УДК 512.535

ГРУПИ АВТОМОРФІЗМІВ МАКСИМАЛЬНИХ НІЛЬПОТЕНТНИХ ПІДНАПІВГРУП НАПІВГРУПИ $IS(M)$

О.Г. Ганюшкін, С.Г. Темніков, Г.М. Шафранова

O.G. Ganyushkin, S.G. Temnikov, H.M. Shafranova. *Groups of automorphisms for maximal nilpotent subsemigroups of the semigroup* $IS(M)$, Matematychni Studii, **13** (2000) 11–22.

Let $IS(M)$ be the symmetric inverse semigroup of all partial permutations of at most countable set M. It is proved that the group of automorphisms of a subsemigroup $T \subset IS(M)$, which is maximal among all subsemigroups of a given nilpotence degree, can be presented as a semidirect product of two factors, each of which is the Cartesian sum of symmetric groups.

А.Г. Ганюшкин, С.Г. Темников, А.Н. Шафранова. *Группы автоморфизмов максимальных нильпотентных подполугрупп полугруппы* $IS(M)$ // Математичні Студії. – 2000. – Т.13, №1. – С.11–22.

Пусть $IS(M)$ — симметрическая инверсная полугруппа всех частичных подстановок не более чем счетного множества M. Доказано, что группа автоморфизмов подполугруппы $T \subset IS(M)$, которая является максимальной среди полугрупп данного класса нильпотентности, раскладывается в полупрямое произведение двух множителей, каждый из которых является декартовой суммой симметрических групп.

1. Вступ. Престон [1] і Вагнер [2] довели, що кожна інверсна напівгрупа занурюється в деяку інверсну симетричну напівгрупу. Це означає, що інверсні симетричні напівгрупи в теорії інверсних напівгруп відіграють роль, аналогічну до ролі симетричних груп у теорії груп. Тому можна зрозуміти інтерес до вивчення властивостей інверсної симетричної напівгрупи і, зокрема, різних класів її піднапівгруп.

Напівгрупа з нулем T називається нільпотентною ступеня k, якщо $T^k = 0$ і k є найменшим числом із такою властивістю. Для скінченної множини M будова нільпотентних піднапівгруп із симетричної інверсної напівгрупи $IS(M)$ всіх часткових підстановок множини M вивчалась в [3], [4], а для зліченної множини M — в [5].

У цій статті ми описуємо структуру групи автоморфізмів піднапівгруп з $IS(M)$, максимальних серед нільпотентних піднапівгруп даного ступеня нільпотентності. Ми розглядаємо лише ті нільпотентні піднапівгрупи з $IS(M)$, нуль яких збігається з нулем напівгрупи $IS(M)$. Як показано в [4], загальний випадок дуже легко зводиться до цього.

Одноелементну множину $\{a\}$ інколи позначатимемо просто a.

2. Основні результати. У [3] для скінченної множини M, а в [5] для зліченної, доведена така теорема.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20B27, 20B25, 20M20.

Теорема 1. *Існує бієктивна відповідність між максимальними нільпотентними піднапівгрупами ступеня нільпотентності k напівгрупи $IS(M)$ та впорядкованими розбиттями $\rho = (N_1,\ N_2, \ldots,\ N_k)$ множини M на k непорожніх блоків. Кожному розбиттю $\rho = (N_1, N_2, \ldots,\ N_k)$ відповідає напівгрупа*

$$T_\rho = \{a \in IS(M) : x \in \mathrm{dom}(a) \cap N_i \wedge a(x) \in N_j \Rightarrow N_i < N_j\}.$$

Протягом роботи через T позначатимемо фіксовану довільно вибрану максимальну нільпотентну піднапівгрупу ступеня k з $IS(M)$, через $\rho = (N_1, N_2, \ldots, N_k)$ — відповідне їй впорядковане розбиття, а через $\mathrm{Aut}(T)$ — групу автоморфізмів напівгрупи T.

Зауважимо, що пряма сума $\oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ симетричних груп на блоках розбиття ρ є піднапівгрупою напівгрупи $IS(M)$.

Нехай $\varphi \in \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$. Розглянемо дію $\overline{\varphi} : a \mapsto a^\varphi$ групи $\oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ на напівгрупі T.

Твердження 1. *Відображення $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ є зануренням групи $(\oplus_{i=1}^{k} S_{N_i},\ T)$ у групу $\mathrm{Aut}(T)$.*

Доведення. Зафіксуємо деякий елемент φ з групи підстановок $(\oplus_{i=1}^{k} S_{N_i},\ T)$ і покажемо, що $\overline{\varphi} \in \mathrm{Aut}(T)$. Справді, оскільки для довільних $a,\ b \in T$

$$(ab)^\varphi = \varphi^{-1}(ab)\varphi = (\varphi^{-1}a\varphi)(\varphi^{-1}b\varphi) = a^\varphi b^\varphi,$$

то $\overline{\varphi}$ є гомоморфізмом напівгрупи T.

Для доведення ін'єктивності $\overline{\varphi}$ виберемо довільні елементи a і b з T, що задовольняють умову $a \neq b$. Якщо $\mathrm{dom}(a) \neq \mathrm{dom}(b)$, то, зауваживши, що $\mathrm{dom}(a^\varphi) = \varphi(\mathrm{dom}(a))$, $\mathrm{dom}(b^\varphi) = \varphi(\mathrm{dom}(b))$, і скориставшись бієктивністю відображення $\varphi \in \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$, дістаємо, що $\mathrm{dom}(a^\varphi) \neq \mathrm{dom}(b^\varphi)$, звідки $a^\varphi \neq b^\varphi$. Якщо ж $\mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(b)$, то існує такий елемент $x \in \mathrm{dom}(a)$, що $a(x) \neq b(x)$. Зауважимо, що $\varphi(x) \in \mathrm{dom}(a^\varphi) \cap \mathrm{dom}(b^\varphi)$ і припустимо, що $a^\varphi(\varphi(x)) = b^\varphi(\varphi(x))$. Але тоді

$$a(x) = (\varphi a^\varphi \varphi^{-1})(x) = (\varphi b^\varphi \varphi^{-1})(x) = b(x),$$

що неможливо. Отже, $a^\varphi(\varphi(x)) \neq b^\varphi(\varphi(x))$, звідки $a^\varphi \neq b^\varphi$.

Встановимо сюр'єктивність $\overline{\varphi}$. Для довільної часткової підстановки $a \in T$ покладемо $b = \varphi a \varphi^{-1}$. Тоді

$$a = \varphi^{-1}(\varphi a \varphi^{-1})\varphi = \varphi^{-1} b \varphi = b^\varphi.$$

Нарешті покажемо, що відображення $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ ін'єктивне. Виберемо такі $\varphi_1, \varphi_2 \in \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$, що $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Тоді існує такий елемент $x \in M$, що $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Припустимо спочатку, що $x \notin N_k$ і розглянемо деякий елемент a з T рангу 1 з $\mathrm{dom}(a) = \{x\}$. Тоді

$$\mathrm{dom}(\overline{\varphi_1}(a)) = \varphi_1(x) \neq \varphi_2(x) = \mathrm{dom}(\overline{\varphi_2}(a)).$$

Отже, $\overline{\varphi_1} \neq \overline{\varphi_2}$. Припустимо тепер, що $x \in N_k$ і розглянемо деякий елемент a з T рангу 1 з $\mathrm{ran}(a) = x$. Тоді

$$\mathrm{ran}(\overline{\varphi_1}(a)) = \varphi_1(x) \neq \varphi_2(x) = \mathrm{ran}(\overline{\varphi_2}(a)).$$

Отже, і в цьому випадку $\overline{\varphi_1} \neq \overline{\varphi_2}$. □

У подальшому ми ототожнюватимо групу $\oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ і її образ при зануренні в $\mathrm{Aut}(T)$.

Називатимемо часткову підстановку $a \in T$ *розкладною*, якщо існують такі $b, c \in T$, що $a = bc$, і *нерозкладною* в протилежному випадку.

Твердження 2. *Для кожного елемента a з T існує розклад $a = a_1 a_2 \dots a_r$ у добуток нерозкладних елементів $a_1, a_2, \dots, a_r$.*

Доведення. Нехай $x_1 \in N_1$, $x_2 \in N_2$ і $b \in T$ – такий елемент рангу 1, що $b(x_1) = x_2$. Тоді $0 = bb$ – шуканий розклад для 0. Припустимо тепер, що для деякого ненульового елемента a з T такого розкладу не існує. Тоді у розкладі $a = bc$ принаймні одна з часткових підстановок b, c повинна бути розкладною. Без обмеження загальності можна вважати, що b – розкладна і $b = b_1 c_1$. Далі, у розкладі $a = b_1 c_1 c$ принаймні одна з часткових підстановок b_1, c_1, c повинна бути розкладною. Міркуючи так і далі, для довільного натурального t можна побудувати розклад a на добуток t елементів з T. Але це неможливо для $t \geq k$, оскільки напівгрупа T має ступінь нільпотентності k, а отже, добуток довільних k і більше елементів з T дорівнює нулю. □

Для нерозкладного елемента a з T покладемо

$$\overline{\mathrm{dom}}(a) = \mathrm{dom}(a) \setminus \{x \in \mathrm{dom}(a) : x \in N_1 \text{ і } a(x) \in N_k\}.$$

Для довільної часткової підстановки a з T через a_* позначимо її обмеження на $\overline{\mathrm{dom}}(a)$, якщо a нерозкладна, і покладемо $a_* = a$, якщо a розкладна. На множині $T \setminus \{0\}$ визначимо відношення еквівалентності $\sim$ правилом $a \sim b \Leftrightarrow a_* = b_*$ і поширимо це відношення на всю напівгрупу T, вважаючи, що $\{0\}$ є окремим класом еквівалентності.

Твердження 3. *Відношення $\sim$ є конгруенцією на напівгрупі T.*

Доведення. Встановимо стабільність справа відношення $\sim$. Нехай a і b — такі елементи з $T \setminus 0$, для яких $a \sim b$, f — довільна часткова підстановка з T. Оскільки af і bf — розкладні елементи, то $(af)_* = af$, $(bf)_* = bf$. Крім цього, з побудови a_* випливає, що $af = a_* f$. Подібно, $bf = b_* f$. З чотирьох останніх рівностей і з того, що $a_* = b_*$, маємо $(af)_* = (bf)_*$, звідки $af \sim bf$. Стабільність зліва відношення $\sim$ встановлюється подібно. □

Теорема 2. *Нехай $T = \bigcup_{i \in I} M_i$ — розклад напівгрупи T в об'єднання класів еквівалентності за $\sim$ і $k \geq 3$. Через $\oplus^{\mathrm{D}}_{i \in I} S_{M_i}$ позначимо декартову суму симетричних груп, що діють на класах еквівалентності. Тоді $\mathrm{Aut}(T)$ розкладається в напівпрямий добуток*

$$\mathrm{Aut}(T) = (\oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}) \rtimes (\oplus^{\mathrm{D}}_{i \in I} S_{M_i}).$$

Теорема 3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, 2, \dots, n\}$, T — максимальна нільпотентна піднапівгрупа з $IS(M)$ ступеня нільпотентності n. Тоді*

$$\mathrm{Aut}(T) \simeq \underbrace{C_2 \oplus \dots \oplus C_2}_{r}.$$

для деякого натурального r.

Доведення. Достатньо зауважити, що всі блоки розбиття ρ одноелементні, а кожен з блоків M_s одно- або двоелементний, і застосувати теорему 2. □

Теорема 4. *Нехай T — максимальна нільпотентна піднапівгрупа з $IS(M)$ ступеня нільпотентності 2. Через S^0_T позначимо стабілізатор точки $\{0\}$ симетричної групи S_T. Тоді*

$$\mathrm{Aut}(T) = S^0_T.$$

Доведення. Очевидно, що $\mathrm{Aut}(T)$ є підгрупою групи S_T^0. Нехай $\sigma \in S_T^0$. Оскільки для довільних $a,\, b \in T$

$$\sigma(ab) = \sigma(0) = 0 = \sigma(a)\sigma(b),$$

то $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$. Отже, $\mathrm{Aut}(T) = S_T^0$. □

3. Допоміжні твердження. Для доведення теореми 2 нам потрібні наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $r > 1$. *Тоді для довільних* $a_1, a_2, \ldots, a_r \in T$

$$a_1 a_2 \ldots a_r = a_{1*} a_{2*} \ldots a_{r*}.$$

Доведення. Твердження леми легко доводиться індукцією за кількістю елементів r. □

Лема 2. *Нехай* $\pi \in \oplus_{i \in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i}$, $a \in T$. *Тоді*

$$\pi(a) \sim a.$$

Доведення. Справедливість твердження леми безпосередньо випливає з визначення відношення $\sim$. □

Лема 3. *Для довільних* $\varphi \in \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ *і нерозкладної* $a \in T$

$$(a_*)^{\varphi} = (a^{\varphi})_*.$$

Доведення. Якщо $a_* = 0$, то $\mathrm{dom}(a) \subseteq N_1$, $\mathrm{ran}(a) \subseteq N_k$. Звідси $\mathrm{dom}(a^{\varphi}) \subseteq N_1$, $\mathrm{ran}(a^{\varphi}) \subseteq N_k$, отже $(a_*)^{\varphi} = (a^{\varphi})_* = 0$. Вважаємо тепер, що $a_* \neq 0$. Треба показати, що $\mathrm{dom}((a_*)^{\varphi}) = \mathrm{dom}((a^{\varphi})_*)$, і що $(a_*)^{\varphi}(x) = (a^{\varphi})_*(x)$ для довільного $x \in \mathrm{dom}((a_*)^{\varphi})$. З визначення a^{φ} випливає, що $\mathrm{dom}(a^{\varphi}) = \varphi(\mathrm{dom}(a))$, отже,

$$\mathrm{dom}((a^{\varphi})_*) = \varphi(\mathrm{dom}(a) \setminus \{x \in \mathrm{dom}(a) \cap N_1 : a(x) \in N_k\}).$$

Подібно, оскільки

$$\mathrm{dom}(a_*) = \mathrm{dom}(a) \setminus \{x \in \mathrm{dom}(a) \cap N_1 : a(x) \in N_k\},$$

то

$$\mathrm{dom}((a_*)^{\varphi}) = \varphi(\mathrm{dom}(a) \setminus \{x \in \mathrm{dom}(a) \cap N_1 : a(x) \in N_k\}).$$

Візьмемо довільне $y = \varphi(x) \in \mathrm{dom}((a_*)^{\varphi}) = \mathrm{dom}((a^{\varphi})_*)$ Маємо: $(a_*)^{\varphi}(y) = \varphi(a_*(x)) = \varphi(a(x))$. З іншого боку,

$$(a^{\varphi})_*(y) = a^{\varphi}(y) = \varphi(a(x)).$$

□

Лема 4. *Нехай* $a, b \in T$, $\varphi \in \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$. *Тоді*

$$a \sim b \Rightarrow a^{\varphi} \sim b^{\varphi}.$$

Доведення. Якщо принаймні одна з часткових підстановок a, b — розкладна, то з $a \sim b$ випливає, що $a = b$, а тому твердження леми виконується.

Припустимо тепер, що a і b — нерозкладні. Нехай $a \sim b$. Це означає, що $a_* = b_*$, тому

$$(a_*)^{\varphi} = \varphi^{-1} a_* \varphi = \varphi^{-1} b_* \varphi = (b_*)^{\varphi}.$$

Звідси і з леми 3 випливає, що $(a^{\varphi})_* = (b^{\varphi})_*$, тобто $a^{\varphi} \sim b^{\varphi}$. □

Якщо для $a \in T$ можна вказати такий $x \in \mathrm{dom}(a) \cap N_i$, що і $a(x) = y \in N_j$, то говоритимемо, що a має *стрілку* $x \mapsto y$ з блоку N_i в блок N_j.

Лема 5. *Припустимо, що $a_1a_2 \ldots a_{k-1} \neq 0$ для $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in T$. Тоді для кожного i, $1 \leq i \leq k-1$, a_i має стрілку з N_i в N_{i+1}.*

Доведення. Оскільки існує таке $x \in M$, що $a_1a_2 \ldots a_{k-1}(x) \neq 0$, то

$$N_{a_1a_2\ldots a_{k-1}(x)} > N_{a_1a_2\ldots a_{k-2}(x)} > \cdots > N_{a_1(x)} > N_x,$$

де через N_x позначено блок, що містить x, і для кожного i $(1 \leq i \leq k-1)$ через $N_{a_1a_2\ldots a_i(x)}$ позначено блок, що містить $a_1a_2 \ldots a_i(x)$. Тому,

$$N_x = N_1,\ N_{a_1(x)} = N_2,\ \ldots,\ N_{a_1a_2\ a_{k-1}(x)} = N_k$$

і a_i має стрілку з N_i в N_{i+1}. □

Лема 6. *Нехай $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$ і a — така часткова підстановка з T, що a_* має ранг 1, при цьому область визначення a_* належить до блоку N_i, а область значень — до блоку N_{i+1}. Тоді $(\sigma(a))_*$ також має ранг 1, при цьому область визначення $(\sigma(a))_*$ належить до блоку N_i, а область значень — до блоку N_{i+1}.*

Доведення. Нехай $\mathrm{dom}(a_*) = \{x\} \subset N_i$, $\mathrm{ran}(a_*) = \{y\} \subset N_{i+1}$.

Виберемо представників $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+2}, \ldots, x_k$ у блоках $N_1, N_2, \ldots, N_{i-1}, N_{i+2}, \ldots, N_k$ відповідно. Через $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{k-1}$ позначимо такі елементи рангу 1 з T, що

$$a_1(x_1) = x_2,\ a_2(x_2) = x_3,\ \ldots,\ a_{i-1}(x_{i-1}) = x,\ a_{i+1}(y) = x_{i+2},\ \ldots,\ a_{k-1}(x_{k-1}) = x_k.$$

Оскільки $a_1a_2 \ldots a_{i-1}aa_{i+1} \ldots a_{k-1} \neq 0$, то $\sigma(a_1)\sigma(a_2) \ldots \sigma(a_{i-1})\ \sigma(a)\ \sigma(a_{i+1}) \ldots \sigma(a_{k-1}) \neq 0$. Звідси і з леми 5 випливає, що $\sigma(a)$, а отже і $(\sigma(a))_*$, має стрілку з N_i в N_{i+1}.

Розглянемо правий анулятор

$$\mathrm{Ann_R}\, T = \{\alpha \in T\ : (\forall \beta \in T)[\alpha\beta = 0]\}.$$

Зауважимо, що для довільного $b \in T$ множина $bT \cap \mathrm{Ann_R}\, T$ складається з усіх тих елементів з T, область визначення яких є підмножиною $\mathrm{dom}(b)$, а область значень міститься у блоці N_k. Звідси, враховуючи, що $\mathrm{rank}(a) = 1$, випливає, що для жодного $b \in T$ включення

$$\begin{cases} \varnothing \subset bT \cap \mathrm{Ann_R}\, T, \\ bT \cap \mathrm{Ann_R}\, T \subset aT \cap \mathrm{Ann_R}\, T \end{cases} \tag{1}$$

не можуть виконуватися одночасно.

Тепер зауважимо, що $\sigma(\mathrm{Ann_R}\, T) = \mathrm{Ann_R}\, T$. Звідси та з (1) випливає, що для жодного $b \in T$ включення

$$\begin{cases} \varnothing \subset bT \cap \mathrm{Ann_R}\, T; \\ bT \cap \mathrm{Ann_R}\, T \subset \sigma(a)T \cap \mathrm{Ann_R}\, T \end{cases}$$

також не можуть виконуватися одночасно. Останнє означає, що $\mathrm{rank}((\sigma(a))_*) = 1$. □

Лема 7. *Нехай $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$, a і b — такі елементи з T, що a_* і b_* рангу 1, при цьому області визначення a_* і b_* належать до блоку N_i, а області значень — до блоку N_{i+1}. Тоді:*

1) $\mathrm{dom}(a_*) = \mathrm{dom}(b_*) \Leftrightarrow \mathrm{dom}((\sigma(a))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(b))_*)$;

2) $\mathrm{ran}(a_*) = \mathrm{ran}(b_*) \Leftrightarrow \mathrm{ran}((\sigma(a))_*) = \mathrm{ran}((\sigma(b))_*)$.

Доведення. Достатньо довести лише справедливість імплікацій

$$\mathrm{dom}(a_*) = \mathrm{dom}(b_*) \Rightarrow \mathrm{dom}((\sigma(a))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(b))_*), \tag{2}$$
$$\mathrm{ran}(a_*) = \mathrm{ran}(b_*) \Rightarrow \mathrm{ran}((\sigma(a))_*) = \mathrm{ran}((\sigma(b))_*). \tag{3}$$

Зворотні імплікації тоді випливатимуть з (2) і (3) для автоморфізму $\tau = \sigma^{-1}$.

Припустимо, що $\mathrm{dom}(a_*) = \{x_i^1\}, \mathrm{dom}(b_*) = \{x_i^2\}$, $\mathrm{ran}(a) = \{x_{i+1}^1\}, \mathrm{ran}(b) = \{x_{i+1}^2\}$. Для доведення справедливості імплікації (2) припустимо, що $x_i^1 = x_i^2$, і розглянемо два можливі випадки.

A) $i < k-1$. Розглянемо множини aT і bT. Кожна з них складається з ніде не визначеного перетворення, а також з усіх елементів рангу 1, область визначення яких збігається з $\{x_i^1\}$, а область значень належить до одного з блоків $N_{i+2}, \ldots, N_k$. Отже, $aT = bT$. Але оскільки σ — автоморфізм, то з останньої рівності випливає, що $\sigma(a)T = \sigma(b)T$. Звідси дістаємо, що $(\sigma(a))_*T = (\sigma(b))_*T$, звідки $\mathrm{dom}((\sigma(a))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(b))_*)$.

B) $i = k-1$ та $y \in N_{i-1}$. Розглянемо таку часткову підстановку c рангу 1 з T, що $c(y) = x_i^1$. Маємо: $ca \neq 0$, $cb \neq 0$. Тому $\sigma(c)\sigma(a) \neq 0$, $\sigma(c)\sigma(b) \neq 0$, звідки, враховуючи лему 1, випливає, що $(\sigma(c))_*(\sigma(a))_* \neq 0$, $(\sigma(c))_*(\sigma(b))_* \neq 0$. З леми 6 випливає, що елементи $(\sigma(c))_*$, $(\sigma(a))_*$, $(\sigma(b))_*$ рангу 1, при цьому $(\sigma(c))_*$ має стрілку з N_{i-1} в N_i, а кожна з $(\sigma(a))_*$, $(\sigma(b))_*$ має стрілку з N_i в N_{i+1}. Враховуючи це, з останньої рівності маємо: $\mathrm{ran}((\sigma(c))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(a))_*)$, $\mathrm{ran}((\sigma(c))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(b))_*)$, звідки $\mathrm{dom}((\sigma(a))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(b))_*)$.

Справедливість імплікації (3) доводиться подібно. □

Лема 8. *Нехай виконуються умови леми 7. Тоді*

$$a \sim b \Leftrightarrow \sigma(a) \sim \sigma(b).$$

Доведення. З визначення відношення $\sim$ та з леми 7 маємо:

$$a \sim b \Leftrightarrow (\mathrm{dom}(a_*) = \mathrm{dom}(b_*) \wedge \mathrm{ran}(a_*) = \mathrm{ran}(b_*)) \Leftrightarrow$$
$$(\mathrm{dom}((\sigma(a))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(b))_*) \wedge \mathrm{ran}((\sigma(a))_*) = \mathrm{ran}((\sigma(b))_*)) \Leftrightarrow \sigma(a) \sim \sigma(b).$$

□

Лема 9. *Нехай $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$, a — нерозкладний елемент з T. Тоді для довільних i, j, $1 \leq i < j \leq k$, часткові підстановки a_* і $(\sigma(a))_*$ мають однакову кількість стрілок з блоку N_i в блок N_j.*

Доведення. Позначимо через n_{ij} кількість стрілок з блоку N_i в блок N_j елементу a_*, а через n'_{ij} — кількість стрілок з блоку N_i в блок N_j елементу $(\sigma(a))_*$.

Нехай $x_{ij}^1 \mapsto y_{ij}^1$, $x_{ij}^2 \mapsto y_{ij}^2, \ldots, x_{ij}^{n_{ij}} \mapsto y_{ij}^{n_{ij}}$ — стрілки з блоку N_i в блок N_j елемента a_*. Оскільки елементи a і $\sigma(a)$ — нерозкладні, то a_* і $(\sigma(a))_*$ не мають стрілок з блоку N_1 в блок N_k, звідки $n_{1k} = n'_{1k} = 0$. Розглянемо можливі випадки, що залишились.

A) $1 < i < j < k$. Доведемо, що $n'_{ij} \geq n_{ij}$. Якщо $n_{ij} = 0$, то, очевидно, $n'_{ij} \geq n_{ij}$. Припустимо, що $n_{ij} > 0$. Зафіксуємо деякі $u \in N_{i-1}$, $v \in N_{j+1}$ і розглянемо такі допоміжні часткові підстановки $a_1, a_2, \ldots, a_{n_{ij}}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_{ij}}$ рангу 1 з T, що $a_t(u) = x_{ij}^t$,

$b_t(y_{ij}^t) = v$, $1 \le t \le n_{ij}$. З леми 6 випливає, що для кожного t, $1 \le t \le n_{ij}$, ранг елементу $(\sigma(a_t))_*$ дорівнює 1 і він має стрілку з N_{i-1} в N_i. Аналогічно елемент $(\sigma(b_t))_*$ має ранг 1 і стрілку з N_j в N_{j+1}. Приймемо $x_{ij}^{t'} = \mathrm{ran}((\sigma(a_t))_*) \in N_i$, $y_{ij}^{t'} = \mathrm{dom}((\sigma(b_t))_*) \in N_j$, $1 \le t \le n_{ij}$. З леми 7 випливає, що $x_{ij}^{t_1'} \neq x_{ij}^{t_2'}$ і $y_{ij}^{t_1'} \neq y_{ij}^{t_2'}$ для $t_1 \neq t_2$. Для кожного t, $1 \le t \le n_{ij}$, із того, що $a_t a b_t \neq 0$, за лемою 1, випливає, що $(\sigma(a_t))_*(\sigma(a))_*(\sigma(b_t))_* \neq 0$. Звідси маємо, що для кожного t, $1 \le t \le n_{ij}$, $x_{ij}^{t'} \in \mathrm{dom}((\sigma(a))_*)$, $y_{ij}^{t'} \in \mathrm{ran}((\sigma(a))_*)$, при цьому $(\sigma(a))_*(x_{ij}^{t'}) \in N_j$. А це означає, що $n'_{ij} \ge n_{ij}$. Розглядаючи автоморфізм $\tau = \sigma^{-1}$, подібно доводимо нерівності $n_{ij} \ge n'_{ij}$

B) $1 = i < j < k$. Доведемо, що $n'_{ij} \ge n_{ij}$. Якщо $n_{ij} = 0$, то, очевидно, $n'_{ij} \ge n_{ij}$. Припустимо, що $n_{ij} > 0$. Зафіксуємо деяке $v \in N_{j+1}$ і розглянемо такі допоміжні елементи b_1, $b_2, \ldots,$ $b_{n_{1j}}$ рангу 1 з T, що $b_t(y_{1j}^t) = v$, $1 \le t \le n_{1j}$. З леми 6 випливає, що для кожного t, $1 \le t \le n_{1j}$, елемент $(\sigma(b_t))_*$ має ранг 1 і стрілку з N_j в N_{j+1}. Покладемо $y_{1j}^{t'} = \mathrm{dom}((\sigma(b_t))_*) \in N_j$, $1 \le t \le n_{1j}$. З леми 7 випливає, що $y_{1j}^{t_1'} \neq y_{ij}^{t_2'}$ для $t_1 \neq t_2$. Для кожного t, $1 \le t \le n_{ij}$, з того, що $ab_t \neq 0$, за лемою 1, отримуємо, що $(\sigma(a))_*(\sigma(b_t))_* \neq 0$, звідки $y_{1j}^{t'} \in \mathrm{ran}((\sigma(a))_*)$. Зафіксуємо деяке t, $1 \le t \le n_{1j}$. Нехай $((\sigma(a))_*)^{-1}(y_{1j}^{t'}) \in N_{i'}$. Покажемо, що $i' = 1$. Якщо $i' \neq 1$, то елемент $(\sigma(a))_*$ матиме деяку стрілку з блоку $N_{i'}$ в блок N_j, яка, за лемою 7, не збігається з жодною з $n_{i'j}$ таких стрілок, побудованих у випадку А). Але тоді, всупереч доведеному у випадку А), ми мали б, що $n'_{i'j} > n_{i'j}$. Отже, $i' = 1$. Звідси випливає, що $n'_{1j} \ge n_{1j}$. Розглядаючи автоморфізм $\tau = \sigma^{-1}$, подібно доводимо протилежні нерівності

C) Випадок $1 < i < j = k$ розглядається аналогічно до попереднього. □

Лема 10. *Нехай $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$, a — нерозкладний елемент з T. Тоді елементи a_* і $(\sigma(a))_*$ мають однакові ранги.*

Доведення. Твердження леми безпосередньо випливає з леми 9. □

Лема 11. *Нехай $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$. Тоді існує єдина підстановка $\varphi \in \oplus_{i=1}^k S_{N_i}$ така, що $\sigma(a) \sim a^\varphi$ для всіх $a \in T$.*

Доведення. 1. Побудова φ. Для кожного з блоків N_i, $1 \le i \le k$, приймемо $N_i = \{x_i^s : s \in I_{N_i}\}$. Виберемо представників $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_k^1$ у блоках $N_1, N_2, \ldots, N_k$ відповідно.

Зафіксуємо деякий блок N_i, для якого $1 \le i \le k-1$. Нехай $A_i = \{a_i^s : s \in I_{N_i}\}$ — множина таких елементів рангу 1, що $a_i^s(x_i^s) = x_{i+1}^1$. З леми 6 випливає, що $(\sigma(a_i^s))_*$ має ранг 1 і стрілку з N_i в N_{i+1} для кожного $a_i^s \in A_i$. Тому ми можемо коректно визначити відображення $\varphi_i \colon N_i \to N_i$, приймаючи $\varphi_i(x_i^s) = \mathrm{dom}((\sigma(a_i^s))_*)$. З леми 7 випливає, що φ_i — ін'єктивне. Покажемо, що φ_i — сюр'єктивне. Оскільки $\mathrm{ran}(a_i^{s_1}) = \mathrm{ran}(a_i^{s_2})$ для довільних $a_i^{s_1}$, $a_i^{s_2}$ з A_i, то, за лемою 7 існує такий елемент $z \in N_{i+1}$, що

$$z = \mathrm{ran}((\sigma(a_i^{s_1}))_*) = \mathrm{ran}((\sigma(a_i^{s_2}))_*)$$

для довільних $a_i^{s_1}$ і $a_i^{s_2}$ з A_i. Виберемо довільний елемент $y \in N_i$. Через c позначимо такий елемент рангу 1 з T, що $c(y) = z$. З леми 6, застосованої до автоморфізму σ^{-1}, випливає, що $(\sigma^{-1}(c))_*$ має ранг 1 і стрілку з N_i в N_{i+1}. Оскільки $\mathrm{ran}(c) = \mathrm{ran}((\sigma(a_i^s))_*)$ для довільного $a_i^s \in A_i$, то з леми 7 випливає, що

$$\mathrm{ran}((\sigma^{-1}(c))_*) = \mathrm{ran}((a_i^s)_*) = \mathrm{ran}(a_i^s).$$

Отже, $(\sigma^{-1}(c))_*$ збігається з a_i^s, тобто $\sigma^{-1}(c) \sim a_i^s$ для деякого $s \in I_{N_i}$. Звідси, застосовуючи лему 8, дістаємо, що $c \sim \sigma(a_i^s)$. А це означає, що

$$y = \mathrm{dom}(c) = \mathrm{dom}((\sigma(a_i^s))_*) = \varphi_i(x_i^s).$$

Тому, існує $\varphi_i^{-1}(y)$, а отже, φ_i — сюр'єктивне.

Через $B = \{b^s : s \in I_{N_k}\}$ позначимо множину таких елементів рангу 1, що $b^s(x_{k-1}^1) = x_k^s$. З леми 6 випливає, що $(\sigma(b^s))_*$ має ранг 1 і стрілку з N_{k-1} в N_k для кожного $b^s \in B$. Тому можна коректно визначити відображення $\varphi_k \colon N_k \to N_k$, приймаючи $\varphi_k(x_k^s) = \mathrm{ran}((\sigma(b^s))_*)$. З леми 7 випливає, що φ_k — ін'єктивне. Встановимо сюр'єктивність φ_k. Оскільки $\mathrm{dom}(b^{s_1}) = \mathrm{dom}(b^{s_2})$ для довільних b^{s_1}, b^{s_2} з B, то з леми 7 випливає, що існує такий елемент $z \in N_{k-1}$, що

$$z = \mathrm{dom}((\sigma(b^{s_1}))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(b^{s_2}))_*)$$

для довільних b^{s_1} і b^{s_2} з B. Виберемо довільний елемент $y \in N_k$. Розглянемо такий елемент c рангу 1 з T, що $c(z) = y$. З леми 6, застосованої до автоморфізму σ^{-1}, випливає, що $(\sigma^{-1}(c))_*$ має ранг 1 і стрілку з N_{k-1} в N_k. Оскільки $\mathrm{dom}(c) = \mathrm{dom}((\sigma(b^s))_*)$ для довільного $b^s \in B$, то з леми 7 випливає, що

$$\mathrm{dom}((\sigma^{-1}(c))_*) = \mathrm{dom}((b^s)_*) = \mathrm{ran}(b^s).$$

Отже, $(\sigma^{-1}(c))_*$ збігається з b^s, тобто $\sigma^{-1}(c) \sim b^s$ для деякого $s \in I_{N_i}$. Звідси та з леми 8 маємо, що $c \sim \sigma(b^s)$. А це означає, що

$$y = \mathrm{ran}(c) = \mathrm{ran}((\sigma(a_i^s))_*) = \varphi_k(x_k^s).$$

Тому, існує $\varphi_k^{-1}(y)$, а отже, φ_k — сюр'єктивне.

Остаточно визначимо $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$.

2. Доведення еквівалентності $\sigma(a) \sim a^\varphi$.

Нагадаємо, що еквівалентність $\sigma(a) \sim a^\varphi$ рівносильна до рівності $(\sigma(a))_* = \varphi^{-1}a_*\varphi$. Нехай спочатку a збігається з одним з елементів a_i^s, $s \in I_{N_i}$, $1 \le i \le k-1$. Оскільки $\mathrm{rank}(a) = 1$, то досить встановити, що

$$\mathrm{dom}((\sigma(a))_*) = \varphi(\mathrm{dom}(a_*)), \quad \mathrm{ran}((\sigma(a))_*) = \varphi(\mathrm{ran}(a_*)). \tag{4}$$

Справедливість першої з цих рівностей випливає з побудови φ. Для доведення другої рівності припустимо спочатку, що $i < k-1$. Оскільки $a_i^s a_{i+1}^1 \neq 0$, то $(\sigma(a_i^s))_*(\sigma(a_{i+1}^1))_* \neq 0$. Звідси, враховуючи, що $(\sigma(a_i^s))_*$ і $(\sigma(a_{i+1}^1))_*$ рангу 1, дістаємо, що

$$\mathrm{ran}((\sigma(a_i^s))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(a_{i+1}^1))_*) = \{\varphi(x_{i+1}^1)\} = \varphi(\mathrm{ran}(a_{i*}^s)).$$

Припустимо тепер, що $i = k-1$. Оскільки $\mathrm{ran}(a_{k-1}^s) = \mathrm{ran}(b^1)$, то за лемою 7

$$\mathrm{ran}((\sigma(a_{k-1}^s)_*)) = \mathrm{ran}((\sigma(b^1))_*) = \{\varphi(x_k^1)\} = \varphi(\mathrm{ran}(a_{(k-1)*}^s)).$$

Нехай a збігається з одним з елементів b^s, $s \in I_{N_k}$. Оскільки $\mathrm{rank}(a) = 1$, то достатньо встановити справедливість рівностей (4). Справедливість другої з рівностей (4) випливає з побудови φ. Для доведення першої зауважимо, що $a_{k-2}^s b^s \neq 0$, звідки

$(\sigma(a^s_{k-2}))_*(\sigma(b^s))_* \neq 0$. Тому, враховуючи, що $(\sigma(a^s_{k-2}))_*$ і $(\sigma(b^s))_*$ мають ранг 1, дістанемо, що

$$\mathrm{dom}((\sigma(b^s))_*) = \mathrm{ran}((\sigma(a^s_{k-2}))_*) = \{\varphi(x^1_{i-1})\} = \varphi(\mathrm{dom}(b^s_*)).$$

Нехай тепер a — довільний нерозкладний елемент з T, що не збігається з жодним з a^s_i $(s \in I_{N_i},\ 1 \le i \le k-1)$ і b^s $(s \in I_{N_k})$. Припустимо спочатку, що $a_* = 0$. З леми 9 випливає, що $(\sigma(a))_* = 0$. Застосувавши лему 3, дістанемо $(a^\varphi)_* = (a_*)^\varphi = 0$. Тому $(\sigma(a))_* = (a^\varphi)_* = 0$. Припустимо тепер, що $a_* \neq 0$. Візьмемо довільний елемент $x \in \mathrm{dom}(a_*)$. Оскільки за лемою 10 $\mathrm{rank}(a_*) = \mathrm{rank}((\sigma(a))_*)$, то досить показати, що $\varphi(x) \in \mathrm{dom}((\sigma(a))_*)$ і $(\sigma(a))_*(\varphi(x)) = \varphi(a_*(x))$. Припустимо, що $x = x^{s_1}_i \in N_i$, $a(x^{s_1}_i) = x^{s_2}_j \in N_j$. Зауважимо, що оскільки a_* не має стрілок з блоку N_1 в блок N_k, то $j - i < k - 1$. Розглянемо два можливі випадки.

A) $j < k$. З рівності $aa^{s_2}_j = a^{s_1}_i a^1_{i+1} \dots a^1_j$ випливає подібна рівність для σ-образів, яка після застосування леми 1 набуває вигляду

$$(\sigma(a))_*(\sigma(a^{s_2}_j))_* = (\sigma(a^{s_1}_i))_*(\sigma(a^1_{i+1}))_* \dots (\sigma(a^1_j))_*.$$

Звідси, враховуючи доведене вище, випливає, що

$$\varphi(x^{s_1}_i) = \mathrm{dom}\left((\sigma\left(a^{s_1}_i\right))_*\right) \in \mathrm{dom}\left((\sigma\left(a\right))_*\right), \quad \varphi(x^{s_2}_j) = \mathrm{dom}\Big(\left(\sigma\left(a^{s_2}_j\right)\right)_*\Big) \in \mathrm{ran}\left((\sigma\left(a\right))_*\right),$$
$$(\sigma\left(a\right))_*\left(\varphi\left(x^{s_1}_i\right)\right) = \Big(\left(\sigma\left(a^{s_2}_j\right)\right)_*\Big)^{-1}\left(\varphi\left(x^1_{j+1}\right)\right) = \varphi(x^{s_2}_j).$$

B) Нехай $j = k$, $i > 1$. Розглянемо допоміжний елемент $b^{s_1}_{i-1}$ рангу 1, такий, що $\mathrm{dom}(b^{s_1}_{i-1}) = \{x^1_{i-1}\}$ і $\mathrm{ran}(b^{s_1}_{i-1}) = \{x^{s_1}_i\}$. Оскільки $\mathrm{dom}(b^{s_1}_{i-1}) = \mathrm{dom}(a^{s_1}_{i-1})$, то з леми 7 випливає, що

$$\mathrm{dom}((\sigma(b^{s_1}_{i-1})_*) = \{\varphi(x^1_{i-1})\}. \tag{5}$$

Крім того, оскільки $b^{s_1}_{i-1}a^{s_1}_i \neq 0$, то $(\sigma(b^{s_1}_{i-1}))_*(\sigma(a^{s_1}_i))_* \neq 0$, звідки

$$\mathrm{ran}((\sigma(b^{s_1}_{i-1}))_*) = \mathrm{dom}((\sigma(a^{s_1}_i))_*) = \{\varphi(x^{s_1}_i)\}. \tag{6}$$

З рівності $b^{s_1}_{i-1}a = a^1_{i-1}a^1_i \dots a^1_{i-2}b^{s_2}$ після переходу до σ-образів і застосування леми 1 дістанемо, що

$$(\sigma(b^{s_1}_{i-1}))_*(\sigma(a))_* = (\sigma(a^1_{i-1}))_*(\sigma(a^1_i))_* \dots (\sigma(a^1_{i-2}))_*(\sigma(b^{s_2}))_*.$$

Звідси, враховуючи рівності (5) і (6), дістаємо, що

$$\varphi(x^{s_1}_i) = \mathrm{ran}\left(\left(\sigma\left(b^{s_1}_{i-1}\right)\right)_*\right) \in \mathrm{dom}\left((\sigma\left(a\right))_*\right), \quad \varphi(x^{s_2}_k) = \mathrm{ran}\left((\sigma\left(b^{s_2}\right))_*\right) \in \mathrm{ran}\left((\sigma\left(a\right))_*\right),$$
$$\left(\left(\sigma\left(b^{s_1}_{i-1}\right)\right)_*(\sigma\left(a\right))_*\right)\left(\varphi\left(x^1_{i-1}\right)\right) = \varphi(x^{s_2}_k).$$

Тому $(\sigma(a))_*(\varphi(x^{s_1}_i)) = \varphi(x^{s_2}_k)$.

Нехай тепер a — розкладний елемент з T. Якщо $a = 0$, то $\sigma(a) = a^\varphi = 0$. Припустимо, що $a \neq 0$. Нехай $a = a_1a_2 \dots a_r$ — деякий розклад a на нерозкладні множники. Зауважимо, що $\mathrm{dom}(a) \subseteq \mathrm{dom}(a_1)$. Через b_1 позначимо обмеження елемента a_1 на множину $\mathrm{dom}(a)$. Тоді

$$a = b_1a_2 \dots a_{(r-1)}a_r \tag{7}$$

— розклад a на нерозкладні множники, при цьому $\mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(b_1)$. З (7), спираючись на лему 1 і на те, що $a_* = a$, для розкладного елемента a випливає, що

$$a_* = b_{1*}a_{2*}\dots a_{(r-1)*}a_{r*}. \tag{8}$$

Переходячи в (7) до σ-образів, враховуючи, що $(\sigma(a))_* = \sigma(a)$, для розкладного елемента $\sigma(a)$ і спираючись на лему 1, дістанемо, що

$$(\sigma(a))_* = (\sigma(b_1))_*(\sigma(a_2))_*\dots(\sigma(a_{(r-1)}))_*(\sigma(a_r))_*. \tag{9}$$

Звідси випливає, що $\mathrm{dom}((\sigma(a))_*) \subseteq \mathrm{dom}((\sigma(b_1))_*)$, отже,

$$\mathrm{rank}((\sigma(a))_*) \leq \mathrm{rank}((\sigma(b_1))_*). \tag{10}$$

Оскільки $\mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(b_1)$ і $\mathrm{dom}(b_{1*}) \subseteq \mathrm{dom}(b_1)$, то

$$\mathrm{dom}(b_{1*}) \subseteq \mathrm{dom}(a) = \mathrm{dom}(a_*).$$

Але з (8) випливає, що $\mathrm{dom}(a_*) \subseteq \mathrm{dom}(b_{1*})$. Отже, $\mathrm{dom}(a_*) = \mathrm{dom}(b_{1*})$ і $\mathrm{rank}(a_*) = \mathrm{rank}(b_{1*})$. З леми 10 випливає, що $\mathrm{rank}(b_{1*}) = \mathrm{rank}((\sigma(b_1))_*)$. З останніх двох рівностей і з нерівності (10) випливає, що $\mathrm{rank}(\sigma(a))_*) \geq \mathrm{rank}(a_*)$. Використовуючи розклад $\sigma(a)$ на нерозкладні множники і автоморфізм $\tau = \sigma^{-1}$, подібно встановлюється протилежна нерівність: $\mathrm{rank}(a_*) \geq \mathrm{rank}((\sigma(a))_*)$. Отже,

$$\mathrm{rank}((\sigma(a))_*) = \mathrm{rank}(a_*) = \mathrm{rank}(b_{1*}) = \mathrm{rank}((\sigma(b_1))_*).$$

Виберемо довільне $x \in \mathrm{dom}(a_*)$. Враховуючи, що $x \in \mathrm{dom}(b_{1*})$, і те, що твердження леми вже доведене для нерозкладних елементів, маємо, що $\varphi(x) \in \mathrm{dom}((\sigma(b_1))_*)$. Звідси, з розкладу (9) і рівності $\mathrm{rank}((\sigma(a))_*) = \mathrm{rank}((\sigma(b_1))_*)$ випливає, що $\varphi(x) \in \mathrm{dom}((\sigma(a))_*)$. Тому

$$(\sigma(b_1))_*(\varphi(x)) \in \mathrm{dom}((\sigma(a_2))_*),\ \dots,$$
$$\left((\sigma(b_1))_*(\sigma(a_2))_*\dots\left(\sigma\left(a_{(r-1)}\right)\right)_*\right)(\varphi(x)) \in \mathrm{dom}((\sigma(a_r))_*).$$

Позаяк для нерозкладних елементів твердження леми вже доведене, то

$$(\sigma(b_1))_*(\varphi(x)) = \varphi(b_{1*}(x)), \quad (\sigma(a_2))_*(\varphi(b_{1*}(x))) = \varphi(b_{1*}a_{2*}(x)), \dots$$
$$(\sigma(a_r))_*(\varphi(b_{1*}a_{2*}\dots a_{(r-1)*}(x))) = \varphi(b_{1*}a_{2*}\dots a_{(r-1)*}a_{r*}(x)).$$

Звідси маємо:

$$\begin{aligned}(\sigma(a))_*(\varphi(x)) &= ((\sigma(b_1))_*(\sigma(a_2))_*\dots(\sigma(a_{(r-1)}))_*(\sigma(a_r))_*)(\varphi(x)) = \\ &= ((\sigma(a_2))_*\dots(\sigma(a_{(r-1)}))_*(\sigma(a_r))_*)(\varphi(b_{1*}(x))) = \dots \\ &= (\sigma(a_r))_*(\varphi(b_{1*}a_{2*}\dots a_{(r-1)*}(x))) = \varphi(b_{1*}a_{2*}\dots a_{(r-1)*}a_{r*}(x)) = \varphi(a_*(x)).\end{aligned}$$

3. Єдиність φ. Припустимо, що для деякої підстановки $\overline{\varphi} \in \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ $\sigma(a) \sim a^{\overline{\varphi}}$ для всіх a з T. Тоді $a^{\varphi} \sim a^{\overline{\varphi}}$ для всіх a з T. Зокрема, $(a_i^s)^{\varphi} \sim (a_i^s)^{\overline{\varphi}}$ і $(b^s)^{\varphi} \sim (b^s)^{\overline{\varphi}}$ для всіх $a_i^s \in A_i$, $1 \leq i \leq k-1$, і $b^s \in B$. А це означає, що $(a_i^s)^{\varphi}_* = (a_i^s)^{\overline{\varphi}}_*$, $(b^s)^{\varphi}_* = (b^s)^{\overline{\varphi}}_*$ для всіх $a_i^s \in A_i$, $1 \leq i \leq k-1$, і $b^s \in B$. Звідси $\overline{\varphi}(x_i^s) = \varphi(x_i^s)$ для всіх $x_i^s \in N_i$, $1 \leq i \leq k$. Отже, $\overline{\varphi} = \varphi$. □

Лема 12. *Нехай* $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$, *а підстановка* $\varphi \in \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ *та множини* A_i, $1 \le i \le k-1$, B *такі ж, як у лемі 11. Рівність* $\varphi = \{e\}$ *справедлива тоді і тільки тоді, коли* $\sigma(a) \sim a$ *для всіх* a *з* T.

Доведення. Якщо $\varphi = \{e\}$, то $\sigma(a) \sim a^{\varphi} = a$ для всіх a з T. Припустимо, що $\sigma(a) \sim a$ для всіх a з T. Тоді $(\sigma(a_i^s))_* = a_{i*}^s$ і $(\sigma(b^s))_* = b_*^s$ для всіх $a_i^s \in A_i$, $1 \le i \le k-1$, і $b^s \in B$. Звідси і з побудови відображення φ маємо: $\varphi(x_i^s) = x_i^s$, $x_i^s \in N_i$, $1 \le i \le k$. □

Лема 13. *Нехай* a, $b \in T$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$. *Тоді*

$$a \sim b \Rightarrow \sigma(a) \sim \sigma(b).$$

Доведення. Твердження безпосередньо випливає з лем 4 і 11. □

Лема 14. *Група* $\oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i}$ *є нормальною підгрупою в* $\mathrm{Aut}(T)$.

Доведення. Спочатку покажемо, що $\oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i}$ є підгрупою групи $\mathrm{Aut}(T)$. Справді, за лемою 1 для довільних $\pi \in \oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i}$ і $a, b \in T$

$$\pi(a)\pi(b) = (\pi(a))_*(\pi(b))_* = a_* b_* = ab = \pi(ab).$$

Тепер покажемо, що $\oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i} \triangleleft \mathrm{Aut}(T)$. Виберемо довільні $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$, $\pi \in \oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i}$ і $a \in T$. З леми 2 випливає, що $\sigma^{-1}\pi(a) \sim \sigma^{-1}(a)$. Звідси і з леми 13 одержуємо:

$$\sigma^{-1}\pi\sigma(a) \sim \sigma^{-1}\sigma(a) = a.$$

Отже, $\sigma^{-1}\pi\sigma \in \oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i}$. □

4. Доведення теореми 2. Досить показати, що $\mathrm{Aut}(T)/\oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i} = \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ і застосувати твердження 1 і лему 14.

Нехай $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$. З леми 11 випливає, що існує єдине $\varphi = \varphi_\sigma$ з $\oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$ таке, що рівність $(\sigma(a))_* = \varphi_\sigma^{-1} a_* \varphi_\sigma$ виконується для кожного $a \in T$. Визначимо відображення $I\colon \mathrm{Aut}(T) \to \oplus_{i=1}^{k} S_{N_i}$, за допомогою рівності $I(\sigma) = \varphi_\sigma$ для кожного $\sigma \in \mathrm{Aut}(T)$. Виберемо довільні σ_1, $\sigma_2 \in \mathrm{Aut}(T)$. Тоді $(\sigma_1\sigma_2(a))_* = \varphi_{\sigma_1\sigma_2}^{-1} a_* \varphi_{\sigma_1\sigma_2}$. З іншого боку,

$$(\sigma_1\sigma_2(a))_* = (\sigma_2(\sigma_1(a)))_* = \varphi_{\sigma_2}^{-1}(\sigma_1(a))_*\varphi_{\sigma_2} = \varphi_{\sigma_2}^{-1}\varphi_{\sigma_1}^{-1} a_* \varphi_{\sigma_1}\varphi_{\sigma_2}.$$

Отже, $\varphi_{\sigma_1\sigma_2} = \varphi_{\sigma_1}\varphi_{\sigma_2}$, і I — гомоморфізм. Крім того, з леми 12 випливає, що $\mathrm{Ker} I = \oplus_{i\in I}^{\mathrm{D}} S_{M_i}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Preston G.B. *Representations of inverse semigroups* // J. Lond. Math. Soc. – 1954. – T.29. – C.411–419.
2. Вагнер В.В. *Обобщенные группы* // ДАН СССР. – 1952. – Т.84. – С.1119–1122.
3. Ганюшкин А.Г., Кормышева Т.В. *О нильпотентных подполугруппах конечной симметрической инверсной полугруппы* // Матем. заметки. – 1994. – Т.56, №2. – С.29–35.
4. Ганюшкін О.Г., Кормишева Т.В. *Будова нільпотентних піднапівгруп скінченної інверсної симетричної напівгрупи* // Доп. НАН України. – 1995. – №1. – С.8–10.

5. Шафранова Г.М. *Максимальні нільпотентні піднапівгрупи напівгрупи* $IS(\mathbb{N})$ // Вісник Київського ун-ту, серія: фізико-математичні науки. – 1997. – № 4. – С.98–103.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
кафедра алгебри і математичної логіки,
252163, м. Київ, пр-кт Глушкова, 6.

Надійшло 18.05.1999