_\beta \in e_\alpha + U_\alpha \cap A_\gamma \subset F \subset \mathbb{B} \setminus V$, — противоречие. □

Из утверждений 4.1–4.3 вытекает

Следствие 4.4. *Ультрафильтр p рамсеевский тогда и только тогда, когда топология $\tau(p)$ экстремально несвязна и p содержит независимое подмножество.*

§5. Специальные P-точки

Пусть p — неглавный ультрафильтр на $\mathbb{B}$, $f\colon \mathbb{B} \to Z$. Ультрафильтр p называется *f-групповым*, если для любого $A \in p$ найдется $C \in p$ такое, что $f^{-1}(z) \cap C + f^{-1}(z) \cap C \subset f^{-1}(z) \cap A \cup \{0\}$ для каждого $z \in Z$. Ультрафильтр p называется *нетривиально f-групповым*, если p f-групповой и не существует $A \in p$ такого, что $|f^{-1}(z) \cap A| \le 1$ для каждого $z \in Z$.

Лемма 5.1. *Если p f-групповой, то существует $C \in p$ такое, что $|f^{-1}(z) \cap C| \le \omega$ для каждого $z \in Z$.*

Доказательство. Пусть $|\mathbb{B}| = \varkappa$, $\mathbb{B} = \oplus_\varkappa \mathbb{Z}(2)$, $x = (x_\gamma) \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$. Если в разложении числа $|\operatorname{supp}(x)|$ на простые множители количество двоек четно, то отнесем x к множеству A_0, иначе — к множеству A_1. Выберем $A \in p$, содержащееся в одной из частей разбиения $\{A_0, A_1\}$ множества $\mathbb{B} \setminus \{0\}$, а затем выберем $C \in p$ такое, что

$$f^{-1}(z) \cap C + f^{-1}(z) \cap C + f^{-1}(z) \cap C + f^{-1}(z) \cap C \subset f^{-1}(z) \cap A \cup \{0\}.$$

Докажем, что $|f^{-1}(z) \cap C| \leq \omega$. Допустим противное. Тогда по лемме о пересечениях (см., например, [22, гл.3, теорема 5.7]) найдутся бесконечное $X \subset f^{-1}(z) \cap C$ и конечное $K \subset \varkappa$ такие, что $\operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y) = K$ и $|\operatorname{supp}(x)| = |\operatorname{supp}(y)|$ для любых различных $x, y \in X$. Но тогда в множестве $f^{-1}(z) \cap C + f^{-1}(z) \cap C$ найдется бесконечное подмножество Y такое, что $\operatorname{supp}(x) \cap \operatorname{supp}(y) = \varnothing$ и $|\operatorname{supp}(x)| = |\operatorname{supp}(y)|$ для любых различных $x, y \in X$. Откуда $x, x+y \in f^{-1}(z) \cap A \subset A$ и $|\operatorname{supp}(x+y)| = 2|\operatorname{supp}(x)|$, — противоречие с выбором A. □

Лемма 5.2. *Пусть для ультрафильтра p на $\mathbb{B}$ существует отображение $f \colon \mathbb{B} \to Z$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $|f^{-1}(z) \cap A| < \varkappa$ для некоторого $A \in p$ и для каждого $z \in Z$, где $\varkappa$ — дисперсионный характер p;

(ii) ультрафильтр $f(p)$ слабо селективный;

(iii) ультрафильтр p f-групповой.

Тогда топология $\tau(p)$ хаусдорфова.

Доказательство. Можно считать, что $|\mathbb{B}| = \varkappa$ и $\mathbb{B} = \langle A \rangle$. Построим возрастающую $\varkappa$-последовательность $\{G_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ подгрупп $\mathbb{B}$ мощности $< \varkappa$ такую, что $G_\alpha = \bigcup\{G_\beta : \beta < \alpha\}$, если α предельный, $\mathbb{B} = \bigcup\{G_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ и $f^{-1}\big(f(G_\alpha \cap A)\big) \cap A \subset G_{\alpha+1}$. Это можно сделать следующим образом. Элементы множества $f(A)$ расположим в $\varkappa$-последовательность. Положим $G_0 = \{0\}$. Если уже определена G_α, то возьмем в $f(A) \setminus f(G_\alpha \cap A)$ первый элемент $z_{\alpha+1}$ и положим $G_{\alpha+1} = \big\langle f^{-1}\big(f(G_\alpha \cap A) \cup \{z_{\alpha+1}\}\big) \cap A \big\rangle$.

Выберем $B \in p$ такое, что $B \subset A$ и если $B_\alpha = (G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha) \cap B \neq \varnothing$, то $B_{\alpha+1} = (G_{\alpha+2} \setminus G_{\alpha+1}) \cap B = \varnothing$. Непустые B_α индуцируют разбиение множества $f(B \setminus G_0)$ на подмножеcтвва $f(B_\alpha)$. Используя слабую селективность $f(p)$, выберем $C \in p$ такое, что $C \subset B$ и $|f(C_\alpha)| \leq 1$, где $C_\alpha = (G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha) \cap C$. Тогда если $C_\alpha \neq \varnothing$, и $c \in C_\alpha$, то $C_\alpha = f^{-1}\big(f(c)\big) \cap C$.

Для произвольного $\gamma < \varkappa$ выберем убывающую последовательность $\{F_n : n < \omega\}$ элементов p такую, что $F_0 \subset C$, $F_0 \cap G_\gamma = \varnothing$ и $C_\alpha \cap F_{n+1} + C_\alpha \cap F_{n+1} \subset C_\alpha \cap F_n$. Тогда $G_\gamma \cap [F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots] = \{0\}$. Действительно, если $x_1 \in C_{\alpha_1}, \ldots, x_n \in C_{\alpha_n}$ и $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, то $x_1 + \cdots + x_n \in C_{\alpha_n}$, если же $x_1 \in C_\alpha \cap F_1, \ldots, x_n \in C_\alpha \cap F_n$, то $x_1 + \cdots + x_n \in C_\alpha \cap F_0$. □

Ультрафильтр p на $\mathbb{B}$ называется *специальной P-точкой*, если p есть P-точка в $\mathbb{B}^*$ и существует отображение $f \colon \mathbb{B} \to \omega$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) ультрафильтр $f(p)$ рамсеевский;

(ii) ультрафильтр p нетривиально f-групповой.

Очевидно, специальная P-точка есть ультрафильтр, отличный от рамсеевского. Для построения специальной P-точки нам понадобятся конечно-булевый вариант теоремы Хиндмана и лемма Буса LB — хорошо известное комбинаторное следствие аксиомы Мартина MA.

Лемма 5.3. *Для любых натуральных k, m существует натуральное $n = n(k,m)$ со следующим свойвством: если конечную булеву группу B порядка $\geq 2^n$ разбить на $\leq k$ частей, то по крайней мере одна из частей содержит подмножество A такое, что $A \cup \{0\}$ — подгруппа в B порядка $\geq 2^n$.*

Лемма 5.3 вытекает из теоремы Хиндмана для бесконечной булевой группы и теоремы компактности (см., например, [23, теоремы 6.2 и 2.5]).

Лемма Буса 5.4 (MA). *Если $\mathcal{F}$ — семейство мощности $< \mathfrak{c}$ подмножеств из ω, пересечение каждого конечного подсемейства которого бесконечно, то существует подмножество $A \subset \omega$ такое, что $A \setminus F$ конечно для всех $F \in \mathcal{F}$.*

Об аксиоме Мартина и лемме Буса см., например, в [22, гл.6].

Теорема 5.5 (LB). *Специальная P-точка существует.*

Доказательство. Пусть $|\mathbb{B}| = \omega$, $\mathbb{B} = \bigoplus_{n<\omega} B_n$, $B_n = \bigoplus_n \mathbb{Z}(2)$, $Y = \bigcup_{n<\omega} B_n \setminus \{0\}$. Подмножество $X \subset Y$ будем называть правильным, если $X = \bigcup\{X_{n_k} : k < \omega\}$, где $\{n_k : k < \omega\}$ — возрастающая последовательность в ω, $X_{n_k} \cup \{0\}$ — подгруппа в B_{n_k} и $\lim\limits_{n\to\infty} |X_{n_k}| = \infty$. Из леммы 5.3 следует, что для произвольного разбиения множества Y на конечное число частей по крайней мере одна из частей содержит правильное подмножество. Пусть $\{\mathcal{A}^\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ — пересчет всех счетных разбиений $\mathcal{A}^\alpha = \{A_n^\alpha : n < \omega\}$ множества Y. Для каждого $\alpha < \mathfrak{c}$ построим правильное подмножество $X^\alpha = \bigcup\{X_{n_k}^\alpha : k < \omega\} \subset Y$ так, что выполняются следующие условия:

1) $X^\alpha \setminus X^\gamma$ конечно, если $\gamma < \alpha$;
2) либо $X^{\alpha+1} \subset A_n^\alpha$ для некоторого $n < \omega$, либо $|\{k < \omega : A_n^\alpha \cap X_{n_k}^{\alpha+1} \neq \varnothing\}| \leq 1$ для каждого $n < \omega$.

Фиксируем $\alpha < \mathfrak{c}$ и предположим, что для всех $\gamma < \alpha$ множества X^γ уже построены. Займемся построеним X^α.

Пусть вначале α — предельный ординал. Для $\gamma < \alpha$, $n < \omega$ через $X^\gamma(n)$ обозначим множество всех таких $K \subset X^\gamma$, что $K \cup \{0\}$ — подгруппа порядка $\geq 2^n$. Рассмотрим на счетном множестве $\mathcal{P}_\omega(Y)$ семейство подмножеств $X^\gamma(n)$, где $\gamma < \alpha$, $n < \omega$. К нему применима лемма Буса. Пусть $\mathcal{K}$ — бесконечное подмножество из $\mathcal{P}_\omega(Y)$ такое, что $\mathcal{K} \setminus X^\gamma(n)$ конечно для всех $\gamma < \alpha$, $n < \omega$. Выберем в $\mathcal{K}$ последовательность $\{K_s : s < \omega\}$ такую, что $K_s \cup \{0\}$ — подгруппа в $B_{n(s)}$ порядка $\geq 2^s$ для некоторого $n(s) < \omega$ и $n(s) \neq n(t)$, если $s \neq t$. Положим $X^\alpha = \bigcup\{K_s : s < \omega\}$.

Пусть теперь $\alpha = \gamma + 1$ для некоторого $\gamma < \alpha$. Если некоторое $A_n^\gamma \in \mathcal{A}^\gamma$ содержит правильное подмножество, то это правильное подмножество и возьмем в качестве X^α. В противном случае правильное подмножество содержится в каждом $C_n^\gamma = \bigcup\{A_i^\gamma : i \geq n\}$, где $n < \omega$. Выберем в $\mathcal{P}_\omega(Y)$ последовательность $\{K_s : s < \omega\}$ такую, что $K_s \cup \{0\}$ — подгруппа в $B_{n(s)}$ порядка $\geq 2^s$ для некоторого $n(s) < \omega$, $n(s) \neq n(t)$, если $s \neq t$, и $\bigcup\{K_i : i < s\} \subset \bigcup\{A_j^\gamma : j < m(s)\}$, $K_s \subset C_{m(s)}^\gamma$ для некоторого $m(s) < \omega$. Положим $X^\alpha = \bigcup\{K_s : s < \omega\}$.

Итак, множества X^α построены. Из условия 1) следует, что пересечение конечного числа множеств X^α бесконечно. Убедимся, что для произвольно разбиения множества Y на две части, скажем A и C, одна из частей содержит некоторое X^α. Для этого достаточно рассмотреть разбиения $\{A, C_0, C_1, \dots\}$ и $\{C, A_0, A_1, \dots\}$ множества Y, где $\{A_0, A_1, \dots\}$, $\{C_0, C_1, \dots\}$ — счетные разбиения множеств A, C (можно считать, что A и C бесконечны) и воспользоваться условием 2). Следовательно, множества X^α обрузуют базу некоторого неглавного ультрафильтра p на $\mathbb{B}$. Пусть $f\colon \mathbb{B} \to \omega$ — отображение такое, что $f(x) = n$, если $x \in B_n \setminus \{0\}$. Очевидно, ультрафильтр p нетривально f-групповой. Из условия 2) следует, что ультрафильтр $f(p)$ рамсеевский, а p есть P-точка. □

Теорема 5.6. *Если p есть специальная P-точка на $\mathbb{B}$, то топология $\tau(p)$ хаусдорфова и сильно экстремально несвязна.*

Доказательство. Хаусдорфовость $\tau(p)$ следует из леммы 5.2. Докажем сильную экстремальную несвязность $\tau(p)$. Можно считать, что $|\mathbb{B}| = \omega$. Пусть U — произвольное открытое подмножество в $(\mathbb{B}, \tau(p))$, касающееся нуля, $f\colon \mathbb{B} \to \omega$ — отображение, удовлетворяющее условиям (i), (ii) из определения специальной P-точки. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $U \in x + p$ для некоторого $x \in \operatorname{cl} U \setminus U$.

Каждому $n < \omega$ сопоставим $F_n = \bigcup\{f^{-1}(j) : j \geq n\} \in p$, а каждому $y \in U$ сопоставим $G_y \in p$ такое, что $y + G_y \subset U$. Так как p есть P-точка, то найдется $A \in p$ такое, что все множества $A \setminus F_n$, $A \setminus G_y$ конечны и $x + A \subset U$. Тогда конечны все множества $f^{-1}(n) \cap A$ и для любого конечного $K \subset U$ найдется конечное $H \subset A$ такое, что $K + A \setminus H \subset U$. Отображение f индуцирует на множестве A разбиение $\mathcal{A}$ на непустые конечные подмножества вида $f^{-1}(n) \cap A$. Для произвольного натурального $m > 0$ раскрасим множество $[f(A)]^m$ в два цвета следующим образом. Пусть $\{n_1, \dots, n_m\} \in [f(A)]^m$. Если $x + f^{-1}(n_1) \cap A + \dots + f^{-1}(n_m) \cap A \subset U$, то $\{n_1, \dots, n_m\}$ окрасим в белый цвет, иначе — в черный. Так как $f(p)$ рамсеевский, то найдется $\mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}$ такое, что $A_m = \bigcup \mathcal{A}_m \in p$ и $[f(A_m)]^m$ одноцветно. Легко убедится, что этот цвет белый. Так как p f-групповой, то найдется $C_m \in p$ такое, что $C_m \subset A_m$ и

$$\underbrace{f^{-1}(n) \cap C_m + \dots + f^{-1}(n) \cap C_m}_{m} \subset f^{-1}(n) \cap A_m \cup \{0\}.$$

Тогда

$$x + \underbrace{C_m + \dots + C_m}_{m} \subset U \cup \{x\}.$$

Так как p есть P-точка, то найдется $C \in p$ такое, что все множества $C \setminus C_m$ конечны. Теперь уже легко построить индуктивно последовательность $\{D_n : 0 < n < \omega\}$ подмножеств в C с конечными дополнениями такую, что $x + [D_1, D_2, \dots, D_n, \dots] \subset U \cup \{x\}$. Следовательно, множество $U \cup \{x\}$ открыто.

Случай 2: $\mathbb{B} \setminus U \in x + p$ для любого $x \in \operatorname{cl} U \setminus U$ и, следовательно, для любого $x \in \mathbb{B} \setminus U$.

Вначале выберем $A \in p$ такое, что все подмножества $f^{-1}(n) \cap A$ конечны и для любого конечного $K \subset \mathbb{B} \setminus U$ найдется конечное $H \subset A$ такое, что $K + A \setminus H \subset \mathbb{B} \setminus U$. Отображение f индуцирует на множестве A разбиение $\mathcal{A}$ на непустые конечные подмножества вида $f^{-1}(n)\cap A$. Зафиксируем $x \in \mathbb{B}\setminus U$ и для произвольного натурального $m > 0$ раскрасим множество $[f(A)]^m$ в два цвета следующим образом. Пусть $\{n_1, \dots, n_m\} \in [f(A)]^m$. Если $x + f^{-1}(n_1) \cap A + \dots + f^{-1}(n_m) \cap A \subset \mathbb{B} \setminus U$, то $\{n_1, \dots, n_m\}$ окрасим в белый цвет, иначе — в черный. Так как $f(p)$ рамсеевский, то найдется $\mathcal{A}_m(x) \subset \mathcal{A}$ такое, что $A_m(x) = \bigcup \mathcal{A}_m(x) \in p$ и $[f\big(A_m(x)\big)]^m$ одноцветно. Легко убедится, что этот цвет белый. Так как p f-групповой, то найдется $C_m(x) \in p$ такое, что $C_m(x) \subset A_m(x)$ и

$$\underbrace{f^{-1}(n) \cap C_m(x) + \dots + f^{-1}(n) \cap C_m(x)}_{m} \subset f^{-1}(n) \cap A_m(x) \cup \{0\}.$$

Тогда

$$x + \underbrace{C_m(x) + \dots + C_m(x)}_{m} \subset \mathbb{B} \setminus U.$$

Так как p есть P-точка, то найдется $C \in p$ такое, что конечны все множества $C \setminus C_m(x)$, где $x \in \mathbb{B} \setminus U$, $0 < m < \omega$. Теперь уже легко построить индуктивно последовательность $\{D_n : 0 < n < \omega\}$ подмножеств в C с конечными дополнениями такую, что $[D_1, D_2, \dots, D_n, \dots] \subset \mathbb{B} \setminus U$. Мы получили противоречие — множество U не касается нуля. Следовательно, случай 2 невозможен. □

§6. Равномерно и квазиравномерно дискретные ультрафильтры на экстремально несвязных топологических группах

Всюду в этом параграфе пусть p — произвольный неглавный ультрафильтр на $\mathbb{B}$, τ — произвольная групповая топология на $\mathbb{B}$, в которой p сходится к нулю, $\tau(p)$ — наибольшая групповая топология на $\mathbb{B}$, в которой p сходится к нулю, $\varkappa$ — индекс полноты p, k — дисперсионный характер p.

Подмножество $D \subset \mathbb{B}$ называется *равномерно дискретным в топологии* τ, если найдется окрестность U нуля $(\mathbb{B}, \tau)$ такая, что D U-дискретно. Последнее означает дизъюнктность семества $\{x+U : x \in D\}$. Ультрафильтр p называется *равномерно дискретным в топологии* τ, если существует $E \in p$ такое, что каждое подмножество $D \subset E$, не принадлежащее p, равномерно дискретно в топологии τ. Заметим, что такое подмножество E обладает следующим свойством: если q — неглавный ультрафильтр на $\mathbb{B}$, сходящийся к нулю в топологии τ и такой, что $E \in q$, то $q = p$.

Лемма 6.1. *Если p содержит независимое подмножество, то p равномерно дискретный в $\tau(p)$.*

Доказательство. Пусть E — независимое подмножество из $\mathbb{B}$, $E \in p$, $D \subset E$, $D \notin p$. Положим $U = \langle E \setminus D\rangle$. Тогда U — окрестность нуля в топологии $\tau(p)$ и D U-дискретно. □

Следствие 6.2. *Если p рамсеевский, то p равномерно дискретный в $\tau(p)$.*

Лемма 6.3. *Если p нетривиально f-групповой для некоторого отображения $f\colon \mathbb{B} \to Z$, то p не равномерно дискретный в $\tau(p)$.*

Доказательство. Допустим противное — существует $E \in p$ такое, что каждое подмножество из E, не принадлежащее p, равномерно дискретно в $\tau(p)$. Выберем $F \in p$ такое, что $0 \notin F \subset E$ и для каждого $z \in Z$ $f^{-1}(z) \cap F + f^{-1}(z) \cap F \subset f^{-1}(z) \cap E \cup \{0\}$. Обозначим $Z_F = \{z \in Z : f^{-1}(z) \cap F \neq \varnothing\}$ и для каждого $z \in Z_F$ выберем $g_z \in f^{-1}(z) \cap F$. Образуем множество $G = \{g_z : z \in Z_F\} \cup \{0\}$. Ясно, что $G \subset E \cup \{0\}$ и $G \notin p$. Следовательно, G U-дискретно для некоторой окрестности U нуля в топологии $\tau(p)$. Обозначим $A = U \cap F$, $Z_A = \{z \in Z : f^{-1}(z) \cap A \neq \varnothing\}$ и образуем множество $D = \bigcup\{g_z + f^{-1}(z) \cap A \cup \{0\} : z \in Z_A\}$. Тогда, с одной стороны, $D \subset E$ и $D \notin p$, а с другой стороны, D не равномерно дискретно в $\tau(p)$. Действительно, для любого $C \in p$ $f^{-1}(z) \cap A \cap C \neq \varnothing$ для некоторого $z \in Z_A$ и, следовательно, $(g_z + C \cup \{0\}) \cap D \neq \{g_z\}$. □

Следствие 6.4. *Если p — специальная P-точка, то p не равномерно дискретный в $\tau(p)$.*

Вопрос 6.5. *Верно ли, что если p равномерно дискретный в $\tau(p)$, то p содержит независимое подмножество?*

Ультрафильтр p называется *квазиравномерно дискретным в топологии* τ, если существует $E \in p$ и последовательность $\{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$ такие, что:

(i) $U_{\alpha+1} + U_{\alpha+1} \subset U_\alpha$;

(ii) $U_\alpha = \bigcap\{U_\beta : \beta < \alpha\}$, если α предельный, и $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \varkappa\} \cap E = \varnothing$;

(iii) $E_\alpha = (U_\alpha \setminus U_{\alpha+1}) \cap E$ равномерно дискретно;

(iv) каждое подмножество из E мощности $< k$ равномерно дискретно.

Заметим, что такое подмножество E сильно дискретно в топологии τ и, следовательно, если q — ультрафильтр на $\mathbb{B}$, сходящийся к нулю в топологии τ и такой, что $E \in q$, то $q = p$.

Лемма 6.6. *Если p есть P-точка, то p квазиравномерно дискретный в τ.*

Доказательство. Вначале выберем $A \in p$ такое, что $|A| = \omega$ и $0 \notin A$. Затем выберем последовательность $\{U_n : n < \omega\}$ окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$ такую, что $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ и $\bigcap\{U_n : n < \omega\} \cap A = \varnothing$. А затем выберем $E \in p$ такое, что $E \subset A$ и все подмножества $E_n = (U_n \setminus U_{n+1}) \cap E$ конечны. □

Лемма 6.7. *Пусть индекс полноты топологии τ не меньше $\varkappa$. Если p равномерно дискретный в τ, то p квазиравномерно дискретный в τ.*

Доказательство. Вначале выберем $E \in p$ такое, что $0 \notin E$ и каждое подмножество из E, не принадлежащее p, равномерно дискретно. А затем построим индуктивно последовательность $\{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$, удовлетворяющую условиям (i), (ii) из определения квазиравномерно дискретного ультрафильтра. □

Следствие 6.8. *Пусть $\varkappa = \omega$ либо $\tau = \tau(p)$. Если p равномерно дискретный в τ, то p квазиравномерно дискретный в τ.*

Доказательство. Если $\varkappa = \omega$, то, очевидно, индекс полноты топологии τ не меньше $\varkappa$. Если же $\varkappa > \omega$ и $\tau = \tau(p)$, то базу окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$ образуют подгруппы $\langle A \rangle$, где $A \in p$, и опять индекс полноты топологии τ не меньше $\varkappa$. □

Лемма 6.9. *Если p квазиравномерно дискретный, то существуют $E \in p$ и последовательность $\{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) $U_{\alpha+1} + U_{\alpha+1} \subset U_\alpha$;

(ii) $U_\alpha = \bigcap\{U_\beta : \beta < \alpha\}$, *если* α *предельный, и* $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \varkappa\} \cap E = \varnothing$;

(iii) $E_\alpha = (U_\alpha \setminus U_{\alpha+1}) \cap E$ $(U_{\alpha+1} + U_{\alpha+1})$*-дискретно и* $E_\alpha + U_{\alpha+1} \subset U_\alpha \setminus (U_{\alpha+1} + U_{\alpha+1})$;

(iv) каждое подмножество из E мощности $< k$ равномерно дискретно.

Доказательство. Ограничимся рассмотрен случая $\varkappa = \omega$. В общем случае рассуждения полностью аналогичны.

Выберем $F \in p$ и последовательность $\{V_n : n < \omega\}$ окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$;

2) $\bigcap\{V_n : n < \omega\} \cap F = \varnothing$;

3) $F_n \cup \{0\}$ $(V_{n+2} + V_{n+2} + V_{n+2})$-дискретно, где $F_n = (V_n \setminus V_{n+1}) \cap F$.

Разобьем ω на две части A_0, A_1, соответствующие четным и нечетным натуральным числам. Тогда для одной из этих частей, скажем A_0, $\bigcup\{F_m : m \in A_0\} \in p$. Положим $E_n = F_{2n}$, $E = \bigcup\{E_n : n < \omega\}$, $U_n = V_{2n} + V_{2n+1}$. Тогда $\bigcap\{U_n : n < \omega\} \cap E = \varnothing$, $U_{n+1} + U_{n+1} = V_{2n+2} + V_{2n+3} + V_{2n+2} + V_{2n+3} = V_{2n+2} + V_{2n+2} + V_{2n+3} + V_{2n+3} \subset V_{2n+1} + V_{2n+2} \subset U_n$, $E_n + U_{n+1} = F_{2n} + V_{2n+2} + V_{2n+3} \subset V_{2n} + V_{2n+2} + V_{2n+3} \subset V_{2n} + V_{2n+1} = U_n$ и нам осталось проверить $(U_{n+1} + U_{n+1})$-дискретность подмножества $E_n \cup \{0\}$. Но это следует из включения $U_{n+1} + U_{n+1} = V_{2n+2} + V_{2n+3} + V_{2n+2} + V_{2n+3} \subset V_{2n+2} + V_{2n+2} + V_{2n+2}$, равенства $E_n \cup \{0\} = F_{2n} \cup \{0\}$ и условия 3). □

Лемма 6.10. *Если p удовлетворяет условиям (i)–(iii) из определения квазиравномерно дискретного ультрафильтра, а τ экстремально несвязна, то для любых $E \in p$ и семейства $\{U(x) : x \in E\}$ окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$ множество $U = \bigcup\{x + U(x) : x \in E\} \cup \{0\}$ также будет окрестностью нуля.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся $E \in p$, последовательность $\{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ и семейство $\{U(x) : x \in E\}$ открыто-замкнутых окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$ такие, что выполняются условия (i)–(iii) из определения квазиравномерно дискретного ультрафильтра и множество $U = \bigcup\{x + U(x) : x \in E\} \cup \{0\}$ не является окрестностью нуля. Отметим, что U открыто и касается нуля. Далее, так как E_α равномерно дискретно, а $U(x)$ открыто-замкнуты, то можно считать, что $\bigcup\{x + U(x) : x \in E_\alpha\}$ открыто-замкнуто и содержится в $U_\alpha \setminus U_{\alpha+1}$. Но тогда $V = U_0 \setminus U = \bigcup\big\{(U_\alpha \setminus U_{\alpha+1}) \setminus \bigcup\{x + U(x) : x \in E_\alpha\} : \alpha < \varkappa\big\}$ открыто, касается нуля и дизъюнктно с U, — противоречие. □

Следствие 6.11. *Если p удовлетворяет условиям (i)–(iii) из определения квазиравномерно дискретного ультрафильтра, а τ экстремально несвязна, то дисперсионный характер любого сходящегося неглавного ультрафильтра на $(\mathbb{B}, \tau)$ не меньше k.*

Доказательство. Возьмем в $(\mathbb{B}, \tau)$ произвольное подмножество F такое, что $0 \notin F$, $|F| < k$, и построим окрестность нуля, дизъюнктную с F. Выберем $E \in p$ и семейство $\{U(x) : x \in E\}$ открестностей нуля такие, что семейство $\{x + U(x) : x \in E\}$ дизъюнктно.

Рассмотрим множество $G = \{x \in E : (x + U(x)) \cap F \neq \varnothing\}$. Очевидно, $|G| < k$ и, значит, $E \setminus G \in p$. А значит, по лемме 6.10 $U = \bigcup\{x + U(x) : x \in E \setminus G\} \cup \{0\}$ — окрестность нуля. По построению $U \cap F = \varnothing$. □

Теорема 6.12. *Если τ экстремально несвязна, а p квазиравномерно дискретный в τ, то p есть либо рамсеевский ультрафильтр, либо специальная P-точка.*

Доказательство. Выберем $E \in p$ и последовательность $\{U_\alpha : \alpha < \varkappa\}$ окрестностей нуля $(\mathbb{B}, \tau)$, предоставляемые леммой 6.9. По лемме 6.10 множество $U = \bigcup\{E_\alpha + U_{\alpha+1} : \alpha < \varkappa\} \cup \{0\}$ будет окрестностью нуля. Для произвольных открытой окрестности нуля $V \subset U$, $\alpha < \varkappa$ и $x \in E_\alpha$ обозначим $V(x) = (x + U_{\alpha+1}) \cap V + x$, $V[\alpha] = \{x + V(x) : x \in E_\alpha \cap V\}$. □

Лемма 6.13. *Существует $W \in p$ такое, что $|W \cap E_\alpha| < k$.*

Доказательство. Пусть $E = \{x_\gamma : \gamma < k\}$. Построим открытую окрестность нуля $V = \bigcup\{x_\gamma + V(x_\gamma) : \gamma < k\} \cup \{0\} \subset U$ такую, что для каждого $\gamma < k$ множество $\{x_\beta : \beta \leq \gamma\}$ $V(x_\gamma)$-дискретно. Выберем открытую окрестность нуля W такую, что $W + W \subset V$, и докажем, что $|W \cap E_\alpha| < k$. Допустим противное. Возьмем произвольное $a \in X = W \cap E_\alpha$ и образуем множество $Y = a + X \setminus \{a\}$. Тогда для любого $y \in Y$ подмножество $y + W(a)$ содержится в некотором множестве семейства $V[\alpha]$. Более того, для любых различных $y, z \in Y$ подмножества $y \in W(a)$ и $z + W(a)$ содержатся в различных множествах семейства $V[\alpha]$. Чтобы получить противоречие, нам достаточно убедится в следующем: для любой окрестности нуля $\mathcal{N}$ найдется $\gamma_0 < k$ такое, что $x + \mathcal{N} \subset V(x_\gamma)$ для всех $x \in \mathbb{B}$, $\gamma \geq \gamma_0$. Действительно, пусть $x_\beta, x_\gamma \in \mathcal{N}$, $\beta < \delta \leq \gamma_0 \leq \gamma$, $x \in \mathbb{B}$. Тогда $(x_\beta + V(x_\gamma)) \cap (x_\delta + V(x_\gamma)) = \varnothing$, откуда $x_\beta + x_\gamma \notin V(x_\gamma) + V(x_\gamma)$ и, следовательно, $\{x + x_\beta, x + x_\delta\} \not\subset V(x_\gamma)$. □

Пусть $f : \mathbb{B} \to \varkappa$ — отображение такое, что $f(x) = \alpha$, если $x \in E_\alpha$.

Лемма 6.14. *Ультрафильтр p f–групповой.*

Доказательство. По лемме 6.13 можно считать, что $|E_\alpha| < k$. Положим $F_\alpha = (E_\alpha + E_\alpha) \setminus (E_\alpha \cup \{0\})$, $F = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \varkappa\}$. Заметим, что $F_\alpha \subset U_\alpha + U_\alpha$, $F_\alpha \cap U_{\alpha+1} = \varnothing$ и, значит, $\bigcup\{E_\beta + U_{\beta+1} : \alpha \neq \beta < \varkappa\} \cap F_\alpha = \varnothing$. По следствию 6.11 $\operatorname{cl} F_\alpha \cap E_\alpha = \varnothing$. Следовательно, можно выбрать семейство $\{V(x) : x \in E_\alpha\}$ открытых окрестностей нуля такое, что $V(x) \subset U(x)$, $\bigcup\{x + V(x) : x \in E_\alpha\} \cap F_\alpha = \varnothing$, и тогда $\bigcup\{x + V(x) : x \in E\} \cap F = \varnothing$.

Для произвольного $A \in p$, $A \subset E$, образуем окрестность нуля $V = \bigcup\{x + V(x) : x \in A\} \cup \{0\}$, выберем окрестность нуля W такую, что $W + W \subset V$, и положим $C = W \cap E$. Тогда $C \cap E_\alpha + C \cap E_\alpha \subset \bigcup V[\alpha] \cap E_\alpha \cup \{0\} = A \cap E_\alpha \cup \{0\}$ и, значит, $f^{-1}(\alpha) \cap C + f^{-1}(\alpha) \cap C \subset f^{-1}(\alpha) \cap A \cup \{0\}$. □

Из лемм 6.14, 5.1, 6.13 следует существование такого $C \in p$, что $|E_\alpha \cap C| < \omega$, если $\varkappa = \omega$, и $|E_\alpha \cap C| \leq 1$, если $\varkappa > \omega$.

Лемма 6.15. *Для любого разбиения $\{A_\gamma : \gamma < \varkappa\}$ множества E такого, что $A_\gamma \notin p$, найдется $A \in p$ такое, что $|f(A \cap A_\gamma)| \leq 1$.*

Доказательство. Каждый элемент $x \in E$ принадлежит некоторому $E_{\alpha(x)}$ и некоторому $A_{\gamma(x)}$. Образуем множество $F = \bigcup\{x + U_{\alpha(x)+1} \cap A_{\gamma(x)} : x \in E\}$. Заметим, что $\operatorname{cl} F \cap E = \varnothing$. Выберем окрестности нуля V, W такие, что $V \cap F = \varnothing$, $W + W \subset V$, и положим $A = W \cap E$. □

Из леммы 6.15 и предшествуещего ей предложения следует, что ультрафильтр $f(p)$ рамсеевский, а ультрафильтр p есть P-точка, если $\varkappa = \omega$, и рамсеевский ультрафильтр, если $\varkappa > \omega$.

Из утверждений 6.12, 6.8, 6.4 вытекает

Следствие 6.16.*Пусть $\varkappa = \omega$. Если τ экстремально несвязна, а p равномерно дискретный в τ, то p рамсеевский.*

Из утверждений 6.12, 4.2, 5.6, 6.2, 6.8, 6.6 вытекает

Следствие 6.17. *Топология $\tau(p)$ экстремально несвязна, а ультрафильтр p квазиравномерно дискретный в ней тогда и только тогда, когда p есть либо рамсеевский ультрафильтр, либо специальная P-точка.*

Из утверждений 6.12, 6.8, 6.4, 4.2, 6.2 вытекает

Следствие 6.18. *Ультрафильтр p рамсеевский тогда и только тогда, когда топология $\tau(p)$ экстремально несвязна, а p равномерно дискретный в ней.*

Вопрос 6.19. *Верно ли, что если τ экстремально несвязна, а p равномерно дискретный в τ, то $\tau = \tau(p)$?*

Вопрос 6.20. *Верно ли, что если τ экстремально несвязна, а p рамсеевский, то $\tau = \tau(p)$?*

ЛИТЕРАТУРА

1. Сирота С. *Произведение топологических групп и экстремальная несвязность*// Матем. сб. – 1969. – Т.79, №2. – С.179–192.
2. Малыхин В.И. *Экстремально несвязные и близкие к ним группы*// ДАН СССР. – 1975. – Т.220, №1. – С.27–30.
3. Blass A., Hindman N. *On strongly summable and union ultrafilters*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – V.304, №1. – P.83–99.
4. Протасов И.В. *Фильтры и топологии на полугруппах*// Матем. Студiї. – 1994. – Вип.3. – С.15–28.
5. Зеленюк Е.Г. *Топологические группы с конечными полугруппами ультрафильтров*// Матем. Студiї. – 1996. – Т.6. – С.41–52.
6. Протасов И.В. *Неразложимые топологии на группах* // Укр. матем. ж. – 1998. – Т.50, №12. – С.1646–1655.
7. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. – Новосибирск: Ин-т математики, 1995. – 132 с.
8. Нерешенные задачи топологической алгебры. – Кишинев: Штиинца, 1985. – 40 с.
9. Протасов И.В. *Абсолютно разложимые группы*// Укр. матем. ж. – 1996. – Т.48, №3. – С.383–392.
10. Зеленюк Е.Г. *Разложимость топологических групп*// Укр. матем. ж. – 1999. – Т.51, №1. – С.41–47.
11. Зеленюк Е.Г. *О топологических группах с конечными полугруппами ультрафильтров* // Матем. Студiї. – 1997. – Т.7, №2. – С.139–144.
12. Hindman N. *Ultrafilters and combinatorical number theory* // Lecture Notes in Math. – 1979. – V.751. – P.49–184.

13. Ruppert W. *Compact semitopological semigroups: An intrinsic theory*// Lecture Notes in Math. – 1984. – V.1079. – P.1–260.

14. Протасов И.В. *Ультрафильтры и топологии на группах*// Сиб. матем. ж. – 1993. – Т.34, №5. – С.163–180.

15. Зеленюк Е.Г. Конечные группы в $\beta\mathbb{N}$ тривиальны. – Киев, 1996. – 12с. (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 96.3).

16. Zelenjuk E.G. *Finite groups in* $\beta\mathbb{N}$ *are trivial*// Semigroup Forum. – 1997. – V.55. – P.131–132.

17. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974. – 424 с.

18. Shelah S. Proper forcing. – Berlin: Springer-Verlag, 1982.

19. Протасов И.В. *Дискретные подмножества топологических групп*// Матем. заметки. – 1994. – Т.55, №1. – С.150-151.

20. Comfort W.W. *Ultrafilters: some old and some new results*// Bull. Amer. Math, Soc. – 1977. – V.83, №4. – P.417–455.

21. Зеленюк Е.Г., Протасов И.В. *Топологии на абелевых группах*// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – Т.54, №5. – С.1090–1107.

22. Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств. – М.: Наука, 1982. – 376с.

23. Protasov I. Combinatorics of numbers. – Mathematical Studies. Monograph Series, V.2. – Lviv: VNTL, 1997.

ИППММ НАН Украины, Львов

Поступило 27.08.1998