УДК 517.9

НЕОБХІДНІ І ДОСТАТНІ УМОВИ ОБОРОТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ НА ОСІ ФУНКЦІЙ

В.Ю. Слюсарчук

V.Yu. Slyusarchuk. *Necessary and sufficient conditions of reversibility of nonlinear differential operators in the space of bounded functions on axis*, Matematychni Studii, **12**(1999) 213–220.

Necessary and sufficient conditions of reversibility of nonlinear differential operators $\frac{d}{dt}+f$ ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a continuous operator) in the space of bounded functions on $\mathbb{R}$ are obtained.

Слюсарчук В.Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости нелинейных дифференциальных операторов в пространстве ограниченных на оси функций* // Математичні Студії. – 1999. – Т.12, № 2. – С.213–220.

Получены необходимые и достаточные условия обратимости нелинейных дифференциальных отображений вида $\frac{d}{dt}+f$ ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывное отображение) в пространстве ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

1. Постановка задачі. Нехай C^0 — банахів простір неперервних і обмежених на $\mathbb{R}$ функцій $x=x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{C^0}=\sup_{t\in\mathbb{R}}|\,x(t)\,|$, C^1 — банахів простір функцій $x=x(t)\in C^0$, для яких $\frac{dx}{dt}\in C^0$, з нормою $\|x\|_{C^1}=\|x\|_{C^0}+\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0}$ і $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — неперервне відображення.

Введемо в розгляд неперервне відображення $L: C^1\to C^0$, визначене рівністю

$$(Lx)(t)=\frac{dx(t)}{dt}+f(x(t)),\ t\in\mathbb{R}.$$

З'ясуємо, коли область значень $R(L)$ відображення L збігається з C^0 і коли це відображення є оборотним.

Такі задачі розв'язувалися багатьма авторами в основному у випадку лінійних або слабо нелінійних відображень (див., наприклад, [1–10]).

2. Формулювання основних результатів.

Теорема 1. *$R(L)=C^0$ тоді і тільки тоді, коли $R(f)=\mathbb{R}$. При цьому для довільних відрізка $[\alpha,\beta]$ і функції $h=h(t)\in C^0$, для яких $R(f|_{[\alpha,\beta]})=\overline{R(h)}$ і $\{f(\alpha),f(\beta)\}=\{\inf_{t\in\mathbb{R}}h(t),\sup_{t\in\mathbb{R}}h(t)\}$, існує функція $x=x(t)\in C^1$ така, що $Lx=h$ і $R(x)\subset[\alpha,\beta]$.*

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57N20.

Теорема 2. *Відображення* $L: C^1 \to C^0$ *має обернене неперервне відображення тоді і тільки тоді, коли відображення* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *оборотне.*

Теорема 3. *Нехай відображення* $L: C^1 \to C^0$ *має обернене неперервне відображення і* $|f(x)| \geq k|x|$ *для всіх* $x \in \mathbb{R}$ *і деякого числа* $k > 0$. *Тоді*

$$\|L^{-1}h\|_{C^0} \leq k^{-1}\|h\|_{C^0} \quad i \quad \|L^{-1}h\|_{C^1} \leq (2 + k^{-1})\|h\|_{C^0} \ \forall h \in C^0.$$

3. Допоміжні твердження. Позначимо через $\mathcal{F}$ множину всіх неперервних відображень $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для кожного з яких $R(g) = \mathbb{R}$ і $\lim_{|x| \to +\infty} |g(x)| = +\infty$, через $\mathcal{P}_T$, де T — додатне число, — підпростір простору C^0, елементами якого є T-періодичні функції, а через $L^{-1}h$, де $h \in C^0$, — повний прообраз елемента h (при відображенні L).

Лема 1. *Нехай* $g \in \mathcal{F}$. *Тоді для кожного числа* $H > 0$ *існують числа* $k \neq 0$ *і* $a > 0$ *такі, що*

$$(x \in [-a, a]) : |g(x) - kx| \leq |k|a - H.$$

Доведення. Нехай b — таке додатне число, що $\min_{|x| \geq b} |g(x)| \geq H$, і нехай $M = \max_{|x| \leq b} |g(x)|$. Виберемо довільні числа $k \neq 0$ і $a > b$, для яких

$$|k|b \geq H, \tag{1}$$

$$M + |k|b \leq |k|a - H, \tag{2}$$

$$kxg(x) > 0, \text{ при } |x| > b, \tag{3}$$

і $|g(x)| \leq |k|a$, якщо $b < |x| \leq a$. Тоді для $b < |x| \leq a$

$$|g(x) - kx| = \big||g(x)| - |kx|\big| \leq |k|a - H,$$

(тут враховані співвідношення (1) і (3)). Якщо $|x| \leq b$, то згідно з (2)

$$|g(x) - kx| \leq |g(x)| + |kx| \leq M + |k|b \leq |k|a - H. \quad \square$$

Лема 2. *Нехай* $f \in \mathcal{F}$. *Тоді* $(L^{-1}h) \cap \mathcal{P}_T \neq \varnothing$ *для всіх* $h \in \mathcal{P}_T$ *і* $T > 0$.

Доведення. Зафіксуємо довільні число $T > 0$ і функцію $h \in h(t) \in \mathcal{P}_T$. Згідно з лемою 1 знайдуться числа $k \neq 0$ і $a > 0$, що

$$|f(x) - kx| \leq |k|a - \|h\|_{C^0}, \text{ якщо } |x| \leq a. \tag{4}$$

Розглянемо цілком неперервне відображення $G: \mathcal{P}_T \to \mathcal{P}_T$, визначене рівністю

$$(Gx)(t) = -\frac{k}{|k|} \int_{\{s: kt < ks\}} e^{k(t-s)}(-f(x(s)) + kx(s) + h(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Неважко впевнитися в тому, що задача про існування T-періодичних розв'язків рівняння

$$(Lx)(t) = h(t), \ t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

рівносильна аналогічній задачі для рівняння

$$x(t) = (Gx)(t), \ t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

і на підставі (4) справджується співвідношення $GS_a \subset S_a$, де $S_a = \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\| \leq a\}$. Тому, згідно з теоремою Шаудера про нерухому точку [11, с.36], множина T-періодичних розв'язків рівняння (6), а, отже, й рівняння (5), є непорожньою. $\square$

Лема 3. *Нехай* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *— неперервне відображення,* $h(t)\in\mathcal{P}_T$ *і* $[a,b]$, $[\alpha,\beta]$ *— такі відрізки, що* $R(f|_{[\alpha,\beta]}) = R(h) = [a,b]$ *і* $\{f(\alpha), f(\beta)\} = \{a,b\}$. *Тоді рівняння (5) має розв'язок* $y(t)\in\mathcal{P}_T$*, для якого* $R(y)\subset[\alpha,\beta]$.

Доведення. Розглянемо відображення $f^*\in\mathcal{F}$, для якого $f^*|_{[\alpha,\beta]} = f|_{[\alpha,\beta]}$ і

$$(\forall\ x\in\mathbb{R}\setminus[\alpha,\beta]) : f^*(x)\in\mathbb{R}\setminus[a,b]. \tag{7}$$

За лемою 2 рівняння

$$\frac{dy}{dt} = -f^*(y) + h(t),\ t\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

має розв'язок $y(t)\in\mathcal{P}_T$, який в деяких точках t_1 і t_2 набуває найменше $y_{\min}$ і найбільше $y_{\max}$ значення. У цих точках $dy/dt = 0$. Тому $\{f^*(y_{\min}), f^*(y_{\max})\} = \{h(t_1), h(t_2)\}$ і на підставі (7) $\{y_{\min}, y_{\max}\}\subset[\alpha,\beta]$. Отже, $R(y)\subset[\alpha,\beta]$. Оскільки $f^*(x) = f(x)$ для всіх $x\in[\alpha,\beta]$, то розв'язок $y = y(t)$ рівняння (8) також є розв'язком рівняння (5). $\square$

Нам також буде потрібне наступне твердження.

Лема 4. *Нехай функція* $g(x)$ *є неперервною і строго зростаючою на* $[a,b]$. *Тоді для кожного* $\varepsilon\in(0,b-a)$ *існує* $k>0$ *таке, що*

$$g(u) - g(v) \geq k(u-v)$$

для всіх $u,v\in[a,b]$, *для яких* $u-v\geq\varepsilon$.

Твердження леми 4 очевидне.

4. *Доведення теореми 1.* Нехай $R(f)=\mathbb{R}$. Розглянемо довільні послідовності чисел $T_n>0$ і функцій $h_n(t)\in\mathcal{P}_{T_n},\ n\in\mathbb{N}$, для яких $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty,\ R(h_n) = \overline{R(h)},\ n\in\mathbb{N}$, і

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{|t|\leq p}|h(t)-h_n(t)| = 0\ \forall p>0, \tag{9}$$

а також відрізок $[\alpha,\beta]$, для якого $R(f|_{[\alpha,\beta]}) = \overline{R(h)}$ і $\{\inf_{t\in\mathbb{R}} h(t), \sup_{t\in\mathbb{R}} h(t)\} = \{f(\alpha),\ f(\beta)\}$. Згідно з лемою 3 та рівностями $R(h_n) = \overline{R(h)}$ $(n\in\mathbb{N})$, існують функції $x_n(t)\in\mathcal{P}_{T_n}$ $(n\in\mathbb{N})$ такі, що $R(x_n)\subset[\alpha,\beta]$ $(n\in\mathbb{N})$, і

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -f(x_n(t)) + h_n(t),\quad t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Тому

$$\sup_{n\in\mathbb{N},t\in\mathbb{R}}\left|\frac{dx_n(t)}{dt}\right| \leq \max_{\alpha\leq x\leq\beta}|f(x)| + \|h\|_{C^0}.$$

Отже, функції $x_n(t)$ $(n\in\mathbb{N})$, рівномірно обмежені й одностайно неперервні на $\mathbb{R}$. За теоремою Арцела [12, с.106] існують функція $z = z(t)\in C^0$ і числа $n_k>k$ $(k\in\mathbb{N})$, для яких $R(z)\subset[\alpha,\beta]$ і

$$(\forall p>0) : \lim_{k\to+\infty}\max_{|t|\leq p}|z(t)-x_{n_k}(t)| = 0. \tag{11}$$

Оскільки на підставі (10)

$$x_{n_k}(t) = x_{n_k}(0) - \int_0^t (f(x_{n_k}(s)) - h(s))ds, \quad k \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R},$$

то згідно з (9), (11) та неперервністю відображення f

$$z(t) = z(0) - \int_0^t (f(z(s)) - h(s))ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

тобто $z(t)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -f(x) + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

і $z(t) \in C^1$.

Отже, рівність $R(f) = \mathbb{R}$ гарантує існування розв'язку $x(t) \in C^1$ рівняння (12) для кожної функції $h(t) \in C^0$, який задовольняє вимогам другої частини твердження теореми 1.

Нехай $R(f) \neq \mathbb{R}$. Тоді $\overline{R(f)} \neq \mathbb{R}$, оскільки відображення f неперервне. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = -f(x) + m, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $m \in \mathbb{R} \setminus \overline{R(f)}$. Кожен розв'язок $x = x(t)$ цього рівняння є необмеженим, бо

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} \right| \geq \inf_{y \in R(f)} |m - y| > 0$$

для всіх точок t області визначення розв'язку. Звідси випливає, що існування обмежених розв'язків рівняння (12) для довільних $h(t) \in C^0$, тобто виконання рівності $R(L) = C^0$, гарантує виконання рівності $R(f) = \mathbb{R}$. $\square$

5. *Доведення теореми 2.* Нехай відображення $L\colon C^1 \to C^0$ має обернене неперервне відображення. Тоді за теоремою 1 $R(f) = \mathbb{R}$. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dt} = -f(y) + h \tag{13}$$

і

$$f(x) - h = 0, \tag{14}$$

в яких $h = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$. Кожен сталий розв'язок рівняння (14) також є розв'язком рівняння (13). А оскільки, згідно з оборотністю відображення $L\colon C^1 \to C^0$, рівняння (13) має єдиний розв'язок $y \in C^1$, то рівняння (14) також має єдиний розв'язок. На підставі цього та рівності $R(f) = \mathbb{R}$ відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є оборотним.

Отже, з оборотності відображення $L\colon C^1 \to C^0$ і неперервності оберненого відображення $L^{-1}\colon C^0 \to C^1$ випливає оборотність відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Нехай тепер неперервне відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має обернене відображення. Тоді $R(f) = \mathbb{R}$. Розглянемо довільні функції $h = h(t) \in C^0$ і $h_n = h_n(t) \in C^0$ $(n \in \mathbb{N})$, для яких

$$\lim_{n\to+\infty} ||h - h_n||_{C^0} = 0. \tag{15}$$

За теоремою 1 існують функції $x = x(t) \in C^1$ і $x_n = x_n(t) \in C^1$, $(n \in \mathbb{N})$, що є розв'язками відповідно рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -f(x) + h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

і

$$\frac{dx_n}{dt} = -f(x_n) + h_n(t),\ t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Також існує відрізок $[a, b]$, для якого

$$R(x) \bigcup \Big(\bigcup_{n\geq 1} R(x_n) \Big) \subset [a, b]. \tag{18}$$

Покажемо, що

$$\lim_{n\to+\infty} ||x - x_n||_{C^1} = 0. \tag{19}$$

Звідси випливатимиме, що рівняння (16) має в просторі C^1 єдиний розв'язок для кожної функції $h = h(t) \in C^0$, тобто відображення $L\colon C^1 \to C^0$ є оборотним, а відображення $L^{-1}\colon C^0 \to C^1$ неперервне.

Припустимо, що співвідношення (19) не виконується, тобто $\overline{\lim}_{n\to+\infty} ||x - x_n||_{C^1} > 0$. Із співвідношень (15), (16), (17) і рівномірної неперервності функції $f(x)$ на $[a, b]$ випливає, що $\overline{\lim}_{n\to+\infty} ||x - x_n||_{C^0} > 0$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що для деякого числа $\mu \in (0, b - a)$ виконується нерівність

$$||x - x_n||_{C^0} \geq \mu,\ n \geq 1. \tag{20}$$

Розглянемо випадок, коли функція $f(x)$ є строго спадною на $\mathbb{R}$. За лемою 4 існує число $k > 0$ таке, що

$$-f(\alpha) + f(\beta) \geq k(\alpha - \beta) \tag{21}$$

для всіх $\alpha, \beta \in [a, b]$, для яких $\alpha - \beta \geq \mu/2$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб

$$k\mu - 2\delta > 0. \tag{22}$$

Із (15) та (20) випливає, що існують $n_1 \in \mathbb{N}$ і $t_1 \in \mathbb{R}$, для яких

$$||h - h_{n_1}||_{C^0} \leq \delta \tag{23}$$

і $|x(t_1) - x_{n_1}(t_1)| \geq \frac{\mu}{2}$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$$x(t_1) - x_{n_1}(t_1) \geq \frac{\mu}{2}. \tag{24}$$

Використаємо співвідношення

$$\frac{d(x(t)-x_{n_1}(t))}{dt} = -f(x(t)) + f(x_{n_1}(t)) + h(t) - h_{n_1}(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

яке випливає з (16) та (17). З цього співвідношення з урахуванням (21), (22), (23) і (24) отримаємо

$$\frac{d(x(t_1)-x_{n_1}(t_1))}{dt} > 0. \tag{26}$$

Далі розглянемо довільний інтервал $[t_1, T)$ такий, що

$$(\forall t \in [t_1, T)) : \frac{d(x(t)-x_{n_1}(t))}{dt} > 0 \tag{27}$$

(множина таких інтервалів є непорожньою, оскільки функція $-f(x(t))+f(x_{n_1}(t))+h(t)-h_{n_1}(t)$ є неперервною на $\mathbb{R}$ і виконуються співвідношення (25) і (26)). Тоді на підставі (27) функція $x(t)-x_{n_1}(t)$ є строго зростаючою на інтервалі $[t_1, T)$. Тому згідно з неперервністю функції $x(t)-x_{n_1}(t)$ в точці T виконується нерівність $x(T)-x_{n_1}(T) > \frac{\mu}{2}$. А оскільки на підставі (18) $\{x(T), x_{n_1}(T)\} \subset [a, b]$, то згідно з (21), (22) і (23)

$$-f(x(T)) + f(x_{n_1}(T)) + h(T) - h_{n_1}(T) > \frac{k\mu}{2} - \delta > 0.$$

Звідси випливає, що на інтервалі $[t_1, +\infty)$ не існує точки τ, в якій

$$\left.\frac{d(x(t)-x_{n_1}(t))}{dt}\right|_{t=\tau} = 0.$$

Тому $(\forall t \geq t_1)$: $\frac{d(x(t)-x_{n_1}(t))}{dt} > 0$. Отже, $(\forall t \geq t_1) : x(t)-x_{n_1}(t) \geq \frac{\mu}{2}$. Тоді на підставі (21), (22), (23) і (25)

$$(\forall t \geq t_1) : \frac{d(x(t)-x_{n_1}(t))}{dt} \geq \frac{k\mu}{2} - \delta > 0.$$

Це співвідношення, очевидно, суперечить співвідношенню (18).

Отже, припущення про те, що не виконується співвідношення (19) є хибним у випадку, коли функція $f(t)$ є строго спадною на $\mathbb{R}$.

Тому відображення $L\colon C^1 \to C^0$ має обернене неперервне відображення, якщо функція $f(t)$ є строго спадною на $\mathbb{R}$.

Тепер розглянемо випадок, коли функція $f(x)$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$. Цей випадок зводиться до розглянутого вище випадку. Справді, допоміжне відображення $L_1\colon C^1 \to C^0$, визначене рівністю

$$(L_1 x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f(-x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

має обернене неперервне відображення, оскільки функція $f(-x)$ є строго спадною на $\mathbb{R}$. Оскільки $(Lx)(t) = (L_1 y)(-y)$ для всіх $x, y \in C^1$ і $t \in \mathbb{R}$, якщо

$(\forall t \in \mathbb{R}) : x(t) = -y(-t)$, то відображення L також має обернене неперервне відображення.

Отже, відображення $L: C^1 \to C^0$ має обернене неперервне відображення і у випадку, коли функція $f(x)$ є строго зростаючою на $\mathbb{R}$. $\square$

6. *Доведення теореми 3.* Згідно з теоремою 2 відображення $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має обернене. Тому на підставі неперервності відображення f функція $f(x)$ є строго зростаючою або строго спадною на $\mathbb{R}$. За теоремою 1 для кожної функції $h = h(t) \in C^0$

$$R(L^{-1}h) \subset f^{-1}(\overline{R(h)}). \tag{28}$$

Тому

$$\sup\left\{|x| : x \in R(L^{-1}h)\right\} \leq \sup\left\{|x| : x \in f^{-1}(\overline{R(h)})\right\}. \tag{29}$$

Оскільки $|f(x)| \geq k|x|$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то

$$\sup\left\{|x| : x \in f^{-1}(\overline{R(h)})\right\} \leq \sup\left\{|x| : x \in \overline{R(k^{-1}h)}\right\}.$$

Звідси та з нерівності (29) випливає, що

$$(\forall h \in C^0) : \|L^{-1}h\|_{C^0} \leq k^{-1}\|h\|_{C^0}. \tag{30}$$

Для доведення нерівності

$$(\forall h \in C^0) : \|L^{-1}h\|_{C^1} \leq (2 + k^{-1})\|h\|_{C^0} \tag{31}$$

використаємо те, що

$$\frac{d(L^{-1}h)(t)}{dt} = -f((L^{-1}h)(t)) + h(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

і $f(R(L^{-1}h)) \subset \overline{R(h)}$ для всіх функцій $h = h(t) \in C^0$ (останнє співвідношення отримується із співвідношення (28) на підставі монотонності функції $f(x)$ на $\mathbb{R}$). Тому $\|f(L^{-1}h)\|_{C^0} \leq \|h\|_{C^0}$ і згідно з (32) $\left\|\frac{dL^{-1}h}{dt}\right\|_{C^0} \leq 2\|h\|_{C^0}$. З цієї нерівності та з нерівності (30) випливає нерівність (31). $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
2. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
3. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
4. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
5. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наукова думка, 1990. – 271 с.

6. Мухамадиев Э. *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций* Матем. заметки. – 1972. – Т.11, 3. – С.269–274.
7. Слюсарчук В.Е. *Обратимость неавтономных дифференциально- функциональных операторов* Матем. сб. – 1986. – Т.130(172), 1(5). – С.86–104.
8. Слюсарчук В.Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов* Матем. заметки. – 1987. – Т.42, 2. – С.262–267.
9. Слюсарчук В.Е. *Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений*

   Укр. мат. журн. – 1987. – Т.39, 5. – С.660–662.
10. Слюсарчук В.Е. *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно с-непрерывных функционально-дифференциальных операторов* Укр. мат. журн. – 1989. – Т.41, 2, С.201–205.
11. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Рівненський державний технічний університет

Надійшло 2.02.1999