УДК 517.57

# ДО ТЕОРЕМИ ШЕРЕМЕТИ ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ДОДАТНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

О.Б. Скасків

O.B. Skaskiv. *To Sheremeta's theorem on the rate of convergence of positive Dirichlet series*, Matematychni Studii, **12**(1999) 222–224.

Let $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}$, $a_n\ge 0$ $(n\ge 1)$, be an entire Dirichlet series. We give a simple proof of the following assertion: if $\int_0^{+\infty}h(\ln n(t))t^{-2}dt<+\infty$, then $\sup\left\{\frac{1}{h(\ln n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}\ :\ n\ge 0\right\}=+\infty$, where $h(x)$ is a positive nondecreasing function, $n(t)$ the counting function of the sequence $\lambda_n\uparrow+\infty$, and $\sigma_n(F)=$
$=\max\left\{\frac{1}{\sum_{k=0}^n a_ke^{x\lambda_k}}-\frac{1}{F(x)}: x\in\mathbb{R}\right\}$.

О.Б. Скаскив. *К теореме Шереметы о скорости сходимости положительных рядов Дирихле* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 2. – C.222–224.

Для целых рядов Дирихле вида $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}$, $a_n\ge 0$ $(n\ge 1)$ приведено простое доказательство утверждения: если $\int_0^{+\infty}\frac{h(\ln n(t))}{t^2}dt<+\infty$, то $\sup\left\{\frac{1}{h(\ln n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}\ :\ n\ge 0\right\}=+\infty$, где $h(x)$ — положительная функция, $n(t)$ — считающая функция последовательности $\lambda_n\uparrow+\infty$, $\sigma_n(F)=\max\left\{\frac{1}{\sum_{k=0}^n a_ke^{x\lambda_k}}-\right.$
$\left.-\frac{1}{F(x)}: x\in\mathbb{R}\right\}$.

Нехай $H(\Lambda)$ — клас абсолютно збіжних у всій площині рядів Діріхле вигляду $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_ne^{z\lambda_n}$, $a_n\ge 0$ $(n\ge 1)$, $a_0=1$, де $\Lambda=(\lambda_n)$, $0\le\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to_+\infty)$. Для $F\in H(\Lambda)$ позначимо

$$\sigma_n(F)=\max\Big\{\frac{1}{S_n(x)}-\frac{1}{F(x)}: x\in\mathbb{R}\Big\},$$

$S_n(x)=\sum_{k=0}^n a_ke^{x\lambda_k}$. У праці [1] показано, що для того, щоб для кожної функції $F\in H(\Lambda)$ виконувалось

$$\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{1}{h(\ln n)}\ln\frac{1}{\sigma_n(F)}=+\infty \tag{1}$$

з $h(x)\equiv x$ необхідно і досить, щоб $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\lambda_n}<+\infty$. Це ж твердження отримуємо з теореми 1 (див. [2, 3]), встановленої з довільною неспадною додатною

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

функцією $h(x)$ у співвідношенні (1) такою, що $x = O\big(h(x)\big)$ $(x \to +\infty)$. При цьому необхідною і достатньою умовою для справедливості (1) для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ є наступна

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(\ln n(t))}{t^2}\, dt < +\infty, \tag{2}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ — лічильна функція послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$.

Доведення цього твердження з [2] повторює в цілому схему доведення з [1] і перестає бути правильним у випадку $h(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$. У цьому повідомленні ми дамо нове доведення достатності, яке є правильним і в останньому випадку. Власне є справедливим наступне твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $h(x)$ — довільна додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція. Якщо виконується умова (2), то співвідошення (1) є правильним для кожної функції $F \in H(\Lambda)$.*

*Доведення.* Для $F \in H(\Lambda)$ при фіксованому $T \in \mathbb{R}$ позначимо $g(T) = \ln F(T)$. Оскільки

$$\sum_{\lambda_n > 2g'(T)} a_n e^{T\lambda_n} < \sum_{\lambda_n > 2g'(T)} \frac{\lambda_n a_n e^{T\lambda_n}}{2g'(T)} \le \frac{1}{2} F(T), \tag{3}$$

то для $N = n(2g'(T))$ маємо

$$S_N(T) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{n=0}^{N} a_n e^{T\lambda_n} = F(T) - \sum_{\lambda_n > 2g'(T)} a_n e^{\lambda_n} \ge \frac{1}{2} F(T). \tag{4}$$

Тому для всіх $x \ge T$

$$L_N(x) \stackrel{\rm def}{=} \frac{1}{S_N(x)} - \frac{1}{F(x)} \le \frac{1}{S_N(x)} \le \frac{1}{S_N(T)} \le \frac{2}{F(T)}. \tag{5}$$

Зауважимо тепер, що при $x < T$ і $n > N$ функції $\alpha_{n,j}(x) = x\lambda_n - jg(x)$ $(j = 1, 2)$ є зростаючими. Справді, $\alpha'_{n,j}(x) = \lambda_n - jg'(x) > 2g'(T) - jg'(x) > (2-j)g'(T) \ge 0$. Отже, для $x < T$ та $j = 1$ або 2

$$\frac{F(x) - S_N(x)}{F^j(x)} \le \frac{F(T) - S_N(T)}{F^j(T)},$$

а тому

$$\frac{F(x)}{S_N(x)} = \Big(1 - \frac{F(x) - S_N(x)}{F(x)}\Big)^{-1} \le \Big(1 - \frac{F(T) - S_N(T)}{F(T)}\Big)^{-1} = \frac{F(T)}{S_N(T)}.$$

Звідси, враховуючи нерівності (3) і (4), для $x < T$ негайно отримуємо

$$L_N(x) \le\le \frac{F(x) - S_N(x)}{F^2(x)} \frac{F(x)}{S_N(x)} \le \frac{F(T) - S_N(T)}{F(T) S_N(T)} \le \frac{1}{F(T)}. \tag{6}$$

Остаточно з нерівностей (5) і (6) для всіх $T \in \mathbb{R}$ отримуємо,

$$\sigma_N(F) \le \frac{2}{F(T)}, \quad N = n(2g'(T)). \tag{7}$$

Залишається довести, що $h(\ln N) = o(g(T))$ хоча б при $T = T_k \to +\infty$. Зауважимо спочатку, що для додатної функції $w(t)$ інтеграл $\int^{+\infty} t^{-2}w(t)\,dt$ є збіжним тоді і тільки тоді, коли існує неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція $\psi(t)$ така, що $\int^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$ і $w(t) = o(\psi^{-1}(t))$ $(t \to +\infty)$, де $\psi^{-1}(t)$ — функція, обернена до функції $\psi(t)$. Отже, за умовою (2) існує функція $\psi(t)$ з описаними властивостями і така, що

$$h(\ln n(t)) = o(\psi^{-1}(t)). \tag{8}$$

Залишається застосувати лему 6.15 [4, с.359], яка стверджує, що для функції $\psi_1(t) > 0$ такої, що $\int^{+\infty} \frac{dt}{\psi_1(t)} < +\infty$, множина $E = \{T : g'(T) > \psi_1(g(T))\}$ має скінченну міру. Застосовуючи це твердження з $\psi_1(t) \equiv \psi(t)/2$, з нерівності (8) при $T \to +\infty$ $(T \notin E)$ маємо

$$h(\ln N) = h\big(\ln n(2g'(T)\big) \leq h\big(\ln n(\psi(g(T)))\big) = o(g(T)). \quad \square$$

Видається правдоподібним, що є справедливим наступне припущення.

**Гіпотеза.** *Нехай $h(x) \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$ — довільна функція. Умова (2) є необхідною для справедливості співвідношення (1) для кожної функції $F \in H(\Lambda)$.*

## *ЛІТЕРАТУРА*


1. Sheremeta M.M. *On the convergence rate of the partial sums of positive entire Dirichlet series* Anal. Math. – 1991. – V.17, 1. – P.47–57.
2. Орищин О.Г., Скасків О.Б. *Про швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле* Матем. студії. – Т.7, 2. – С.167–174.
3. Орищин О.Г., Скасків О.Б. *Швидкість збіжності часткових сум цілих рядів Діріхле* Доп. НАН України. – 1998. – 4. – С.41–44.
4. Hayman W.K. Subharmonic functions, Vol. 2. – London: Acad. Press, 1989. – XXI+591 p.


Львівський державний університет, механіко-математичний факультет

*Надійшло 15.09.99*